

# 非均匀层中的反波导传播\*

尚 尔 昌

## 提 要

文中討論了无切变弹性、介質参数为綫性函数的非均匀层中当  $\frac{H}{\lambda} \gg 1$  时的点源波場 ( $H$  为层厚,  $\lambda$  为波长). 对三种非全反射的界面所形成的反波导传播,进行了理論探討. 在使用溫-克-布 (W. K. B.) 近似下,对場的簡正波的頻散方程,得到了射綫解释. 在引用数值反射系数边界条件下,給出以反射系数表征的波动影区的場强公式:  $I \sim \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{2H} \sqrt{\frac{a}{2H}} \cdot \ln |V|}$ ,  $r$  为距源的水平距离,  $H$  为层厚,  $a$  为波速梯度,  $V$  为层下界面的平面波反射系数.

## 一、引 言

关于非均匀介質中的传播問題,近年来無論在理論上和实验上都进行了大量的研究工作. 布列霍夫斯基赫建立了分层介質中传播的系統的理论<sup>[1]</sup>. 在波場的計算方面,匹克利斯研究了两液层問題<sup>[2]</sup>,此外,匹克利斯还作了半空間的反波导传播的理论,并給出了影区中衍射場强的理論公式<sup>[3]</sup>. 布列霍夫斯基赫曾对另一类半空間的反波导传播进行了研究<sup>[4]</sup>. 噶則良对所謂爱普斯坦介質的波导传播作出比較完全的理论<sup>[5]</sup>. 馬斯捷洛夫也計算过两类特殊介質参数的波場<sup>[6,7]</sup>. 这些工作主要解决的是: (1) 均匀层中場的問題 (两层,三层,以至推广到  $n$  层); (2) 非均匀的半空間 (介質参数是某些特殊的連續解析函数) 的波場問題.

本文所討論的是非均匀层中的波場問題. 这类問題由于数学上的困难,在目前文献中很少討論. 最近托尔斯泰对这类問題的波导传播的波場 (实特征值情况), 提出由电子計算机进行数值計算的解法<sup>[8,9]</sup>. 本文中所討論的非均匀层的上界面是自由表面,层中的介質参数为簡單的綫性函数  $k^2(z) = k_0^2(1 + 2az)$  (当  $a \ll 1$  时波速也近似是綫性的  $c \cong c_0(1 - az)$ ). 在  $\frac{H}{\lambda} \sim 1$  的条件下 (低頻), 往往可以先作均匀层的問題,然后用微扰法来估計非均匀性产生的效果<sup>[10]</sup>. 但是在  $\frac{H}{\lambda} \gg 1$  时,这种方法是不适用的.

如图 1 所示,造成层  $(0, H)$  中反波导传播的原因是下界面  $z = H$  的非全反射性. 能够造成下界面 ( $z = H$ ) 具有非全反射性,对于  $z > H$  的半空間來說,有各种可能的介質情况. 为使問題簡化,我們选取了图 1 中的三种模型来进行波場的計算. 模型 (I),  $z > H$  具有层底部的波速  $c_H$ , 密度相同. 模型 (II),  $z > H$  是具有吸收介質的均匀半空間,以复数波速描写  $c_2 = c_2' + ic_2''$ , 密度为  $\rho_2$ . 模型 (III), 对  $z > H$  的介質参数不作明确的描写,而

\* 1961年3月1日收到.

代之以界面  $z = H$  上的数值反射系数为边界条件.

如计算所表明, 这三种模型都是反波导传播(即所有各号简正波都是随距离而指数衰

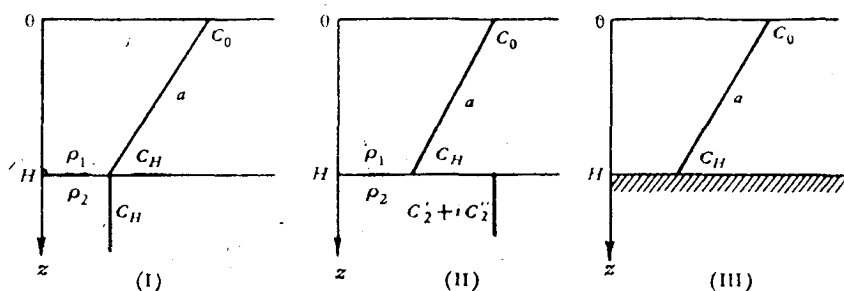


图 1

減的). 模型 (I) 退化为匹克利斯所得的结果<sup>[3]</sup>. 当把模型 (II) 过渡为模型 (III) 时, 使得波场的计算大大简化, 并能给出简明的结果. 从物理上看, 在界面  $z = H$  的反射系数, 是可以概括  $z > H$  半空间的介质分布情况的, 而且这种概括对于解层中场的問題往往可以得到简化.

## 二、场的积分表示

在层中  $z = z_0$  深度放置简谐点源, 求波场的問題可化为下述的数学問題:

引入波势  $\varphi$  ( $\vec{v} = -\text{grad } \varphi$ ,  $p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ) 使满足波动方程

$$\Delta \varphi + k^2(z) \varphi = 0, \quad (1)$$

并满足以下的附加条件:

- 1) 在  $z = 0$  的自由表面的边界条件;
- 2) 在  $z = H$  的相应的边界条件:

$$\begin{aligned} \rho \varphi \Big|_{H-0}^{H+0} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{H-0}^{H+0} &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

- 3) 在源处的点源奇性;
- 4) 辐射条件.

在柱对称情况下, 设  $\varphi = R(r)F(z)$ , 分离变量后, 由 (1) 得

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + [k^2(z) - \lambda^2] F = 0, \quad (4)$$

其中  $\lambda^2$  为分离常数, (3) 是熟知的零阶贝塞耳方程, 在  $k^2(z) = k_0^2(1 + 2az)$  的情形下, (4) 的解为  $1/3$  阶的汉克尔函数.

我们来构造满足附加条件的场的积分表达式

$$\varphi(r, z, t, \lambda) = e^{-i\omega t} \int_0^\infty \Phi(z, \lambda) J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (5)$$

時間因子  $e^{-i\omega t}$  以后將略去不寫。

設方程(4)的两个綫性无关解为  $F_1(z)$  及  $F_2(z)$ , 則(5)的  $\Phi$  可分段表达如下:

$$\Phi_1 = A_1 F_1(z) + B_1 F_2(z), \quad (0 < z < z_0) \quad (6)$$

$$\Phi_2 = A_2 F_1(z) + B_2 F_2(z), \quad (z_0 < z < H) \quad (7)$$

$$\Phi_3 = C e^{i\beta_2 z}, \quad (H < z) \quad (8)$$

其中  $\beta_2^2 = k_2^2 - \lambda^2$ . 为滿足輻射条件; 規定

$$\beta_2 = \sqrt{k_2^2 - \lambda^2}, \quad \text{当 } \lambda < k_2 \text{ 时} \quad (9)$$

$$\beta_2 = i\sqrt{k_2^2 - \lambda^2}, \quad \text{当 } \lambda > k_2 \text{ 时} \quad (10)$$

系数  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , 及  $C$  可由附加条件定出。

$$\text{在 } z = 0, \quad A_1 F_1(0) + B_1 F_2(0) = 0, \quad (11)$$

$$\text{在 } z = H, \quad \rho_1 [A_2 F_1(H) + B_2 F_2(H)] = C \rho_2 e^{i\beta_2 H}, \quad (12)$$

$$A_2 F_1'(H) + B_2 F_2'(H) = i B_2 C e^{i\beta_2 H}, \quad (13)$$

$$\text{在 } z = z_0, \quad A_1 F_1(z_0) + B_1 F_2(z_0) = A_2 F_1(z_0) + B_2 F_2(z_0), \quad (14)$$

$$A_1 F_1'(z_0) + B_1 F_2'(z_0) = A_2 F_1'(z_0) + B_2 F_2'(z_0) - 2\lambda. \quad (15)$$

由(11)–(15)解出  $A_1, B_1, A_2, B_2$ , 及  $C$ , 我們就可得到层中場的积分表达式:

$$\varphi = 2 \int_0^\infty \frac{\left[ F_1(z) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z) \right] \left[ F_1(z_0) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0) \right]}{W(F_1, F_2) \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (0 < z < z_0) \quad (16)$$

$$\varphi = 2 \int_0^\infty \frac{\left[ F_1(z_0) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z_0) \right] \left[ F_1(z) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z) \right]}{W(F_1, F_2) \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]} J_0(\lambda r) \lambda d\lambda, \quad (z_0 < z < H) \quad (17)$$

其中

$$\frac{B_1}{A_1} = - \frac{F_1(0)}{F_2(0)}. \quad (18)$$

$$\frac{B_2}{A_2} = - \frac{F_1(H) + \frac{im}{\beta_2} F_1'(H)}{F_2(H) + \frac{im}{\beta_2} F_2'(H)}, \quad m \equiv \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (19)$$

$W(F_1, F_2)$  是  $F_1, F_2$  的郎斯基行列式

$$W(F_1, F_2) = \begin{vmatrix} F_1(z) & F_2(z) \\ F_1'(z) & F_2'(z) \end{vmatrix}.$$

可以証明, (16)、(17) 与布列霍夫斯基赫<sup>[1]</sup> 的以反射系数表达的层中場积分公式是一致的。

以汉克耳函数  $H_0^{(1)}(\lambda r)$  来代替被积函数中的  $J_0(\lambda r)$ , 并規定从上方繞过原点  $\lambda = 0$  (見图 2), 則有  $H_0^{(1)}(-u) = H_0^{(1)}(ue^{i\pi}) = H_0^{(1)}(u) - 2J_0(u)$ , 于是場的积分可改写为:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\lambda, z) H_0^{(1)}(\lambda r) d\lambda \quad (20)$$

計算場的积分的方法是在复平面( $\lambda$ )上改变积分路綫, 根据哥西定理来計算被积函数

极点留数和以及沿分支线的积分(如果被积函数是多值函数)。前一部分一般称为场的简正波部分,后一部分称为场的旁侧波部分。

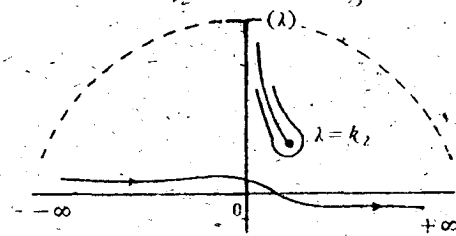


图 2

$$\varphi = \sum \text{留数} \{ \Phi(\lambda, z) H_0^{(1)}(\lambda r) \} + \int_{Br} = \varphi_n + \varphi_s \quad (21)$$

场的简正波部分可写为:

$$\varphi_n = 2\pi i \sum_l \left\{ \frac{\left[ F_1(z_0) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z_0) \right] \left[ F_1(z) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z) \right]}{W(F_1, F_2) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]} \right\}_{\lambda_l} H_0^{(1)}(\lambda_l r) \lambda_l \quad (21)$$

$$\left\{ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right\}_{\lambda_l} = 0 \quad (22)$$

至于场的旁侧波部分  $\varphi_s$ , 由于它衰减较快<sup>[1]</sup>, 在稍远距离可以忽略, 故这里不去讨论它了。

$\lambda_l$  是极点方程(频散方程)(22)的第  $l$  个根。

### 三、极点方程及其近似解

在我们所讨论的情形中, 方程(4)写为

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + k_0^2 \left[ 1 + 2az - \frac{\lambda^2}{k_0^2} \right] F = 0, \quad (23)$$

它的两个线性无关解为:

$$F_1(z) = u^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(u), \quad (24)$$

$$F_2(z) = u^{1/3} H_{1/3}^{(2)}(u), \quad (25)$$

其中

$$u \equiv \frac{1}{3ak_0^2} (k_0^2 + 2ak_0^2 z - \lambda^2)^{3/2} \quad (26)$$

在被积函数中, 我们碰到多值函数  $\beta_2$  及  $u$ 。但是可以证明, 被积函数的真实分支点是由  $\beta_2 = \sqrt{k_0^2 - \lambda^2} = 0$  所确定的  $\lambda = \pm k_0$ 。  $u = 0$  所给出的乃是假分支点。由辐射条件要求  $\text{Im } \beta_2 \geq 0$ , 由此分支线方程由  $\text{Im } \beta_2 = 0$  确定, 可以证明, 分支线是双曲线的一部分(见图 2)。这样作了割线之后, 在我们所选取的黎曼面上就有  $\text{Im } \beta_2 \geq 0$ 。

把(24), (25)代到(22)中, 我们便得到确定简正波特征值的极点方程(频散方程):

$$\frac{H_{1/3}^{(1)}(u_0)}{H_{1/3}^{(2)}(u_0)} - \frac{H_{1/3}^{(1)}(u_n) + PH_{1/3}^{(1)}(u_n)}{H_{1/3}^{(2)}(u_n) + PH_{1/3}^{(2)}(u_n)} = 0, \quad (27)$$

其中

$$P \equiv \frac{im}{\beta_2} (k_0^2 + 2ak_0^2 H - \lambda^2)^{1/2}, \quad (28)$$

$u_0$  即(26)中令  $z = 0$  时的  $u$  值,  $u_H$  即(26)中令  $z = H$  时的  $u$  值. 方程(27)是一个超越方程, 精确求根很困难. 我们以汉克尔函数的渐近展开(当宗量很大时)或零点展开(当宗量很小时)代入(27), 则可以得到简化了的近似的极点方程. 对于模型(I), 我们得到近似的极点方程为:

$$u_0 = \left(l - \frac{1}{4}\right) \pi e^{2\pi i}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (29)$$

这便是匹克利斯的結果<sup>[3]</sup>. 对于模型(II), 为方便起见, 引入新的記号  $\Delta(\lambda)$ :

$$\Delta \equiv \arctg P = \Delta_1 + i\Delta_2; \quad (\Delta_1, \Delta_2 \text{ 为实数}) \quad (30)$$

或由(28)写为: 
$$e^{2i\Delta} = \frac{1 + iP}{1 - iP} = \frac{\sqrt{k_2^2 - \lambda^2} - m \sqrt{k_0^2 + 2ak_0^2 H - \lambda^2}}{\sqrt{k_2^2 - \lambda^2} + m \sqrt{k_0^2 + 2ak_0^2 H - \lambda^2}} \quad (31)$$

如果令  $\lambda \equiv k_0 \sin \theta$ , 则(31)式可理解为  $e^{2i\Delta} = -V_H$ ,  $V_H$  是自参数为  $k_H, \rho_1$  的介质与参数为  $k_2, \rho_2$  的介质的界面的平面波反射系数. 将汉克尔函数在图3所示的各区作近似展开代入(27), 我们便得到

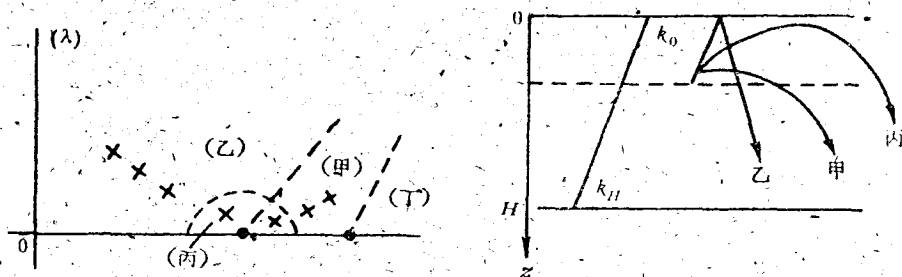


图 3

(甲)区,  $|u_0| \gg 1, \quad 2\pi > \arg u_0 > \frac{3}{2}\pi,$

$$u_H + \Delta = \left(l - \frac{1}{4}\right) \pi, \quad (32)$$

(乙)区,  $|u_0| \gg 1, \quad 0 > \arg u_0 > -\pi,$

$$u_H - u_0 + \Delta = i\pi, \quad (33)$$

(丙)区,  $|u_0| \ll 1,$

$$u_H + \Delta = \left(l - \frac{1}{12}\right) \pi. \quad (34)$$

在方程(32)–(34)中  $\Delta$  作为  $\lambda$  的函数  $\Delta(\lambda)$ , 是由(31)式给出的, 因此(32)–(34)还是不易解出的超越方程, 可以采取逐步逼近的方法求数值解.

如果我们设  $\Delta$  是某一给定的与  $\lambda$  无关的常数, 则由模型(II)过渡为模型(III). 由(31)可以看出, 这相当于我们在  $z = H$  界面引用了一个与入射角度无关的数值反射系数边界条件. 此时极点方程(32)–(34)就大为简化了.

如果我们直接从温-克-布 (W. K. B.) 近似来求频散方程, 则可以看出 (32) — (34) 所确定的简正波所代表的射线意义. 为此, 最方便的是采用布列霍夫斯基赫的简正波场公式 ([1] § 34):

$$\varphi_n = \pi k_0 \sum \frac{(1 + V_2) \varphi_1(z\alpha_l)}{\frac{d}{d\alpha} (1 - V_1 V_2)_{\alpha_l}} H_0^{(1)}(k_0 r \cos \alpha_l) \cos \alpha_l.$$

极点方程为:

$$1 - V_1 V_2 = 0, \quad (35)$$

$V_1, V_2$  为以  $z_0$  为参考界面的, 自  $z < z_0, z > z_0$  的平面波反射系数 (见图 4).

在温-克-布近似下, (35) 写为:

$$2k_0 \int_{z_{m1}}^{z_{m2}} \sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta} dz + \delta = 2l\pi \quad (36)$$

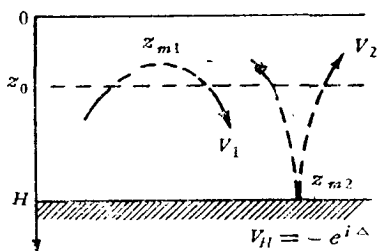


图 4

对图 3 中的甲类射线  $z_{m1}$  由  $n^2(z) - \sin^2 \theta = 0$  确定, 而  $z_{m1} = H$ . 如果设在  $z = H$  的反射系数为  $V_H = e^{i(\Delta + \pi)}$ , 则  $\delta_H = -\frac{\pi}{2} + \Delta + \pi$ .

对乙类射线,  $z_{m1} = 0, z_{m2} = H, \delta_Z = \pi + \Delta + \pi$ .

对丙类射线,  $z_{m1} = 0, z_{m2} = H, \delta_n = \frac{5\pi}{6} + \Delta + \pi$ .

将  $n^2(z) = 1 - 2az$  及  $\delta_H, \delta_Z, \delta_n$  分别代入 (36) 式, 则对甲类射线的频散方程正是方程 (32). 而乙类射线的频散方程正是方程 (33), 丙类射线为 (34).

可以证明, 在图 3 的 (丁) 区中没有极点存在, 在甲区中及丙区中都只有有限个极点, 而在乙区中则有无限多个极点.

#### 四、简正波场

为了得出场强在空间中的分布, 我们只要从简正波场的表示中, 将各号简正波的数值计算出来并作迭加就行了. 但是这需要大量的数值计算工作, 而且也不能了解波场依赖于传播参数的关系.

下面我们将着重对模型 (III) 的情况进行分析. 我们考虑的波场不是离源非常近的, 因此有  $\lambda_l r \gg 1$ , 在 (21) 中将汉克尔函数的渐近式代入

$$\varphi_n = 2\pi i \sum_l \left\{ \frac{\left[ F_1(z) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z) \right] \left[ F_1(z_0) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z_0) \right]}{W(F_1, F_2) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]} \right\}_{\lambda_l} \sqrt{\frac{2\lambda_l}{\pi r}} e^{i(\lambda_l r - \frac{\pi}{4})}, \quad (37)$$

我们将 (37) 式改写为

$$\varphi_n = \frac{\varphi_0}{\sqrt{r}} \sum_l \varphi_l(z) \varphi_l(z_0) e^{i(\lambda_l r - \frac{\pi}{4})}, \quad (38)$$

其中

$$\varphi_l(z) \equiv \frac{\left[ F_1(z) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z) \right] (\lambda_l)^{1/4}}{\left( W(F_1, F_2) - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right] \right)^{1/2}} \quad (39)$$

由于  $\lambda_l$  是复数, 由此各号简正波都带有指数衰减项. 各号简正波的衰减因子  $\beta_l$ :

$$\beta_l = \text{Im } \lambda_l = k_0 \text{Im } \sin \theta_l = k_0 \text{Im } \sqrt{1 - \left( \frac{3a}{k_0} \right)^{2/3} \chi_l^2} \doteq (9k_0 a^2)^{1/3} \chi_l' \chi_l'' \quad (40)$$

其中

$$\chi_l \equiv \left( \frac{K_0}{3a} \right)^{1/3} \cos \theta_l. \quad (41)$$

各号简正波的相角因子  $f_l$ :

$$f_l = r R_l \lambda_l + \arg \varphi_l(z) + \arg \varphi_l(z_0) \quad (42)$$

最后, 简正波场强可表为:

$$I = |\varphi_n|^2 = \frac{\varphi_0^2}{r} \left\{ \left[ \sum_l \sigma_l \sin f_l \right]^2 + \left[ \sum_l \sigma_l \cos f_l \right]^2 \right\}, \quad (43)$$

其中

$$\sigma_l \equiv |\varphi_l(z)| \cdot |\varphi_l(z_0)| \cdot e^{-\beta_l r}. \quad (44)$$

在場的較近距离内, 由于各号简正波的衰减因子均相差很小, 故必需考虑很多号简正波参加場的迭加, 此时我們近似的以求积代求和, 并用越过法估計积分, 則我們得到射綫近似的結果(見附录 II). 保証有非常多号简正波以同等的数量級的幅值参加迭加的条件是  $r\beta_l \ll 1$ , 将其用到  $\beta_l$  最小的那一号简正波上, 我們便得到:

$$r \ll r_0 = \left( \sqrt{\frac{a}{2H} \Delta_2} \right)^{-1} \quad (45)$$

在此区域内我們將使用几何聚焦因子来推算場强. 聚焦因子的公式如下<sup>[1]</sup>:

$$f = \frac{I}{I_0} \doteq \frac{r}{\frac{\partial r}{\partial \alpha_0} \cdot \alpha} \quad (46)$$

在散焦面附近或射綫反轉区附近; (46)式不能用. 在我們所討論的介質参数綫性分布的情况下, 可以得到  $f \doteq 1$ .

在場的足够远的距离上, 基本上只有衰减最小的那号简正波对場有贡献, 这号简正波的衰减因子即給出“波动影区”的場强公式. 由图 3 可見, 这是位于丙区内的极点. 当

$S_n \equiv \frac{1}{3} k_0 H \left( \frac{3a}{k_0} \right)^{1/3} \gg 1$  时, 近似地得到这一号简正波的衰减因子  $\beta_l^* \doteq \sqrt{\frac{a}{2H}} \cdot \Delta_2$ . “波

动影区”的范围由不等式条件  $\frac{e^{-\beta_l^* r_1}}{e^{-\beta_{l+1}^* r_1}} \gg 1$  来規定, 这条件可近似地写成

$$r \gg r_1 = \frac{4H^2 k_0}{\Delta_2}. \quad (47)$$

在場的中間距离范围内, 需要由(43)式中考虑激发較大、衰减因子較小的有限項简正波作迭加.

## 五、結 論 与 討 論

从所作的計算与分析, 我們可以得到波場的图象大致如图 5 所示. 在  $r \ll r_0$  的范围内, 場强按  $\frac{1}{r^2}$  衰减, 在  $r \gg r_1$  时即在場的“波动影区”内, 場强的衰减規律为指数衰减  $\sim \frac{1}{r} e^{-\beta_{1r} r}$ . 而在中間区域由于有限項簡正波的迭加, 会出现复杂的干涉图样.

对于模型(III), 我們得到以层底界反射系数  $\left(\Delta_2 = \frac{-1}{2} \ln |V|\right)$  所表达的下列結果:

$$\left. \begin{aligned} r_0 &= \left( \sqrt{\frac{a}{2H}} \cdot \Delta_2 \right)^{-1}, \\ r_1 &= \frac{4H^2 k_0}{\Delta_2}, \\ \beta_{1r} &= \sqrt{\frac{a}{2H}} \cdot \Delta_2. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

如果底界面的反射性能不很好时, (37) 收敛較快. 而当反射性能較好时收敛較慢.

选用模型(III)来計算場强还是一项嚐試性的工作, 本文并没有討論这样的边界条件所涉及的物理机构問題, 我們知道, 平面波的反射系数一般地是入射角的函数, 但是在某些情况下采取与角度无关的数值反射系数的边界条件, 还是有可能成立的, 例如当折射

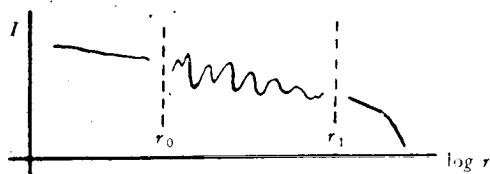


图 5

率非常接近 1 的情况, 或者是我們考虑限定在某一入射角度范围时. 由于模型(III)对  $z > H$  的介质参数不作明确的描写, 而代之以边界上的数值反射系数, 这就有可能迴避了由于  $z > H$  的介质的各种不均匀性給理論上所带来的数学上的困难, 以及实验测定这些参数的技术上的困难. 而实验测定  $z = H$  界面的反射系数是較容易的. 根据实测反射系数, 分別对不同入射角范围将模型(III)的  $\Delta$  采取相应的不同数值, 可能获得更精确的場强結果.

模型(III)所給出的影区的衰减公式有明显的物理意义, 在所討論的情况下, 射綫的最大跨度  $L \doteq 2 \sqrt{\frac{2H}{a}}$  (见图 6), 因此影区的衰减因子  $\beta_{1r} = \sqrt{\frac{a}{2H}} \frac{1}{2} \ln |V| = \frac{\ln |V|}{L}$ , 可以理解為跨度最大的射綫在单位距离上的反射損失.

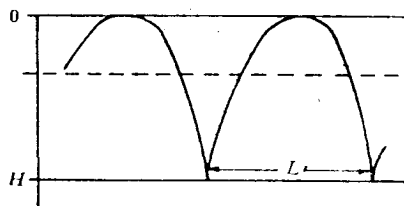


图 6

最后, 作者愿向参加计算工作的唐应吾同志以及给本文很多宝贵意见的汪德昭先生表示感谢。

附录 I,  $\frac{dl}{d\alpha_l}$  与  $\frac{d}{d\lambda_l} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]$  之间的关系

我們設

$$\frac{B_1}{A_1} = e^{i\xi_1}, \quad \frac{B_2}{A_2} = e^{i\xi_2}$$

由极点方程有:

$$\begin{aligned} 2\pi l(\alpha_l) &= \xi_1(\alpha_l) - \xi_2(\alpha_l) \\ \therefore \frac{dl}{d\alpha_l} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{d\xi_1}{d\alpha_l} - \frac{d\xi_2}{d\alpha_l} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

另一方面, 我們来看  $\frac{d}{d\lambda_l} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]$ :

$$\begin{aligned} \frac{dl}{d\lambda_l} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right] &= \frac{d\alpha_l}{d\lambda_l} \cdot \frac{d}{d\alpha_l} (e^{i\xi_1} - e^{i\xi_2}) = \frac{i}{-k_0 \sin \alpha_l} \left( \frac{d\xi_1}{d\alpha_l} e^{i\xi_1} - \frac{d\xi_2}{d\alpha_l} e^{i\xi_2} \right) = \\ &= \frac{i}{-k_0 \sin \alpha_l} e^{i\xi_1(\alpha_l)} \left( \frac{d\xi_1}{d\alpha_l} - \frac{d\xi_2}{d\alpha_l} \right) \dots \end{aligned} \quad (50)$$

由(49)及(50)我們便可得到:

$$2\pi \frac{dl}{d\alpha_l} = i k_0 \sin \alpha_l e^{-i\xi(\alpha_l)} \cdot \frac{d}{d\lambda_l} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right].$$

附录 II, 以求积代求和得到射线近似

引入乘子  $\frac{dl}{d\alpha_l} d\alpha$  将(37)改写为:

$$\varphi_n = 2\pi i \left\{ \frac{\left[ F_1(z_0) + \frac{B_1}{A_1} F_2(z_0) \right] \left[ F_1(z) + \frac{B_2}{A_2} F_2(z) \right]}{W(F_1, F_2) \frac{d}{d\lambda_l} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]} \right\}_{\lambda_l} \sqrt{\frac{2\lambda_l}{\pi r}} e^{i(\lambda_l r - \frac{\pi}{4})} \frac{dl}{d\alpha} d\alpha, \quad (51)$$

如果設  $\lambda = k_0 \sin \theta = k_0 \cos \alpha$ , 考虑到附录 I 中  $\frac{dl}{d\alpha_l}$  与  $\frac{d}{d\lambda_l} \left[ \frac{B_1}{A_1} - \frac{B_2}{A_2} \right]$  之间的关系, 則上式可以改写为四个式子之和,

$$\varphi_n = \varphi_{n_1} + \varphi_{n_2} + \varphi_{n_3} + \varphi_{n_4}$$

其中

$$\varphi_{n_1} = \left\{ \frac{F_1(z_0) F_1(z)}{W(F_1, F_2)} \right\}_{\alpha_l} k_0 \sin \alpha_l e^{-i\xi(\alpha_l)} \sqrt{\frac{2\lambda_l}{\pi r}} e^{i(\lambda_l r - \frac{\pi}{4})} d\alpha_l,$$

$$\varphi_{n_2} = \left\{ \frac{F_2(z_0) F_1(z)}{W(F_1, F_2)} \right\}_{\alpha_l} k_0 \sin \alpha_l e^{-i(\lambda_l r - \frac{\pi}{4})} \sqrt{\frac{2\lambda_l}{\pi r}} d\alpha_l,$$

$$\varphi_{n_3} = \left\{ \frac{F_1(z_0) F_2(z)}{W(F_1, F_2)} \right\}_{\alpha_l} k_0 \sin \alpha_l \sqrt{\frac{2\lambda_l}{\pi r}} e^{i\xi_2 - i\xi_1} e^{i(\lambda_l r - \frac{\pi}{4})} d\alpha_l,$$

$$\varphi_{n_4} = \left\{ \frac{F_2(z_0) F_2(z)}{W(F_1, F_2)} \right\}_{\alpha_l} k_0 \sin \alpha_l \sqrt{\frac{2\lambda_l}{\pi r}} e^{i\xi_2} e^{i(\lambda_l r - \frac{\pi}{4})} d\alpha_l,$$

如果  $|u(z)| \gg 1$ ,  $0 > \arg u > -\pi$ ,  $|u(z_0)| \gg 1$ ,  $0 > \arg u_0 > -\pi$ , 则  $F_1(z)$  与  $F_2(z)$  渐近表式为:

$$F_1(z) = u^{1/3} H_{1/3}^{(1)}(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^{-1/6} e^{i(u - \frac{5}{12}\pi)}, F_2(z) = u^{1/3} H_{1/3}^{(2)} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} u^{-1/6} e^{-i(u - \frac{5}{12}\pi)}.$$

将上式代入  $\varphi_{n1}$ ,  $\varphi_{n2}$ ,  $\varphi_{n3}$ , 和  $\varphi_{n4}$  中, 可得如下积分:

$$\varphi_{n,m} = \int F(z, r, \alpha_l) e^{if_m(r, z, \alpha_l)} d\alpha_l, \quad m = 1, 2, 3, 4.$$

其中,

$$F(z, r, \alpha_l) = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\left(k_0 \frac{2}{\pi}\right)^{3/2} u^{-1/6}(z) u^{-1/6}(z_0)}{W(F_1, F_2)} \sin \alpha_l \sqrt{\cos \alpha_l}, \quad (52)$$

相因子:

$$f_1(\alpha_l, r, z) = k_0 r \cos \alpha_l + u_l(z_0) + u_l(z) - 2u_l(0), \quad (53)$$

$$f_2(\alpha_l, r, z) = k_0 r \cos \alpha_l - u_l(z_0) + u_l(z), \quad (54)$$

$$f_3(\alpha_l, r, z) = k_0 r \cos \alpha_l + u_l(z_0) - u_l(z) + 2u_l(H) - 2u_l(0) + 2\Delta_1(\alpha_l), \quad (55)$$

$$f_4(\alpha_l, r, z) = k_0 r \cos \alpha_l - u_l(z_0) - u_l(z) + 2u_l(H) + 2\Delta_1(\alpha_l). \quad (56)$$

如果  $f'_m(\alpha, r, z) = 0$ , 而  $f''_m(\alpha, r, z) \neq 0$  时, 我们可以得到射线近似. 我们来看稳相点方程:

(i)  $f'_1(\alpha, r, z) = 0$ , 得到

$$r = \frac{1}{a} [(\sin^2 \alpha + 2az)^{1/2} - \sin \alpha + (\sin^2 \alpha + 2az_0)^{1/2} - \sin \alpha] \cos \alpha, \quad (57)$$

(ii)  $f'_2 = 0$ , 得到

$$r = \frac{1}{a} [(\sin^2 \alpha + 2az)^{1/2} - (\sin^2 \alpha + 2az_0)^{1/2}] \cos \alpha, \quad (58)$$

(iii)  $f'_3 = 0$ , 得到

$$r = \frac{1}{a} [2(\sin^2 \alpha + 2aH)^{1/2} - 2\sin \alpha_0 + (\sin^2 \alpha + 2az_0)^{1/2} - (\sin^2 \alpha + 2az)^{1/2}] \cos \alpha + \frac{2\Delta'_1}{a K \sin \alpha}, \quad (54)$$

(iv)  $f'_4 = 0$ , 得到

$$r = \frac{1}{a} [(\sin^2 \alpha + 2aH)^{1/2} - (\sin^2 \alpha + 2az)^{1/2} + (\sin^2 \alpha + 2aH)^{1/2} - (\sin^2 \alpha + 2az_0)^{1/2}] \cos \alpha + \frac{2\Delta'_1}{a K_0 \sin \alpha_0}, \quad (59)$$

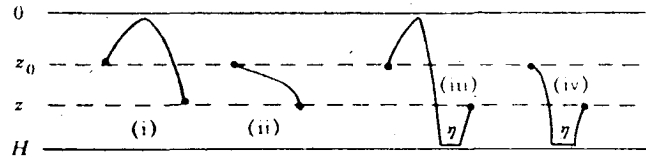


图 7

以上四个稳相点方程相应于图 7 中所划的四类射线的射线方程, 其中  $\eta = \frac{2\Delta_1'}{a K_0 \sin \alpha_0}$  相当于由反射相移引起的位移.

### 参 考 文 献

- [1] Л. М. 布列霍夫斯基赫: 分层介质中的波 (科学出版社出版).
- [2] Pekeris, C. *Geol. Soc. Am. Mem.* 27, Oct. (1948), 15.
- [3] Pekeris, C. *J.A.S.A.* 18, (1946), 295.
- [4] Бреховских, Л. М. и Иванов, И. А., *Акуст. Жур.* I, (1955).
- [5] Газарян, Ю. Л., *Акуст. Жур.* III, 2 (1957), 127.
- [6] Мастеров, Е. П., *Акуст. Жур.* V, 3 (1959), 332.
- [7] Мастеров, Е. П., *Акуст. Жур.* VI, 3 (1960), 335.
- [8] Tolstoy, I., *J.A.S.A.* 32, (1960), 81.
- [9] Tolstoy, I., *J.A.S.A.* 32, (1960), 655.
- [10] William, A. O., *J.A.S.A.* 32, (1960), 363.
- [11] Газарян, Ю. Л., *Акуст. Жур.* IV, 3 (1958), 233.

## АНТИВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ

Шан Эер-чан

Резюме

Рассмотрено поле точечного излучателя, помещенного в плоско-слоистом слое, в котором параметр среды является линейной функцией и не существует упругость деформации сдвига. Теоретически исследовано три типа "антиволноводного" распространения, образованного не полным отражением нижней границы слоя, при условии  $\frac{H}{\lambda} \gg 1$ . В приближении ВКБ для уравнения дисперсии нормальных волн получена лучевая интерпретация. Найдена формула интенсивности поля в эффективной тени, когда краевое условие описано численным коэффициентом отражения:

$$I \sim \frac{1}{r} \exp \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{2H}} \cdot \ln |V| \right]$$

где  $r$  — горизонтальное расстояние от источника,  $a$  — градиент скорости волны,  $H$  — толщина слоя,  $V$  — коэффициент отражения плоской волны на нижней границе слоя.