

脊峯形同軸波导的工作特性*

林 为 干

提 要

文中给出了脊峯形同軸波导的各波型的截止频率曲线,与最低波型的功率传输量,还有一个波导的衰耗常数公式。指出了脊峯形同軸波导具有极低的截止频率,可以在很宽的频段内工作。这些是同軸綫工作于 TEM 波型时的特性。

在分米波及米波波段,同軸綫要比波导管用得更广泛,此时在同軸綫中运行的是横电磁波,但这个波型由于没有电场和磁场的纵向分量,故不可能在同軸綫中给出圆极化的磁场,在某些元件应用中这是一个要克服的缺点。脊峯形同軸綫波导在很大程度上保持同軸綫的特性,但又具有磁场的纵向分量,故可以做成谐振式铁氧体隔离器等元件^[1],故脊峯形同軸波导正是克服上述缺点的一个方法。此种波导的特性人们知道的还少,故是本文研究的对象。

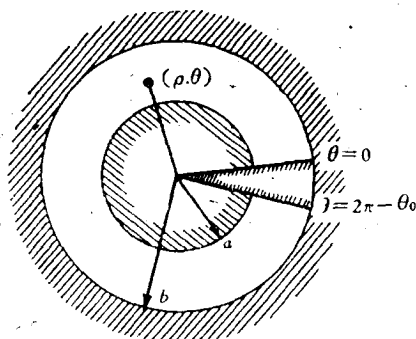


图1 脊峯形同軸波导

图1表示此脊峯形同軸波导,圆柱面 $\rho = a, b$ 及平面 $\theta = 0, \theta = 2\pi - \theta_0$ 是理想导体表面。我们采用圆柱坐标系。如下所述,横磁波及横电波的场分量能够满足所有的边界条件,故能够单独存在,而

横电磁波则不能存在。

一、横磁波 (TM 波)

此时的电磁场诸分量可表示如下^[1]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_t &= (2\pi j \lambda_b)^{-1} \lambda_c^2 \nabla E_z, \\ \mathbf{H}_t &= \frac{\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_t}{Z_0}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\lambda}{\lambda_b}. \quad (2)$$

在(1)中 $\mathbf{E}_t$ 及 $\mathbf{H}_t$ 代表电场及磁场的横向分量,故 $\mathbf{E}_t$ 有两个分量 (E_ρ, E_θ), 同样地 $\mathbf{H}_t$ 有 H_ρ, H_θ , E_z 是电场的纵向分量, $\mathbf{i}_z$ 是沿轴綫 (z 方向)取向的单位向量; λ 是工作波长, λ_b 是波导波长, λ_c 是截止波长, ∇E_z 代表 E_z 的梯度,而 E_z 则又满足波动方程。

* 1960年10月18日收到。

$$\nabla^2 E_z + \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 E_z = 0, \quad (3)$$

则由波动方程(3)的解可以求出 E_z 的表示式, 加入边界条件即可求出 λ_c 的值, λ_c 与 λ_b 及 λ 的关系又可表出如下:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_b}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2 = k_c^2. \quad (4)$$

不难看出(3)的解是

$$E_z = A_m[J_m(k_c\rho) + B_m N_m(k_c\rho)][\sin m\theta + D_m \cos m\theta], \quad (5)$$

在(5)中及以后的式子中, 我們略去

$$e^{j\omega t - \gamma_m z}$$

一因子不写, 其中 ω 是工作角频率, $\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega}$, $\gamma_m = j \frac{2\pi}{\lambda_b}$.

(5)式的 E_z 又必須滿足如下的边界条件:

$$\rho = a, b \quad E_z = 0, \quad (6)$$

$$\theta = 0, 2\pi - \theta_0 \quad E_z = 0. \quad (7)$$

由(6)可知

$$B_m = -\frac{J_m(k_c a)}{N_m(k_c a)} = -\frac{J_m(k_c b)}{N_m(k_c b)}. \quad (8)$$

由(7)可知,

$$D_m = 0,$$

$$m = n \frac{1}{2 - \theta_0/\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

由(8)即可求出 k_c , 然后由(4)求出 λ_b , 在许多应用问题中, λ_b (或 λ_c) 是重要参数.

二、横电波 (TE 波)

此时电磁场为^[2]:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_t &= (2\pi j \lambda_b)^{-1} \lambda_c^2 \nabla H_z \\ \mathbf{E}_t &= -Z_0 \mathbf{i}_z \times \mathbf{H}_t \\ Z_0 &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\lambda_b}{\lambda} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中 H_z 满足同一波动方程(3), 故可写成

$$H_z = A'_m[J_m(k_c\rho) + B'_m N_m(k_c\rho)][\cos m\theta + D'_m \sin m\theta] \quad (11)$$

而 H_z 所满足的边界条件为

$$\rho = a, b, \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} = -\frac{\partial H_z}{\partial \rho} = 0,$$

$$\theta = 0, 2\pi - \theta_0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} = -\frac{\partial H_z}{\rho \partial \theta} = 0.$$

故同样可得到

$$B'_m = -\frac{J'_m(k_c a)}{N'_m(k_c a)} = -\frac{J'_m(k_c b)}{N'_m(k_c b)}, \quad (12)$$

$$D'_m = 0,$$

$$m = n \frac{1}{2 - \theta_0/\pi}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (9a)$$

三、横电磁波(TEM 波)

此时 $E_z = 0, H_z = 0, \lambda_b = \lambda$ 故 $\lambda_c \rightarrow \infty$, (3) 转变为拉普拉斯方程.

在图 1 的单联通区域中, 不可能存在横电磁波, 亦即是說在此单联通区域中拉普拉斯方程不能有非零值解.

四、临界波长 λ_c

此脊峯形波导的截止波长(临界波长) λ_c 是由 (8) 及 (12) 定出的, 即

TM 波:

$$B_m = -\frac{J_m(x)}{N_m(x)} = -\frac{J_m(qx)}{N_m(qx)}, \quad (8a)$$

TE 波:

$$B'_m = -\frac{J'_m(x)}{N'_m(x)} = -\frac{J'_m(qx)}{N'_m(qx)}, \quad (12a)$$

其中

$$x = k_c a, \quad q = b/a \geq 1, \\ m = n \frac{1}{2 - \theta_0/\pi}, \quad \begin{array}{l} \text{TM 波: } n = 1, 2, 3, \dots \\ \text{TE 波: } n = 0, 1, 2, \dots \end{array}$$

我們將討論几个有实用意义的波型的临界波长:

(1) $\theta_0 = \pi$, 此时

$$m = n = 1, 2, 3, \dots (\text{TM 波}), \\ = 0, 1, 2, \dots (\text{TE 波}),$$

故 (8) 及 (12) 的表示式与求解普通同軸綫的高阶波的临界波长 λ_c 的表示式无异, 此时直

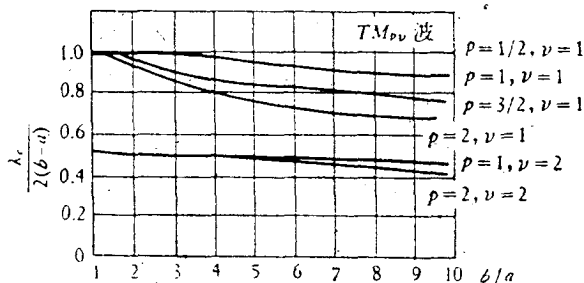


图 2 脊峯形波导 TM 波的截止波长

径平面 $\theta = 0$ 及 $\theta = \pi$ 的出現只有一个效应: 即将 TEM 波型及圓对称的 TM 波 ($n = 0$) 排除掉, 而对于其他的高阶并未引起任何影响.

(2) $\theta_0 = 0$, 此时

$$m = \frac{1}{2} n = p$$

(8a) 式的数字解已列成数表, 可以直接利用^[3]; 利用这些数表, 我們描

出图 2 的脊峯形波导的 TM 波的截止波长, 其中

$$m = p, \quad p = 1/2, 1, 3/2, 2, \dots,$$

$$(q-1)x = \left(\frac{b}{a} - 1\right) \frac{2\pi}{\lambda_c} a = x_{pv},$$

x_{pv} 是可以查表讀出, x_{pv} 是(8a)式的第 v 个根.

从图 2 可見, 当 $p = 1/2, v = 1$ 时

$$\lambda_c = 2(b-a),$$

而与 b/a 比值无关, 即是說, 这一个波型与平行板波导的最低 TM 波型的比拟更是完全.

(12a) 給出脊峯形波导中 TE 波型的截止頻率, 这一个式子只能进行图解, 如图 3 所示. 我們先描出 $B_p = J'_p(x)/N'_p(x)$ 的曲綫, 然后对已定的 $q = b/a$ 的值描出 $B_p = J'_p(qx)/N'_p(qx)$ 的曲綫, 从它們的交点即可求出(12a)的一个解 x_p . 已經証明^[4], 对函数

$$B_p = J'_p(x)/N'_p(x)$$

存在一个而且只有一个相对的最大值, 此相对最大值出現于 $x = p$ 处, $p = 0$ 除外, 当 $p = 0$ 时在有限的 x 值上不出現相对的最大值; 在图 3 中, 我們把这个特性明显地表示出来. 根据这个特性, (12a) 的解 x_p 有如下的特性:

$$x_p \leq p, \quad (14)$$

而且可以看出, 当

$$\left. \begin{array}{l} q \rightarrow 1 \\ x_p \rightarrow p \end{array} \right\}, \quad (15)$$

对于脊峯形同轴波导, 从(9)可見,

$$p = m = \frac{1}{2} n$$

的最小值为 $1/2$ ($p = 0$ 的情形除外, 这个情形以后要討論到). 又从图 3 的 (12a) 的解的

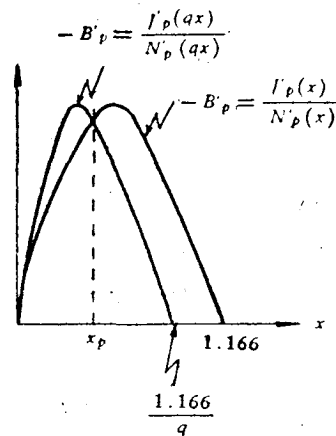


图 3 (12a) 式的图解

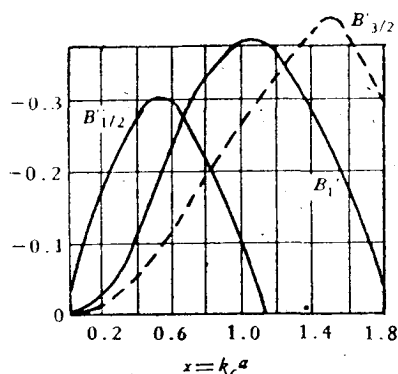


图 4 B_p 的值

作图法, 如我們描出 $B_p, p = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ 时的曲綫(見图 4), 即不难看出, 在同一个 $q = b/a$ 的值, $p = \frac{1}{2}$ 給出 (12a) 式的最小的第一个根. 所以我們說脊峯形同轴波导中 TE_{p1} 波, $p = 1/2$ 是最低波型(主波), 无 TEM 波.

我們將(12a)的解所定出来的截止波长繪成图 5 和图 6 两种不同形状的曲綫族,以便进行比较和討論.

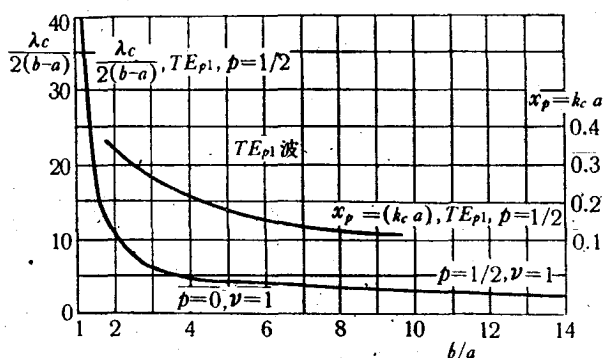


图 5 脊峯形波导中 TE 波的截止波长

故即得到

$$\lambda_c = 2(2\pi a) = 2 \left(2\pi \frac{a+b}{2} \right), \quad (16)$$

即截止波长近似地等于内外两导体周长平均值的两倍. 从这个比拟看来, 則脊峯形波导的 TE_{p1} 波当 $p = 1/2$ 时与矩形波导中的 TE_{10} 波更相似 (矩形波导中 TE_{10} 波型的截止波长是寬边长的两倍). 在图 6 曲綫中, $p = 1, v = 1$ 的曲綫亦是普通同軸綫中最低的高阶波. 由图 6 可見, 当 $\frac{a}{b}$ 增加时, λ_c 迅速地接近(16)所給出的值.

从图 4, 5, 6, 我們即可观察脊峯形同軸波导中各个波型間的截止波长的分布情况. 从图 2 可見对于 TM 波, 当 $p = \frac{1}{2}, v = 1$ 时, 我們得到最低波型, 此点亦可从(8a)的解的列表值^[3]看出. 当 $p = 1, v = 1$ 时, TM 波的截止波长与 $p = 0, v = 1$ 时 TE 波的截止波长相同. 从图 5 及 6 可見, 脊峯形波导中 TE_{p1} 波, $p = \frac{1}{2}$ 的截止波长要比其他所有的 TE 和 TM 波的截止波长长. 故可見这是这类形波导中的最低波型. 图 6 中 $p = 1, v = 1$ 的曲綫, 亦是普通同軸綫中最低的高諧波型的截止波长曲綫, 从此图可見, 导体平面在 $\theta = 0$ 处出現 (參看图 1), 使同軸綫变为脊峯形波导, 而同軸綫最低波型 TEM 型轉化为脊峯形波导中的最低波型, 两者的截止波长相差甚远, 而后的截止波长为大, 从(16)式的討論, 又不難看出, 脊峯形波导中的 TE_{p1} 波, $p = 1/2$, 是所有波型中的最低波型.

在脊峯形波导中 TE_{p1} 波, $p = 1/2$ 的截止波长既然与其他所有的波型的截止波长相

(12a)的解 $x_p = (k_c a)$ 只与 b/a 有关, 对于 TE_{p1} , $p = 1/2$ 时的解 $x_p = (k_c a)$ 已繪成图 5 的曲綫.

从图 5 可見 λ_c 的值很大, 可見脊峯形波导的 TE_{p1} 波, $p = \frac{1}{2}$, 保存同軸綫 TEM 波的极长的截止波长 (理論上是无限大) 的特性. 另一方面, 由(15)可見当

$$b/a \cong 1 \text{ 时,}$$

$$x_p = \frac{2\pi}{\lambda_c} a = 1/2.$$

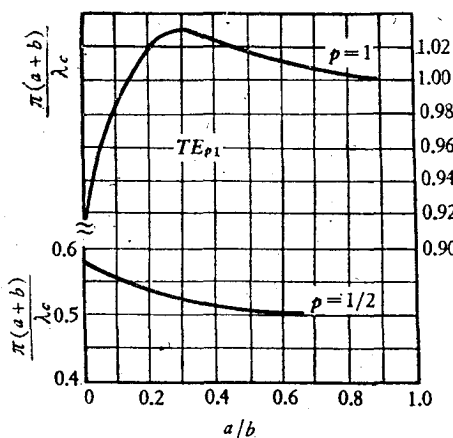


图 6 脊峯形波导中 TE 波的截止頻率

差甚远,故这一波型可以在很宽的频段内工作,而不受其他波型的干扰,这一宽频段特性亦是普通同轴线工作于 TEM 波型时的特性,而由脊峯形波导基本上保持下来。

图 5 和图 6 的截止波长曲线是有实际用途的。

从(9)可见,当 $\theta_0 > 0$ 时, $m > 1/2$,故当 $\theta_0 > 0$ 时所构成的脊峯形波导中的波型都不是最低波型,没有什么大的实用性,故不多讨论了。

五、最大传输功率

波导中传输功率可以按下面的众所周知的公式计算^[2]。

$$\text{TM 波: } P_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{\lambda}{\lambda_c} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^2 \int_S E_z^2 dS,$$

$$\text{TE 波: } P_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_b} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^2 \int_S H_z^2 dS,$$

其中,公式中的积分是对波导截面进行的。

在这里,我们只计算一下脊峯形同轴波导中 TE_{p1} 波, $p = 1/2$ 时的传输功率及其最大值。代入(11),并取得如下的记号: $Z_m(k_c \rho) = J_m(k_c \rho) + B'_m N_m(k_c \rho)$, 当 $m = 1/2$ 时

$$Z_{\frac{1}{2}}(k_c \rho) = J_{\frac{1}{2}}(k_c \rho) + B'_m N_{\frac{1}{2}}(k_c \rho).$$

故得到,对于 TE_{p1}, $p = 1/2$ 时,

$$P_z = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_b} \left(\frac{\lambda_c}{\lambda} \right)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b Z_{1/2}^2(k_c \rho) \rho d\rho.$$

既然 $Z_m(x)$ 是贝塞耳方程的解,故我们可以利用以下的众所周知的积分公式^[3]

$$\int Z_p^2(x) x dx = \frac{x^2}{2} \left[Z_p'^2(x) + \left(1 - \frac{p^2}{x^2} \right) Z_p^2(x) \right].$$

再利用边界条件(12),即得到(TE 波)

$$P_z = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A_p'^2 \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{\lambda_c}{\lambda_b} \left[\left(1 - \frac{p^2}{k_c^2 b^2} \right) \frac{b^2}{2} Z_p^2(k_c b) - \left(1 - \frac{p^2}{k_c^2 a^2} \right) \frac{a^2}{2} Z_p^2(k_c a) \right]. \quad (17)$$

利用贝塞耳方程的乌隆斯基行列式,不难证明

$$\begin{aligned} Z_p(k_c a) &= J_p(k_c a) - \frac{J_p'(k_c a)}{N_p'(k_c a)} N_p(k_c a) \\ &= \frac{2}{\pi k_c a N_p'(k_c a)}, \end{aligned}$$

及

$$Z_p(k_c b) = \frac{2}{\pi k_c b N_p'(k_c b)}.$$

将这个式子代入(17),即得到

$$P_z = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} A_p'^2 \frac{\lambda_c}{\lambda} \frac{\lambda_c}{\lambda_b} \left\{ \left(1 - \frac{p^2}{k_c^2 b^2} \right) \frac{1}{[\pi k_c N_p'(k_c b)]^2} - \left(1 - \frac{p^2}{k_c^2 a^2} \right) \frac{1}{[\pi k_c N_p'(k_c a)]^2} \right\}. \quad (17a)$$

(17)或(17a)就是脊峯形同軸波導中沿波導軸綫方向傳輸的功率公式,為了求出此波導所能傳輸的最大功率,我們還要看波導中電場的最大值的大小. 試取 TE_{p1} 波, $p=1/2$, 則從以上對矩形波導中 TE_{10} 波的比擬和以上所提及的此脊峯形波導保存了普通同軸綫的許多特點,不難看出,電場最大值發生於 $\rho = a, \theta = \pi$ 處,對 TE_{p1} 波, $p = 1/2$ 時

$$E_{\max} = E(a, \pi) = A_p' \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_c^2}{4\pi\lambda a} Z_{1/2}(k_c a) = A_p' \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_c^2}{2\pi\lambda a} \frac{1}{\pi k_c a N_{1/2}'(k_c a)}. \quad (18)$$

由(17)及(18)可得到

$$P_z = E_{\max}^2 (\pi a^2) \frac{\lambda}{\lambda_b} (k_c a)^2 \left[\left(1 - \frac{1}{4k_c^2 a^2 q^2} \right) \frac{N_{1/2}'^2(k_c a)}{N_{1/2}'^2(k_c a q)} - \left(1 - \frac{1}{4k_c^2 a^2} \right) \right], \quad (19)$$

其中

$$\lambda_b = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_c a}{2\pi a} \lambda \right)^2}}. \quad (20)$$

由圖5所給出的 $(k_c a)$ 曲綫,可見 $(k_c a)$ 的值只決定於 q 的值,故(19)又可寫成下式

$$P_z = \frac{E_{\max}^2}{120} a^2 \frac{\lambda}{\lambda_b} f\left(\frac{b}{a}\right),$$

其中我們取空氣中的

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = 120\pi.$$

$f\left(\frac{b}{a}\right)$ 已繪成如圖7的曲綫. 普通同軸綫的傳輸功率可寫成

$$P = \frac{E_{\max}^2}{120} a^2 \ln \frac{b}{a}.$$

在圖7中,我們將 $\ln \frac{b}{a}$ 繪成虛綫,以便進行比較,從此圖可見,脊峯形同軸波導的最大傳輸功率,較之普通同軸綫工作於TEM主波時的最大傳輸功率小(最大傳輸功率是當 $E_{\max}$ 取空氣中击穿電場強度時計算出來的功率,一般此值取作30000伏/厘米). 例如在 $\frac{b}{a} \simeq$

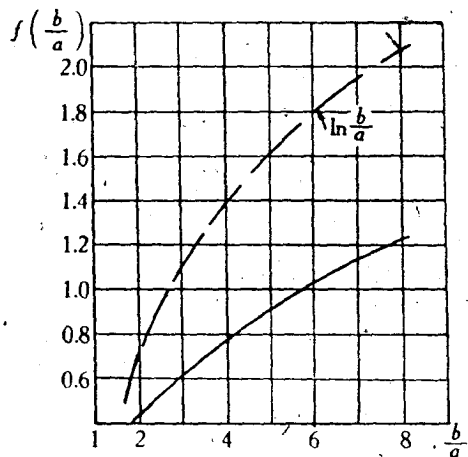


圖7 $f\left(\frac{b}{a}\right)$ 的曲綫

3.5(75 欧姆的普通同軸綫)时, 脊峯形同軸波导的最大传输功率是同軸綫的最大传输功率的 $(54.4\lambda/\lambda_b)\%$ 。

六、脊峯形同軸波导的衰耗常数

脊峯形同軸波导, 一般不作长距离传输綫用, 故其衰耗常数不是一个重要的参数。但如果我們把它用作谐振腔时, 則計算品质因数时此衰耗常数的值即显得重要, 故我們在这里在进行一些討論。在这类波导中, 既然沒有尖峯的出現, 衰耗常数 β 仍由下式計算出来^[2],

$$\beta = P_L/2P_z,$$

P_z 已給出如 (17a) 式, P_L 是此脊峯形同軸波导每单位长的波导壁上的損耗, 可按式計算, 对 TE 波,

$$P_L = \frac{R_s}{2} \oint \left\{ H_z^2 + \frac{2\pi}{\lambda_b} \frac{1}{k_c^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial l} \right)^2 \right\} dl,$$

其中 dl 是脊峯形同軸波导横截面边界围綫的元长度, R_s 是高频电阻

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta}, \quad \delta = 1/\sqrt{\pi f \mu \sigma},$$

其中 σ 是波导壁金属的导电系数。

代入(11)式并参照图 1, (22)式即可整理如下, 当 $m = P = \frac{1}{2}$ 时,

$$P_L = \frac{R_s}{2} A_m'^2 \left[\int_0^{2\pi} \{ a Z_m^2(k_c a) + b Z_m^2(k_c b) \} \cos^2 m \theta d\theta + 2 \int_a^b Z_m^2(k_c \rho) d\rho + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi^2} \frac{\lambda_c^4}{\lambda_b^2} \left\{ \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{a} Z_m^2(k_c a) + \frac{1}{b} Z_m^2(k_c b) \right\} m^2 \sin^2 m \theta d\theta + 2 \int_a^b k_c^2 Z_m'^2(k_c \rho) d\rho \right\} \right],$$

整理后又可写成

$$P_L = \frac{R_s}{2} A_m'^2 \left\{ \pi a \left(1 + \frac{1}{16\pi^2 a^2} \frac{\lambda_c^4}{\lambda_b^2} \right) Z_m^2(k_c a) + \right. \\ \left. + \pi b \left(1 + \frac{1}{16\pi^2 b^2} \frac{\lambda_c^4}{\lambda_b^2} \right) Z_m^2(k_c b) + \right. \\ \left. + 2 \int_a^b Z_m^2(k_c \rho) d\rho + \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda_c^4}{\lambda_b^2} k_c^2 \int_a^b Z_m'^2(k_c \rho) d\rho \right\} = \\ = \frac{R_s}{2} A_m'^2 \left\{ \pi a \left(1 + \frac{\lambda_c^2}{4\lambda_b^2 (k_c a)^2} \right) Z_m^2(k_c a) + \right. \\ \left. + \pi b \left(1 + \frac{\lambda_c^2}{4\lambda_b^2 (k_c b)^2} \right) Z_m^2(k_c b) + \right. \\ \left. + 2 \int_a^b Z_m^2(k_c \rho) d\rho + \frac{\lambda_c^2}{\lambda_b^2} (2\pi) \int_a^b Z_m'^2(k_c \rho) d\rho \right\},$$

对此式我們不进行数字的計算, 因为如我們在本节开首时所說, 整个衰耗常数 β 的用处不大, 但对上式最后两个积分, 我們放在附录里进行一些討論, 这对于应用(22)式是有所帮助的。

七、結 論

以上我們对脊峯形同軸波导的波型,各个波型的截止頻率,此波导的功率传输情况进行了較詳細的討論,对于波导的衰耗常数也接触到。我們指出 TE_{p1} 波当 $p = 1/2$ 时是最低波型,并把它截止波长繪成图 5 或图 6 的曲綫,这两族曲綫对于脊峯形同軸波导的設計應該是很有用的。图 7 在估計此脊形同軸波导的最大传输功率时也是有用的。

附录: 两个貝塞耳方程解的积分

試取貝塞耳方程的一个解 $Z_p(x)$ 的如下的积分:

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} Z_p^2(x) dx, \quad (1a)$$

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} Z_p'(x) dx, \quad (2a)$$

这两个积分,一般不能給出閉合形式的結果,但当 $p = n + 1/2$, $n = 1, 2, 3, \dots$ 时,它們可以用其他的特殊函数表出。

試取 $p = 1/2$, 設 $Z_{1/2} = J_{1/2} + BN_{1/2}$ 是第一、二类貝塞耳函数的一个綫性組合,則由 (1a) 可得

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} Z_{1/2}^2(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (J_{1/2} + BN_{1/2})^2 dx,$$

代入

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

即得到

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{\pi x} \left[\sin^2 x + B^2 \cos^2 x - 2B \cos x \sin x \right] dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1+B^2}{2} \log \frac{x_2}{x_1} - (1-B^2) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\cos 2x}{2x} dx - B \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin 2x}{x} dx \right] = \\ &= \frac{1+B^2}{\pi} \log \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{\pi} [\text{Ci}(2x_1) - \text{Ci}(2x_2)] + \\ &\quad + \frac{2}{\pi} B [\text{Si}(2x_1) - \text{Si}(2x_2)], \end{aligned}$$

其中

$$\text{Si}x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

$$\text{Ci}x = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt,$$

分別是正弦积分和余弦积分。

再取 (2a), 如 $p = 1/2$, $Z_{1/2}'(x) = J_{1/2}'(x) + BN_{1/2}'(x)$, 則代入恆等式

$$Z'_p = Z_{p-1} - \frac{p}{x} Z_p = Z_{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2x} Z_{\frac{1}{2}}, \quad \text{如 } p = 1/2;$$

又由定义

$$N_p = \frac{J_p \cos p\pi - J_{-p}}{\sin p\pi},$$

得到

$$N_{\frac{1}{2}} = -J_{-\frac{1}{2}}, \quad N_{-\frac{1}{2}} = J_{\frac{1}{2}},$$

故最后得到

$$Z_{-\frac{1}{2}}(x) = -N_{\frac{1}{2}}(x) + B J_{\frac{1}{2}}(x),$$

代入这些式子后, (2a) 变为

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{x_1}^{x_2} \left[Z_{-\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2x} Z_{\frac{1}{2}}(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1+B^2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{4x^2} \right) + \frac{1}{x} [B \sin 2x + (1-B^2) \cos 2x] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2x^2} [(1-B^2) \sin 2x + 2B \cos 2x] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4x^3} [B \sin 2x - (1-B^2) \cos 2x] \right\} dx, \end{aligned}$$

利用公式

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin t}{t^m} dt &= -\frac{1}{m-1} \frac{\sin t}{t^{m-1}} + \frac{1}{m-1} \int \frac{\cos t}{t^{m-1}} dt, \\ \int \frac{\cos t}{t^m} dt &= -\frac{1}{m-1} \frac{\cos t}{t^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \int \frac{\sin t}{t^{m-1}} dt, \end{aligned}$$

即可将 I_2 化为对数及 $\text{Ci}(x)$ 及 $\text{Si}(x)$ 的和式的结果, 这个结果不在此处给出了。

参 考 文 献

- [1] Вамберский М. В., *Радиотехника и Электроника* 5, № 6, (1960), 930.
- [2] Ramo and Whinnery, 近代无线电中的场与波, 八, 九章(邮电出版社, 1958) 或 Slater, *Microwave Electronics*.
- [3] Jahnke and Emde, 函数表, p. 205.
- [4] Rohn Truell, *J. A. P.*, 14, (1943), 350.

PROPERTIES OF RIDGE COAXIAL WAVEGUIDES

LIN WEI-GUAN

Curves giving the cutoff frequencies of some modes and the power carrying capacity of the lowest propagating mode and an equation giving the attenuation constant are presented for a ridge coaxial waveguide. It is shown that the ridge coaxial waveguide has very low cutoff frequencies and rather great higher-mode separation which also are properties of the coaxial TEM mode.