

弱电流不守恒情况下 $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 过程的几率*

戴 元 本
(中国科学院)

摘 要

利用色散关系研究了弱电流不守恒情况下的 $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 衰变过程。在对 $\pi-\pi$ 散射相移作了一些假定后, 证明了 π, π 中间态的贡献很小。在 $N, \bar{N}$ 中间态项中出现的 $N, \bar{N}$ 湮灭矩阵元用 Chew-Ball 理论及湮灭实验估计, 同时出现的核子弱作用形状因子又用色散关系计算, 证明了 $N, \bar{N}$ 中间态对它的贡献很小, 计算了 π, π 中间态对它的贡献。根据现有 $N, \bar{N}$ 湮灭实验估计, $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 过程的衰变几率 $< 6 \times 10^{-4}$ 秒 $^{-1}$ 。

一、引 言

弱电流守恒的理论目前尚未被实验证实或否定^[1]。如大家所知道的, 如果弱电流守恒, $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 衰变过程的几率可以精确地由微扰论给出。约为 0.43 秒 $^{-1}$ ^[2]。现在实验条件已有可能检验这样数量级的几率的 $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 衰变是否存在, 因此由理论来计算在弱电流不守恒情况下这个过程的几率, 可能有助于确定弱电流是否守恒。本文利用色散关系研究了在弱电流不守恒情况下这个过程的几率。在第二节中讨论了所用的色散关系。第三节中计算了 π, π 和 $N, \bar{N}$ 中间态的贡献; 并把它与 $\pi-\pi$ 散射的相移及 $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$ 的分波湮灭截面联系起来。第四节中得到积分方程的解, 并在对 $\pi-\pi$ 散射相移作了一些假定后, 证明了 π, π 中间态的贡献可以忽略。第五节中利用色散关系计算了在 $N, \bar{N}$ 中间态的贡献中出现的核子弱作用形状因子, 证明了 $N, \bar{N}$ 中间态对这个色散关系的贡献很小, 而 π, π 中间态对这个色散关系的贡献可以用 π, π 中间态对核子电磁形状因子的贡献表示。第六节中利用 Chew-Ball 理论及现有的 $N, \bar{N}$ 湮灭实验结果估计了 $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$ 湮灭过程矩阵元的大小, 由此得出 $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 衰变几率的上限。第七节中讨论了所作的近似及所得的结果。

二、S 矩阵元及色散关系

$\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ 衰变过程的 S 矩阵元为:

$$\langle \pi^0 e \bar{\nu} | \pi^- \rangle = -(2\pi) \bar{u}_e \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v_\nu \langle \pi^0 | V_\mu(0) | \pi^- \rangle \delta^4(\pi^- - \pi^0 - e - \bar{\nu}) \quad (1)$$

其中 $\pi^-, \pi^0, e, \bar{\nu}$ 为相应粒子的动量, 而

* 1960年12月7日收到。

$$V_\mu = i \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_N \gamma_\mu \tau_+ \psi_N \quad (2)$$

为弱电流的矢量部分,由于我們考虑弱电流不守恒的情况,(2)式中沒有包含 π 介子算符的項

$$\sqrt{2}ig[\varphi^* T_+ \nabla_\mu \varphi - (\nabla_\mu \varphi)^* T_+ \varphi]. \quad (3)$$

利用标准的方法可以将矩陣元 $\langle \pi^0 | V_\mu(0) | \pi^- \rangle$ 写为

$$\langle \pi^0 | V_\mu(0) | \pi^- \rangle = \frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega^0}} \int \langle 0 | T(j(x) V_\mu(0)) | \pi^- \rangle e^{-i\pi^0 x} d^4x, \quad (4)$$

其中 $j(x) = -(\square^2 - m^2)\varphi^0$. 在上式中本有包含同时算符的对易子 $\int e^{-i\pi^0 x} \frac{\overleftrightarrow{\partial}}{\partial x_0} [\varphi(x), V_\mu(0)]_{x_0=0} d^3x$ 的項,如果用(2)式中的弱电流表示式,則这个对易子为零. 如果弱电流中还包含有(3)式中的項,則(4)式中还要加上一項对 $\pi^- + \pi^0$ 为一次的項.

由洛伦茲变换、同位旋空間轉动及玻色統計,矩陣元 $\langle \pi^0 | V_\mu(0) | \pi^- \rangle$ 可写为如下的形式:

$$\langle \pi^0 | V_\mu(0) | \pi^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\omega^-\omega^0}} T_\mu(\pi^-, \pi^0) = \frac{1}{\sqrt{4\omega^-\omega^0}} (\pi^- + \pi^0)_\mu T(v), \quad (5)$$

其中 $v = -(\pi^- - \pi^0)^2$, T_μ 的吸收部分为:

$$A_\mu(\pi^-, \pi^0) = (\pi^- + \pi^0)_\mu A(v) = -\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega^-}{2}} \int \langle 0 | [j(x), V_\mu(0)] | \pi^- \rangle e^{-i\pi^0 x} d^4x. \quad (6)$$

容易証明:

$$\int \langle 0 | j(x) V_\mu(0) | \pi^- \rangle e^{-i\pi^0 x} d^4x \equiv 0, \quad (7)$$

$$\text{故} \quad A_\mu(\pi^-, \pi^0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\omega^-}{2}} \int \langle 0 | V_\mu(0) j(x) | \pi^- \rangle e^{-i\pi^0 x} d^4x. \quad (8)$$

$T(v)$ 的色散关系可写为

$$T(v) = \frac{1}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{A(v') dv'}{v' - v - i\epsilon}, \quad (9)$$

由这个色散关系所表示的解析性是严格地証明了的^[3]. 在(9)式中我們假設了在 $v \rightarrow \infty$ 时 $A(v) \rightarrow 0$. Goldberger^[4] 猜测色散关系中是否要用減去决定于哈密頓量中是否包含产生这个过程的直接作用,如果这个猜测是对的,則(9)式成立. 对我們所取的中間态來說,实际計算結果 $v \rightarrow \infty$ 时 $A(v)$ 确实趋于零.

三、吸收部分的計算

取 $\pi^- - \pi^0 = 0$ 的参照系, π, π 中間态对 A_μ 的貢獻为

$$A_{2\pi\mu}(\pi^-, \pi^0) = \frac{1}{4} (2\pi)^{5/2} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \int \langle 0 | V_\mu(0) | \pi\pi' \text{out} \rangle \langle \pi\pi' \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle \\ \times k\omega dQ_{\mathbf{k}} |_{\pi+\pi'=\pi^--\pi^0} + \text{out} \rightarrow \text{in} \text{ 項}, \quad (10)$$

其中 π, π' 分别为中间态负 π 介子和中性 π 介子的动量, $k = \frac{1}{2}(\pi - \pi')$, 不难证明:

$$\langle 0 | V_\mu(0) | \pi\pi' \text{in} \rangle = \frac{1}{\sqrt{4\omega\omega'}} (\pi - \pi')_\mu T(v). \quad (11)$$

矩阵元 $\langle \pi\pi' \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle$ 与 $\pi-\pi$ 散射的费曼振幅 F 以下式相联系:

$$\langle \pi\pi' \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{7/2} \sqrt{2\omega\omega'}} F(v, \cos\theta), \quad (12)$$

其中 v 为质心系的平方总能量, θ 为散射角.

$$F(v, \cos\theta) = \frac{2v^{1/2}}{k} \sum_l e^{i\delta_l} \sin \delta_l (2l+1) P_l(\cos\theta). \quad (13)$$

利用弱反演^[5]可以得到:

$$\langle 0 | V_\mu(0) | \pi\pi' \text{out} \rangle = \pm \langle 0 | V_\mu(0) | \pi\pi' \text{in} \rangle^*, \quad (14)$$

$$\langle \pi\pi' \text{in} | j(0) | \pi^- \rangle = \langle \pi\pi' \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle^*, \quad (15)$$

(15)式中对于 $\mu = 4$ 取“-”号, 对于 $\mu = 1, 2, 3$ 取“+”号. 将(11)–(15)代入(10)式就得到:

$$A_{2\pi} = \text{Re}(T e^{-i\delta_1 \sin \delta_1}). \quad (16)$$

$N, \bar{N}$ 中间态对 A_μ 的贡献为:

$$A_{N\bar{N}\mu} = \frac{1}{4} (2\pi)^{5/2} \sqrt{\frac{\omega}{2}} \sum_{s_1 s_2} \left[\langle 0 | V_\mu(0) | N\bar{N} S_1 S_2 \text{out} \rangle \langle N\bar{N} S_1 S_2 \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle \right. \\ \left. \times P E dQ_{\mathbf{P}} |_{N+\bar{N}=\pi^0 + \text{out} \rightarrow \text{in}} \right] \quad (17)$$

其中 $\mathbf{P} = 1/2(\mathbf{N} - \bar{\mathbf{N}})$. S_1, S_2 分别为中间态核子和反核子的自旋. 矩阵元 $\langle 0 | V_\mu(0) | N\bar{N} S_1 S_2 \text{in} \rangle$ 可表为:

$$\langle 0 | V_\mu(0) | N\bar{N} S_1 S_2 \text{in} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{M^2}{E_1 E_2}} \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{u}_{N\bar{N} S_2} [f_1(v) \gamma_\mu + f_2(v) \gamma_{\mu\nu} (\pi^- - \pi^0)_\nu] u_{NS_1} \quad (18)$$

其中 $\gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$, 矩阵元 $\langle N\bar{N} S_1 S_2 \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle$ 可表为

$$\langle N\bar{N} S_1 S_2 \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle = - \frac{1}{(2\pi)^{7/2}} \sqrt{\frac{2}{\omega^-}} \sqrt{\frac{M^2}{E_1 E_2}} \bar{u}_{N\bar{N} S_1} \left(A + i \gamma \frac{\pi^- - \pi^0}{2} B \right) v_{\bar{N} S_2}, \quad (19)$$

利用弱反演^[5]可以得到:

$$\langle N\bar{N} S_1 S_2 \text{in} | j(0) | \pi^- \rangle = S_1 S_2 \langle N\bar{N} - S_1 - S_2 \text{out} | j(0) | \pi^- \rangle^*, \quad (20)$$

$$\langle 0 | V_\mu(0) | N\bar{N} S_1 S_2 \text{out} \rangle = \pm S_1 S_2 \langle 0 | V_\mu(0) | N\bar{N} - S_1 - S_2 \text{in} \rangle^*, \quad (21)$$

将(18)–(21)代入(17), 并忽略掉一些 P^2/E^2 项就得到

$$A_{N\bar{N}}(v) = \frac{1}{4\pi^3} \frac{P}{v^{1/2}} \frac{M^2}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{P}{qM} \text{Re} [A_1(f_1 + f_2 v^{1/2})^*] - \text{Re} [B_0(f_1 + f_2 v^{1/2})^*] \right\}, \quad (22)$$

其中 A_l, B_l 由下式决定:

$$A = \Sigma(2l+1) A_l P_l(\cos\theta), \\ B = \Sigma(2l+1) B_l P_l(\cos\theta), \quad (23)$$

而 $\mathbf{q} = 1/2(\pi^- - \pi^0)$.

我們用 $N + \bar{N} \rightarrow \pi^0 + \pi^-$ 湮灭过程的費曼振幅 M 来表示 $A_{N\bar{N}}$,

$$M \equiv \langle \pi^- \pi^0 \text{out} | m | N \bar{N} S_1 S_2 \text{in} \rangle = -\bar{v}_{N S_2} \left(A + i \gamma \frac{\pi^- - \pi^0}{2} \hat{B} \right) u_{N S_1}, \quad (24)$$

引入分波湮灭振幅 $^{2s+1}M_{il}$:

$$^{2s+1}M_{il} = \langle \pi^- \pi^0 \text{out} | m | P j l \text{sin} \rangle, \quad (25)$$

其中 j, l, s 分别为总动量矩、軌道矩与总自旋, 在忽略 $\frac{P^2}{E^2}$ 項后經過一些計算可以得到

$$\frac{P}{Mq} A_1 - B_0 = \frac{1}{\sqrt{8\pi} q P} {}^3M_{10}, \quad (26)$$

湮灭截面 σ 为

$$\sigma = \frac{q}{4P^3} \frac{M^2}{v} \sum_{il} |^{2s+1}M_{il}|^2 = \sum_{il} {}^{2s+1}\sigma_{il}, \quad (27)$$

将(26)(27)代入(22), 并令 $^{2s+1}\eta_{il}$ 为 $^{2s+1}M_{il}$ 的相角, 即得

$$A_{N\bar{N}} = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{7/2}} M \sqrt{\frac{P^3}{q^3} \sigma_{10}} \cdot \text{Re}[(f_1^* + f_2^* v^{1/2}) e^{i^3 \eta_{10}}], \quad (28)$$

四、积分方程的解

将 π, π 和 $N, \bar{N}$ 中間态对吸收部分的贡献代入色散关系(9)就得到如下的积分方程:

$$T(v) = f(v + i\epsilon) + \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Re}(T e^{-i\delta_1 \sin \delta_1})}{v' - v - i\epsilon} dv', \quad (29)$$

其中

$$f(v) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{N\bar{N}}(v')}{v' - v} dv'. \quad (30)$$

$\pi-\pi$ 散射相移在高能时为复数, 但我們假设 $T(v)$ 在高能时减小很快, 使非弹性散射显著的能量区域在(29)式的积分中贡献很小, 此时可以把 δ_1 当做实数, 以后我們并将假设 δ_1 只在 $v < 4M^2$ 的某个共振带附近显著地不等于零. 容易看到, 在 $v < 4M^2$ 时 $T e^{-i\delta_1 \sin \delta_1}$ 是实数, 所以(29)式中的 Re 符号可以取消, 此时(29)式与 Omnès 研究过的方程^[6] 非常相似, 唯一的差别为现在 $f(v)$ 在 $v > 4M^2$ 处有一条割綫.

$$\text{令} \quad F(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{T(v') h^*(v')}{v' - v} dv' \quad (31)$$

$$h(v) = e^{i\delta_1 \sin \delta_1} \quad (32)$$

$$\text{則} \quad T h^* = F_+ - F_- \quad (v > 4m^2) \quad (33)$$

其中 F_+, F_- 为 F 在割綫上、下沿的值, 而(29)式可写为

$$\exp[-2i\delta_1] F_+ - F_- = f_+ h^*. \quad (34)$$

$$\text{令} \quad F = \Phi \Omega, \text{ 其中 } \Omega \text{ 服从} \quad (35)$$

$$\exp[-2i\delta_1] \Omega_+ - \Omega_- = 0, \quad (36)$$

Ω 可取为

$$\Omega = \exp[u(v)], \quad (37)$$

其中
$$u(v) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\delta_1(v') dv'}{v' - v}. \quad (38)$$

由(34)---(38)得到

$$\Phi_+ - \Phi_- = f_+ h^* / Q_- = f_+ \sin \delta_1 \exp[-\rho(v)] \quad (39)$$

$$\rho(v) = \frac{1}{\pi} P \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\delta_1(v')}{v' - v} dv', \quad (40)$$

(39)式的解为

$$\Phi(v) = \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{f_+(v') \sin \delta_1(v') \exp[-\rho(v')]}{v' - v} dv', \quad (41)$$

上式中的积分可以由考虑如下的路积分 J 而计算出来:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_c \frac{f(v') \exp[-u(v')]}{v' - v} dv', \quad (42)$$

其中 c 为包含半径为 ∞ 的圆及割线上下沿的积分路线. 计算结果为

$$\Phi(v) = \frac{i}{2} f(v) \exp[-u(v)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{N\bar{N}} \exp[-\rho + i\delta_1]}{v' - v} dv', \quad (43)$$

而
$$Th^* = Q_+ \Phi_+ - Q_- \Phi_- = \theta(v - 4M^2) \frac{1}{2} (\exp 2i\delta_1(v) - 1) A_{N\bar{N}}(v) + \frac{1}{\pi} P \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{N\bar{N}}(v') \exp[-\rho(v') + i\delta_1(v')]}{v' - v} dv' \exp \rho(v) \sin \delta_1(v) \quad (v > 4m^2), \quad (44)$$

上式与 δ_1 在 高能时的值有关, 我们假设非弹性散射显著以前 $A_{N\bar{N}}$ 已经减小, 并且假设 $\sin \delta_1$ 只在 $v \sim v_r \ll 4M^2$ 处有一个“宽度”为 Γ 的共振峰, 其余处 $\sin \delta_1$ 都很小, 在 $v < v_r - \Gamma$ 时 $\delta \simeq \pi$, 在 $v > v_r + \Gamma$ 时 $\delta \simeq 0$. 此时(44)式可近似地改写为

$$Th^* = \frac{1}{\pi} \exp(\rho) \sin \delta_1 \cdot P \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{N\bar{N}}(v') \exp[-\rho(v')]}{v' - v} dv', \quad (45)$$

而在 $v > 4M^2$ 的区域,

$$\exp \rho \simeq \exp \left[\frac{1}{\pi} P \int_{4m^2}^{v_r} \frac{\pi dv'}{v' - v} \right] = \left| \frac{v_r - v}{v - 4m^2} \right| \simeq 1, \quad (46)$$

因此

$$Th^* \simeq \exp(\rho) \sin \delta_1 f(v). \quad (47)$$

在 $v = v_r$ 时, $\exp \rho$ 的值估计如下: 在 $v = v_r$ 附近, $\sin \delta_1$ 可表为

$$\sin \delta_1 = \frac{\Gamma/2}{\sqrt{(v - v_r)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}, \quad (48)$$

如果忽略 Γ 随 v 的变化, 则有

$$\left| \frac{d\delta_1}{dv} \right| \leq \frac{2}{\Gamma}, \quad (49)$$

利用上式得:

$$\exp \rho(v_r) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{v_r - \Gamma} \frac{\pi dv'}{v' - v_r} + \frac{1}{\pi} P \int_{v_r - \Gamma}^{v_r + \Gamma} \frac{\delta_1(v')}{v' - v_r} dv' \right]$$

$$= \frac{\Gamma}{v_r - 4m^2} \exp \left[\frac{1}{\pi} P \int_{v_r - \Gamma}^{v_r + \Gamma} \frac{\delta_1(v')}{v' - v_r} dv' \right] \leq \frac{\Gamma}{v_r - 4m^2} \exp \left(\frac{2}{\pi} \right) \quad (50)$$

将(47)及(50)式代入(29)式, 知 π, π 中间态对于 $T(0)$ 的贡献小于

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{v_r} f(v_r) \leq \frac{\Gamma}{v_r - 4m^2} \exp \left(\frac{2}{\pi} \right), \quad (51)$$

因 $f(v_r) \simeq f(0)$, 如 $\frac{\Gamma}{v_r} \ll 1$, 则此项远较 $f(0)$ 为小. 故 π, π 中间态的贡献可以忽略.

$$T(0) \simeq f(0) = \frac{1}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{A_{N\bar{N}}(v')}{v'} dv'. \quad (52)$$

一般说来, (41)式的右方可以加上任意的多项式, 我们所取的解在展开为耦合常数的级数时与微扰论符合.

五、 f_1 和 f_2 的色散关系

$\frac{f_1(v)}{f_1(0)}$ 和 $\frac{f_2(v)}{f_2(0)}$ 可以称为核子弱作用形状因子, 由(18)式可以知道, $f_1(0) = -g_V$, g_V 是 β 衰变的矢量耦合常数. 在(30)式中需要的是 $v \geq 4M^2$ 时的 f_1, f_2 值, 我们用色散关系估计它们的数值.

矩阵元 $\langle 0 | V_\mu(0) | N\bar{N} \rangle$ 的吸收部分 A'_μ 为

$$A'_\mu = -\frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{M}{E}} \int \bar{v}_{\bar{N}} \langle 0 | [V_\mu(0), Q(x)] | N \rangle e^{i\bar{N}x} d^4x \quad (53)$$

其中 $Q = \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + M \right) \psi. \quad (54)$

令 $A'_\mu = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M}{E} \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{v}_{\bar{N}} [\phi_1 \gamma_\mu + \phi_2 \gamma_{\mu\nu} (N + \bar{N})_\nu] u_N, \quad (55)$

则 f_1 和 f_2 的色散关系可写为

$$f_1 = -g_V + \frac{v}{\pi} \int \frac{\phi_1(v') dv'}{v'(v' - v)} \quad (56)$$

$$f_2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{\phi_2(v') dv'}{v' - v} \quad (57)$$

$N, \bar{N}$ 中间态对 A'_μ 的贡献为

$$A'_{N\bar{N}\mu} = \frac{1}{4} (2\pi)^{5/2} \sqrt{\frac{M}{E}} \int \bar{v}_{\bar{N}S_2} \sum_{S'_1 S'_2} \langle 0 | V_\mu(0) | N' \bar{N}' S'_1 S'_2 \text{out} \rangle \langle N' \bar{N}' S'_1 S'_2 \text{out} |$$

$$\times Q(0) | N_1 S_1 \rangle \frac{PE}{2} d\Omega_{\mathbf{P}'} + \text{out} \rightarrow \text{in} \text{ 项}. \quad (58)$$

计算结果在忽略掉一些 $\frac{P^2}{E^2}$ 项以后得到:

$$\phi_{1N\bar{N}} = \sqrt{\frac{3\sigma_{10}^{(j)}}{\pi}} P [\text{Re} f_1 \cos^3 \varphi_{10} + \phi_1 \sin^3 \varphi_{10}], \quad (59)$$

$$\phi_{2N\bar{N}} = \sqrt{\frac{{}^3\sigma_{10}^{(f)}}{\pi}} P [\text{Re} f_2 \cdot \cos {}^3\varphi_{10} + \phi_2 \sin {}^3\varphi_{10}], \quad (60)$$

其中 ${}^3\sigma_{10}^{(f)}$ 及 ${}^3\varphi_{10}^{(f)}$ 为 3S_1 态中子—反质子散射的分波截面及费曼振幅的相。

在 Chew-Ball 理論^[7]中

$${}^3\sigma_{10}^{(f)} = \frac{\pi}{4P^2}, \quad {}^3\varphi_{10} = \frac{\pi}{2} \quad (61)$$

对于低动量矩的分波, Chew-Ball 理論可以用于相当高的能量区, 在低能区 ($v^{1/2} - 2M < 25\text{Mev.}$) Chew-Ball 理論不能应用, 但我們將忽略这一小区域中的差别, 所以我們有:

$$\begin{aligned} \phi_{N\bar{N}1} &= \frac{1}{2} \phi_1 \\ \phi_{N\bar{N}2} &= \frac{1}{2} \phi_2 \\ (v > 4M^2) \end{aligned} \quad (62)$$

除 $N, \bar{N}$ 态以外, 我們將只考虑 π, π 中間态的貢獻, 由以后的討論可以看到, 在 $v > 4M^2$ 的区域, π, π 中間态对 ϕ_1, ϕ_2 的貢獻很小, 所以由(62)可知 $N, \bar{N}$ 中間态的貢獻可以忽略。

π, π 中間态对 f_1 和 f_2 的貢獻項也包含矩陣元 $N + \bar{N} \rightarrow 2\pi$, 但主要是在这个过程的非物理区中。这一項我們利用它和同位旋矢量部分核子电磁形状因子 F_1 和 F_2 的色散关系中相应的項的类似来計算。 F_1 和 F_2 满足下列色散关系:

$$F_1 = \frac{e}{2} + \frac{v}{\pi} \int \frac{g_1(v')}{v'(v' - v)} dv', \quad (63)$$

$$F_2 = \frac{1}{\pi} \int \frac{g_2(v')}{v' - v} dv', \quad (64)$$

g_1, g_2 由下式决定:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (2\pi)^{5/2} \sqrt{\frac{M}{E}} \int \bar{u}_{N'} \langle 0 | j_\mu(0) | \pi^- \pi^+ \rangle \langle \pi^- \pi^+ | Q(0) | N \rangle \frac{k\omega}{2} d\Omega_k = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M}{E} i \bar{u}_{N'} [g_1 \gamma_\mu + g_2 \gamma_{\mu\nu} (N - N')_\nu] u_N, \end{aligned} \quad (65)$$

其中 j_μ 为电流密度的同位旋矢量部分, 而 ϕ_1, ϕ_2 由下式决定:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} (2\pi)^{5/2} \sqrt{\frac{M}{E}} \int \bar{v}_{\bar{N}} \langle 0 | V_\mu(0) | \pi^- \pi^0 \rangle \langle \pi^- \pi^0 | Q(0) | N \rangle \frac{k\omega}{2} d\Omega_k = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{M}{E} \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{v}_{\bar{N}} [\phi_1 \gamma_\mu + \phi_2 \gamma_{\mu\nu} (N + \bar{N})_\nu] u_N, \end{aligned} \quad (66)$$

$$\text{而} \quad \langle 0 | j_\mu^V(0) | \pi^- \pi^+ \rangle = (\pi^- - \pi^+)_\mu \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega\omega'}} eF_\pi(v). \quad (67)$$

比較(65)(66)并利用同位旋守恒我們得到:

$$\phi(v) = \frac{2(2\pi)^3 T(v)}{eF_\pi(v)} g(v), \quad (68)$$

我們近似地令

$$T(v) \simeq T(0)F_{\pi}(v), \quad (69)$$

如果在 $T(v)$ 和 $F_{\pi}(v)$ 的减去的色散关系中只取 π, π 中间态, 则

$$T(v) = T(0) + \frac{v}{\pi} \int \frac{\text{Re}(F e^{-i\delta_1} \sin \delta_1)}{v'(v' - v)} dv', \quad (70)$$

$$F_{\pi}(v) = 1 + \frac{v}{\pi} \int \frac{\text{Re}(F_{\pi} e^{-i\delta_1} \sin \delta_1)}{v'(v' - v)} dv'. \quad (71)$$

在(70)和(71)的情况下(69)式成立, 在 T 和 F_{π} 的减去的色散关系中 $N, \bar{N}$ 态的贡献不及在上面所用的未减去的色散关系中重要, 所以(69)式可能不是很坏的近似. 由(68)、(69)有

$$\phi(v) = \frac{2}{e} g(v)(2\pi)^3 T(0), \quad (72)$$

由(56)、(57)、(63)、(64)、(72)有:

$$\begin{aligned} f_1 + g_v &= \frac{2}{e} (2\pi)^3 T(0) \left(F_1 - \frac{e}{2} \right), \\ f_2 &= \frac{2}{e} (2\pi)^3 T(0) F_2. \end{aligned} \quad (73)$$

利用上两式及 Bowcock^[8] 等关于核子结构的工作结果, 我们得到:

$$\text{Re} f_1 = -(2\pi)^3 T(0) \frac{av}{v_r - v} - g_v \quad (74)$$

$$\text{Re} f_2 = (2\pi)^3 T(0) \frac{\mu^v}{M} \left(1 - \frac{bv}{v_r - v} \right), \quad (75)$$

$$\phi_1 \simeq \phi_2 \simeq 0, \quad \text{当 } v \geq 4M^2; \quad (76)$$

如果 $a = b = 1.2$, $v_r = 22.4m^2$ ^[8], 则

$$f_1(4M^2) + 2Mf_2(4M^2) \simeq -g_v - 2.2(2\pi)^3 T(0). \quad (77)$$

六、跃迁几率的计算

根据 Chew-Ball 理论^[7] 湮灭成两个 π 介子的分波截面 $^3\sigma_{10}$ 为

$$^3\sigma_{10} = \frac{3\pi R^2}{4 P^2}, \quad (78)$$

其中 R^2 为产生两个 π 介子的分枝比. 由(72)、(28)、(30)、(52)我们得到

$$T(0) = \frac{\sqrt{3} M}{8\pi^4} \int_{4M^2}^{\infty} \frac{R(v' - 4M^2)^{1/2} \text{Re}(f_1 + f_2 v'^{1/2}) \cos^3 \eta_{10}}{v'^{7/4}} dv'. \quad (79)$$

为了估计(77)式中的积分, 我们近似地将积分中的 $\text{Re}(f_1 + f_2 v^{1/2}) \cos^3 \eta_{10}$ 以它在 $v = 4M^2$ 时的值代替, R 大体上为随 v 增加而减小的函数, 也以其在 $v = 4M^2$ 时的值 R_0 代替, 于是得到

$$T(0) = 2.0 \times 10^{-3} \text{Re}[f_1(4M^2) + 2Mf_2(4M^2)] \cos^3 \eta_{10} \cdot R_0. \quad (80)$$

将(77)代入(80), 得到

$$T(0) = - \frac{A g_v}{1 + 2.2(2\pi)^3 A}, \quad (81)$$

其中

$$A = 2.0 \times 10^{-3} R_0 \cos^3 \eta_{10}. \quad (82)$$

R_0 的数值可由实验估计, 根据现有的实验^[9] H 中的湮灭事例共有 216 个, 其中 81 个是反质子静止的情况, 其余 135 个是能量约为 80 兆电子伏的情况, $\bar{P}n$ 湮灭事例有 40 个, 大都是在飞行中湮灭, 其中没有发现产生两个 π 介子的事例. 我们假设在很低能量时只有 3S_1 及 1S_0 态可以湮灭, 在能量为 80 兆电子伏左右时总分波湮灭截面由 Chew-Ball 理论决定, 注意到由 G 变换不变, 只有 $(-1)^{S+I} = +1$ 的态可以产生两个 π 介子^[10], I 为总同位旋, 并假设除选择规则 $(-1)^{S+I} = +1$ 外, R 与总同位旋及总动量矩的关系不大, 结果得到

$$R_0 < \frac{1}{12}. \quad (83)$$

由(81)、(82)、(83)近似地有

$$T(0) \simeq -Ag_V = -2.0 \times 10^{-3} R_0 \cos^3 \eta_{10} g_V \leq 0.16 \times 10^{-3} g_V, \quad (84)$$

跃迁几率为

$$W = (4\pi)^3 T^2 \left(\frac{1}{30} \Delta^5 - \frac{1}{3} m_e^2 \Delta^3 \right), \quad (85)$$

其中 $\Delta = m^- - m^0$, 将(84)代入(85)就得到

$$W < 6 \times 10^{-4} \text{ 秒}^{-1}, \quad (86)$$

这个数值比弱电流守恒的情况小三个数量级.

七、讨 论

我们对 f_1 和 f_2 的计算比较粗糙, 但实际上我们只是利用色散关系估计了 $f_1(v) - f_1(0)$ 和 $f_2(v)$ 的数量级, 而如我们的结果所示, 这个修正的影响是可以忽略的, 所以可以认为即使较精确地计算 f_1 和 f_2 , 也不会使 W 的数值有多大的改变. 此外, 我们忽略了超子、反超子中间态的贡献, 如果超子和轻子没有直接的弱作用或作用常数较小, 象超子的 β 衰变实验所表现的那样, 则这个中间态的贡献应较小, N 、 $\bar{N}$ 、 π 中间态的贡献不一定很小, 但似乎不会改变 W 的数量级. 此外, 如果我们不用 Chew-Ball 理论而用微扰论来计算 $N + \bar{N} \rightarrow \pi + \pi$ 的矩阵元, 结果 $W \sim 3 \text{ 秒}^{-1}$, 所以微扰论在这里是完全错误的. 如前面已指出的, 因为我们的问题只牵涉到 S 波的湮灭和散射, Chew-Ball 理论可望适合于相当高的能量.

最后应注意到本文中的问题与核子和 π 介子的电磁结构问题是很相似的, 唯一的差别是 π 介子和电磁场有直接作用. 在核子、 π 介子的电磁结构问题中还没有象本文这样完全地考虑 π 、 $\bar{\pi}$ 和 N 、 $\bar{N}$ 中间态的贡献, 因此利用类似的方法于核子、 π 介子的电磁结构问题可能是有意义的.

作者感谢张宗燧先生和何祚庥同志的讨论.

参 考 文 献

- [1] Feynman, R. P.: 在 1960 年 Rochester 高能物理会议上的报告.
- [2] Feynman, R. P. and Gell-mann, M.: *Phys. Rev.* **109** (1958), 193.
- [3] Oehme, R.: *Nuov. Cim.* **4** (1956), 1316. Oehme, R.: *Phys. Rev.* **100** (1955), 1503.
- [4] Goldberger, M. L.: Proceedings of Geneva Conference (1958).
- [5] Matthews, P. T.: The Relativistic Quantum Theory of Elementary Particle Interactions.
- [6] Omnès, R.: *Nuov. Cim.* **8** (1958), 136.
- [7] Ball, J. S. and Chew, G. F.: *Phys. Rev.*, **109** (1958) 1335.
- [8] Bowcock, J. Cottingham, W. N. and Lurié, D.: *Nuov. Cim.* **16** (1960), 918.
- [9] Segré, E.: 在 1959 年基輔高能会议上的报告.
- [10] Gobel, C.: *Phys. Rev.* **103** (1956), 258.

THE PROBABILITY OF $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ DECAY IN THE CASE OF NON-CONSERVED WEAK CURRENT

DAI YUAN-BEN
(Academia Sinica)

ABSTRACT

The probability of $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ decay in the case of non-conserved weak current is calculated with dispersion relation. After making certain assumptions about the $\pi - \pi$ scattering phase shift, it is shown that the contribution of the $\pi - \pi$ intermediate state is small. The matrix element of $N - \bar{N}$ annihilation appearing in the contribution of the $N, \bar{N}$ intermediate state is estimated with the theory of Chew-Ball and the experiments for annihilation. The weak interaction form-factors of the nucleon appearing in the same term is again calculated with dispersion relations. The contribution of the $N, \bar{N}$ intermediate state in these dispersion relations is shown to be small and that of the π, π intermediate state is calculated by relating it with the corresponding terms in the dispersion relations for the nucleon electromagnetic form-factors. Based on the present experimental data, it is estimated that the probability of $\pi^- \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu}$ decay is less than $6 \times 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.