

具有圓柱內导体的矩形及槽形 綫的工作特性*

林 为 干

提 要

利用橢圓函数, 可将具有圓柱中心內导的矩形传输綫变换成外导体为圓柱面而內导体則近似地为圓柱面的同軸綫, 然后利用圓柱諧波的有限多項, 选取各个諧波的值, 以使外圓柱面上的边界条件得到滿足, 而內圓柱面上的边界条件則只在有限多个点上成立, 即解决了具有中心內导体的矩形綫的一个传输綫問題。同样地, 利用三角函数, 即可处理具有中心內导体的槽形传输綫: 轉換成为接地平面与平行放置的近似圓柱面的一个布置, 然后利用双极坐标的变换, 用有限多項的直角坐标諧波以解决此具有中心圓柱体的槽形綫問題。当此槽形綫底部与中心圓柱的軸綫間的距离趋于无限大时, 我們即得到人們所熟知的两平板間具有中心內导体的传输綫的結果。

內外导体都是矩形的传输綫作为同軸綫及带状綫間的阻抗变换器及作为高频功率传输綫时的特性阻抗的問題, 最近有人进行了研究^[1], 但內导体为同軸圓柱导体的矩形綫可以起同样的作用, 或起更好的作用, 本文首先将研究这样的矩形綫的特性阻抗及其最大传输功率, 然后研究槽形綫。試取^[2]

$$z = \frac{\operatorname{sn}\left(\frac{K\omega}{a}, k\right) \operatorname{dn}\left(\frac{K\omega}{a}, k\right)}{\operatorname{cn}\left(\frac{K\omega}{a}, k\right)} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}\left(\frac{2K\omega}{a}, k\right)}{1 + \operatorname{cn}\left(\frac{2K\omega}{a}, k\right)}}, \quad (1)$$

其中雅各比橢圓函数 $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ 及 $\operatorname{dn} u$ 是定义如下:

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}} = \operatorname{sn}^{-1}(x, k) = F(\varphi, k), \\ x &= \operatorname{sn}(u, k) = \sin \varphi, \\ \operatorname{cn}(u, k) &= \sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(u, k)} = \cos \varphi, \\ \operatorname{dn}(u, k) &= \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2(u, k)}, \end{aligned} \quad (2)$$

k 是模数, 而 K 則是完全橢圓积分:

$$K = K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right). \quad (3)$$

如定义

$$k' = \sqrt{1 - k^2}, \quad (4)$$

* 1961年8月18日收到。

則又得到

$$K' = K'(k') = F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right). \quad (5)$$

(1) 將 ω 平面上的矩形 $|\operatorname{Re}(\omega)| < a/2$, $|\operatorname{Im}(\omega)| < b/2$ 變換成 z 平面上的單位圓 $|z| < 1$, 如图 1 所示. 因為由(1)可見^[2],

$$\begin{aligned} |z|^2 = |x + jy|^2 &= \frac{\left| \operatorname{sn}\left(\frac{\kappa u + j\kappa v}{a}, k\right) \right|^2 \left| \operatorname{dn}\left(\frac{\kappa u + j\kappa v}{a}, k\right) \right|^2}{\left| \operatorname{cn}\left(\frac{\kappa u + j\kappa v}{a}, k\right) \right|^2} = \\ &= \frac{1 - \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa u}{a}, k\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa v}{a}, k'\right)}{1 + \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa u}{a}, k\right) \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa v}{a}, k'\right)}, \end{aligned} \quad (6)$$

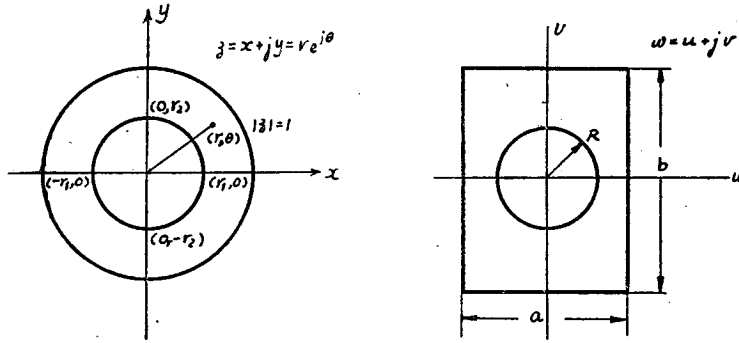


图 1

故由(6)可見, 當 $\omega = \pm \frac{a}{2} + jv$ 時,

$$|z|^2 = \frac{1 - \operatorname{cn}(\pm \kappa, k) \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa v}{a}, k'\right)}{1 + \operatorname{cn}(\pm \kappa, k) \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa v}{a}, k'\right)} = 1; \quad (7)$$

因為 $\operatorname{cn}(K, k) = 0$, 又由(6)可見, 當 $\omega = u \pm j b/2$ 時,

$$|z| = \frac{1 - \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa u}{a}, k\right) \operatorname{cn}\left(K \frac{b}{a}, k'\right)}{1 + \operatorname{cn}\left(\frac{2\kappa u}{a}, k\right) \operatorname{cn}\left(K \frac{b}{a}, k'\right)} = 1, \quad (7)'$$

只要

$$\frac{K'}{K} = \frac{b}{a}, \quad (8)$$

因為 $\operatorname{cn}(K', k') = 0$. 此(8)式即定義出模數 k . 不失去任何一般性. 我們可取

$$b \geq a. \quad (9)$$

解析函數(1)將 ω 平面上的矩形變換成 z 平面上的單位圓, ω 平面上的圓將近似地變換成 z 平面上的一个圓; 如果 ω 平面上的圓的半徑 R 足夠小的話^[3], 因而具有圓柱內導體

的矩形线的一个静电问题的解, 可以从外导体是正圆柱体, 内导体接近于正圆柱体的一个同轴线问题的解得到. 在 z 平面上, 由问题的对称性, 可知静电位函数必须为下列圆柱谐波的迭加^[4]:

$$U = A_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} (A_{2n} r^{2n} + B_{2n} r^{-2n}) \cos 2n \theta. \quad (10)$$

应用已有的近似方法^[4,5], 我们将使问题的边界条件在外导体上完全成立, 而在内导体上只在四个点上成立(内导体截面接近于一个圆), 即是说, 我们令

$$A_{2n} = B_{2n} = 0, \quad n \geq 2, \quad (11)$$

而且取

$$U = 0, \quad r = 1, \quad (12)$$

及

$$U = U_0, \quad r = r_1, \quad \theta = 0 \text{ 或 } \pi; \text{ 及 } r = r_2, \quad \theta = \pi/2 \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}, \quad (13)$$

其中 z 平面上的 $r = 1$ 圆相当于 ω 平面上的矩形周界, 而点 $(r_1, 0)$, (r_1, π) , $(r_2, \pi/2)$ 及 $(r_2, \frac{3\pi}{2})$ 分别相当于 ω 平面上的 $\omega = \pm R$, $\pm jR$ 诸点, 其中 r_1 及 r_2 可由(1)定出如下:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{\operatorname{sn}(\alpha K, k) \operatorname{dn}(\alpha K, k)}{\operatorname{cn}(\alpha K, k)} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}(2\alpha K, k)}{1 + \operatorname{cn}(2\alpha K, k)}}, \\ r_2 &= \frac{\operatorname{sn}(\alpha K, k') \operatorname{dn}(\alpha K, k')}{\operatorname{cn}(\alpha K, k')} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cn}(2\alpha K, k')}{1 + \operatorname{cn}(2\alpha K, k')}}, \\ \alpha &= \frac{R}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

应用(11), (12)及(13), 我们即可得到近似解的最后形式为

$$U = A_0 \log r + A_2(r^2 - 1/r^2) \cos 2\theta, \quad (15)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{(1/r_2^2 - r_2^2) + (1/r_1^2 - r_1^2)}{(1/r_2^2 - r_2^2) \log \frac{1}{r_1} + (1/r_1^2 - r_1^2) \log \frac{1}{r_2}} U_0, \\ A_2 &= \frac{\log r_1/r_2}{(1/r_2^2 - r_2^2) \log \frac{1}{r_1} + (1/r_1^2 - r_1^2) \log \frac{1}{r_2}} U_0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

而电位函数(15)又可取作如下复数电位函数的实部:

$$W = U + jV = A_0 \log z + A_2(z^2 - 1/z^2), \quad (17)$$

因而我们即可得到通量函数如下

$$V = A_0 \theta + A_2(r^2 + 1/r^2) \sin 2\theta, \quad (18)$$

从而可以求得所求的传输线每单位长的电容为^[4]

$$c'_0 = \frac{|Q|}{|U_2 - U_1|} = \frac{\epsilon[V]}{U_0} = 2\pi\epsilon \frac{A_0}{U_0} = 2\pi\epsilon \frac{(1/r_2^2 - r_2^2) + (1/r_1^2 - r_1^2)}{(1/r_2^2 - r_2^2) \log \frac{1}{r_1} + (1/r_1^2 - r_1^2) \log \frac{1}{r_2}}, \quad (19)$$

其中 ϵ 是传输线内外导体间的空间所用的媒质的介电常数。

最后我们即得到所求的传输线的特性阻抗为

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{c_0} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{2\pi} \frac{U_0}{A_0} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1/r_2^2 - r_2^2 + 1/r_1^2 - r_1^2}{\left(\frac{1}{r_2^2} - r_2^2\right) \log \frac{1}{r_1} + \left(\frac{1}{r_1^2} - r_1^2\right) \log \frac{1}{r_2}}, \quad (20)$$

其中 μ 是线所用的媒质的导磁系数, 而 r_1 及 r_2 则由(14)给出。

当 $b \rightarrow \infty$, 故 $K' \rightarrow \infty$, $K = \pi/2$, $k = 0$, $k' = 1$, 而 $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, $\text{dn}(u, k)$, $\text{sn}(u, k')$, $\text{cn}(u, k')$ 及 $\text{dn}(u, k')$ 分别变为 $\sin u$, $\cos u$, 1 , $\tanh u$, $\text{sech } u$ 及 $\text{sech } u$, 因而 $r_1 = \tan \frac{\alpha\pi}{2}$, $r_2 = \tanh \frac{\alpha\pi}{2}$, 这一个情形已经有人研究过^[5], 并且得出了数字结果, 其准确度约为 0.1 欧, 当 $z_0 = 50$ 欧。对于有限值的 b/a 的情形, (20) 应该给出较高的准确度, 因为 z 平面上相当于 ω 平面上电位为 U_0 的圆柱体 $|W| = R$ 的等位面 $U = U_0$ 将随着 $b/a \geq 1$ 的值的减小而更接近于一正圆柱体, 因而(15)的解就更准确, 在(15)中我们只保留了一个圆柱谐波。

当 $b/a = 1$, 故 $k = k' = 1/\sqrt{2}$, $K = 1.8541$ 及 $\frac{b}{a} = \frac{K'}{K} = 1.9923 \approx 2$, 即 $k = \sin 10^\circ$, $k' = \sin 80^\circ$ 时的线的特性阻抗已经算出, 并绘成如图 2 的曲线, 同时还画出平板传输线即 $b/a = \infty$ 时的特性阻抗(从[5]得来), 以资比较。

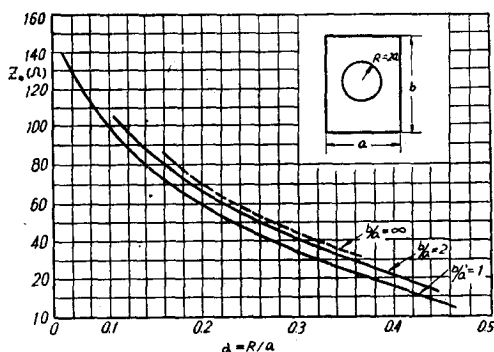


图 2

当我们所研究的矩形线是用来传送高频功率时, 我们要求知道它的最大传输功率。首先, 我们求出在线中的电位梯度的绝对值为

$$\begin{aligned} E &= \left| \frac{dW}{d\omega} \right| = \left| \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\omega} \right| = \frac{KA_0}{a} \left| \frac{1}{z} \left\{ 1 + \frac{2A_2}{A_0} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right\} \right| \times \\ &\times \left\{ \frac{z^2}{\text{sn}^2 \left(\frac{K\omega}{a}, k \right)} - k^2 \text{sn}^2 \left(\frac{K\omega}{a}, k \right) \right\} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{2\pi} \frac{U_0 K}{z_0 ar} \left| 1 + \frac{2A_2}{A_0} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right| \times \\ &\times \left| \frac{z^2}{\text{sn}^2 \left(\frac{K\omega}{a}, k \right)} - k^2 \text{sn}^2 \left(\frac{K\omega}{a}, k \right) \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

由(1)及利用椭圆函数的半角及倍角公式, 即可将上式写成

$$E = A_0 \left| \left\{ 1 + \frac{2A_2}{A_0} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right\} \frac{\frac{dz}{d\omega}}{z} \right| = A_0 \left| \left\{ 1 + \frac{2A_2}{A_0} \left(z^2 + \frac{1}{z^2} \right) \right\} \frac{d}{d\omega} (\log z) \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{2\pi} \frac{U_0}{Z_0} \frac{2K}{a} \left| \left\{ 1 + \frac{4A_2}{A_0} \frac{1 + \operatorname{cn}^2\left(\frac{2K\omega}{a}, k\right)}{1 - \operatorname{cn}^2\left(\frac{2K\omega}{a}, k\right)} \frac{\operatorname{dn}\left(\frac{2K\omega}{a}, k\right)}{\operatorname{sn}\left(\frac{2K\omega}{a}, k\right)} \right\} \right|. \quad (21)'$$

其次,由图2及(9)式可见,电位梯度的最大值将出现于 $\omega = Re^{j0^\circ}$ 或即 $z = r_1 e^{j0^\circ}$, 故可得

$$E_{\max} = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{2\pi} \frac{U_0}{Z_0} \frac{K}{ar_1} \left| 1 + \frac{2A_2}{A_0} \left(r_1^2 + \frac{1}{r_1^2} \right) \right| \left| \frac{r_1^2}{\operatorname{sn}^2(\alpha K, k)} - k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha K, k) \right|. \quad (22)$$

最后,当没有反射波时,传输线所传输的功率为

$$P = \frac{1}{2} U_0^2 / Z_0. \quad (23)$$

故可见我们所研究的线的最大传输功率为

$$P_{\max} = \frac{E_{\max}^2 a^2}{Z_0} \left(2\pi^2 \frac{\epsilon}{\mu} \right) \left(\frac{r_1}{K} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{2A_2}{A_0} \left(r_1^2 + \frac{1}{r_1^2} \right) \right\}^{-2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{r_1^2}{\operatorname{sn}^2(\alpha K, k)} - k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha K, k) \right\}^{-2}. \quad (24)$$

对于正方形线, $r_1 = r_2$, 故 $A_2 = 0$, 对空气媒质, $\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx 120\pi$,

$$P_{\max} = \frac{E_{\max}^2 a^2}{120} \frac{\log 1/r_1}{(1/r_1)^2} \frac{1}{\frac{r_1^2}{\operatorname{sn}^2(\alpha K, k)} - k^2 \operatorname{sn}^2(\alpha K, k)}, \quad (25)$$

(25)式已绘成 α 的函数,如图3所示;外导体直径为 a 、内导体半径为 R 的普通同轴线的最大传输功率为

$$P'_{\max} = \frac{E_{\max}^2 a^2}{120} \frac{\ln \frac{a}{2R}}{\left(\frac{a}{R} \right)^2} = \frac{E_{\max}^2 a^2}{120} \alpha^2 \log \frac{1}{2\alpha}, \quad (26)$$

(26)亦于图3中绘成虚线,以资比较。由图3可见,当 α 不大时,正方形线的最大传输功率要比普通同轴线的略大,因为前者具有较大的截面积,而当 α 增加时,则普通同轴线将具有较大的最大传输功率,因为当 $\alpha = R/a$ 取大的值时,正方形线中电场的拥挤即开始有较显著的影响。

矩形线的衰减常数可由现有方法^[4]求出其单位长度的高频电阻 $\mathcal{R}$ 。计及线壁的有限电阻系数 σ ,可得

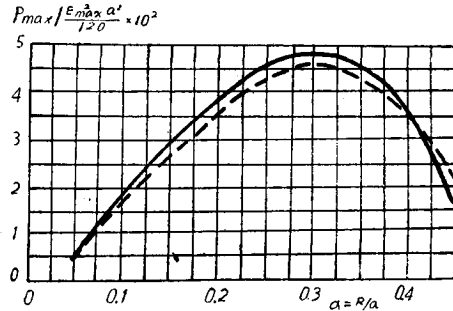


图 3

—— 正方形线 ---- 普通同轴线

$$\mathcal{R} \left(\frac{U_0}{Z_0} \right)^2 = \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} \oint \left| \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \right|^2 dl, \quad (27)$$

其中 f 是工作频率, μ_0 是线壁导体的导磁系数, 上式中的积分是沿线的内、外导体进行。代入(21)式, 即得

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} \left(\frac{K}{2\pi} \right)^2 \oint \left| \left\{ 1 + \frac{4A_2}{A_0} \frac{1 + \operatorname{cn}^2 \left(\frac{2K\omega}{a}, k \right)}{1 - \operatorname{cn}^2 \left(\frac{2K\omega}{a}, k \right)} \right\} \frac{\operatorname{dn} \left(\frac{2K\omega}{a}, k \right)}{\operatorname{cn} \left(\frac{2K\omega}{a}, k \right)} \right|^2 dl = \\ &= \sqrt{\frac{\pi f \mu_0}{\sigma}} \left(\frac{2K}{\pi a} \right)^2 \left[k \int_0^a \left\{ 1 + \frac{4A_2}{A_0} \left[1 - 2\operatorname{dn}^2 \left(\frac{2Ku}{a}, k \right) \right] \right\}^2 \operatorname{cn}^2 \left(\frac{2Ku}{a}, k \right) du + \right. \\ &\quad \left. + k' \int_0^b \left\{ 1 - \frac{4A_2}{A_0} \left[1 - 2\operatorname{dn}^2 \left(\frac{2K'u}{b}, k' \right) \right] \right\}^2 \operatorname{cn}^2 \left(\frac{2K'u}{b}, k' \right) dv + \right. \\ &\quad \left. + R \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 + \frac{4A_2}{A_0} \frac{1 + \operatorname{cn}^2(2\alpha K e^{i\varphi}, k)}{1 - \operatorname{cn}^2(2\alpha K e^{i\varphi}, k)} \right\}^2 \frac{(D + CD_1)(D_1 + C_1 D)}{(1 - CC_1)(1 + CC_1)} d\varphi \right], \quad (28) \end{aligned}$$

其中 $C = \operatorname{cn}(4\alpha K \cos \varphi, k)$, $C_1 = \operatorname{cn}(4\alpha K \sin \varphi, k')$, $D = \operatorname{dn}(4\alpha K \cos \varphi, k)$, $D_1 = \operatorname{dn}(4\alpha K \sin \varphi, k')$ 。在(28)中头两项的积分是 $\operatorname{cn}^2 u$, $\operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u$, $\operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u$ 的积分, 是可以积分出来^[6], 而最后一项似须进行数字积分。

线的衰减常数 β 即可由下式给出:

$$\beta = \mathcal{R}/2Z_0. \quad (29)$$

槽形线问题解可以在文献上找到, 有人设圆内柱的半径是足够小^[3], 有人用变分法求解^[7]。用本文所系统地表出的方法, 亦可解这个槽形线的问题, 而且对于相当大的内导体半径, 仍可得到相当准确的结果, 而且结果易于进行数字计算。

试取

$$\left. \begin{aligned} z &= x + jy = -j \sin \frac{\pi\omega}{a}, \\ x &= \cos \frac{\pi u}{a} \sinh \frac{\pi v}{a}, \\ y &= -\sin \frac{\pi u}{a} \cosh \frac{\pi v}{a}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

故 $u = \pm a/2$, $x = 0$, $|y| > 1$; $v = 0$, $x = 0$, $|y| < 1$, 因而(30)将 ω 平面上宽度为 a 、圆柱内导体半径为 R 、位于两接地平面 $u = \pm a/2$ 的中間, 离接地底面 $v = 0$ 高为 h 的槽形线, 变换成 z 平面上的如下的传输系统: 一近似于正圆柱的导线平行于接地平面 $x = 0$, 见图 4。

我们将把这个 z 平面上的问题在双极坐标中求解^[8], 此双极坐标 (ξ, η) 与坐标 (x, y) 的关系是由下面的变换联系起来,

$$\zeta = \xi + j\eta = \log \frac{z-d}{z+d} \quad (31)$$

其中 d 是一待定常数。由(31)可知, 等 ξ 及等 η 线将分别变换成如下的两族圆:

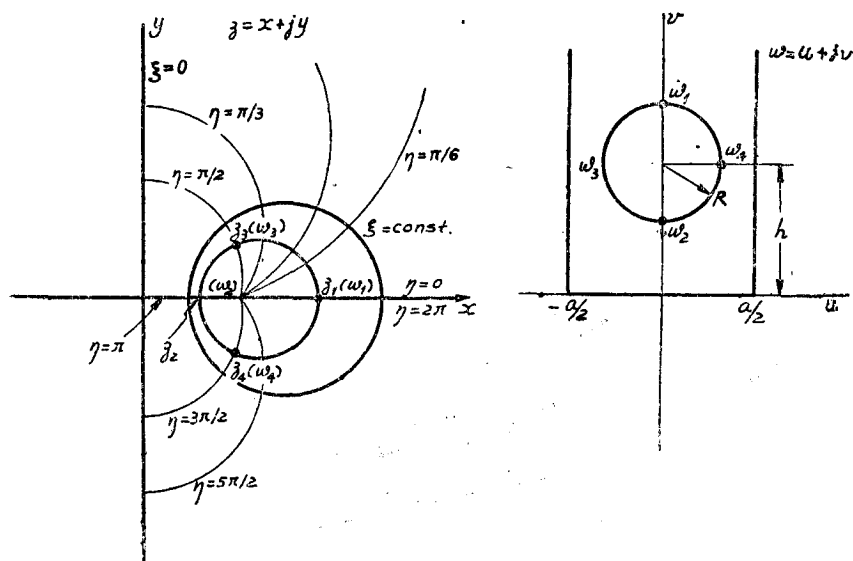


图 4

$$\left. \begin{aligned} (x - d \coth \xi)^2 + y^2 &= d^2 \operatorname{csch}^2 \xi, \\ x^2 + (y - d \cot \eta)^2 &= d^2 \csc^2 \eta, \\ x &= \frac{d \sinh \xi}{\cosh \xi - \cos \eta}, \\ y &= \frac{d \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

在 ξ 平面上, 由问题的对称性, 可知问题的解必须为

$$U = B_0 \xi + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sinh m \xi \cos m \eta; \quad (33)$$

但是, 为了得到近似解, 我们的边界条件在相当于 $x = 0$ 的外导体 $\xi = 0$ 上得到满足, 而在接近于圆截面的内导体上 (相当于槽形线的圆柱内导体), 则只在四点上成立, 即是说, 我们取

$$B_m = 0, \quad m \geq 3, \quad (34)$$

而且除 $\xi = 0, U = 0$ 外, 取

$$\begin{aligned} U = U_0 \text{ 在 } \xi = \xi_1, \eta = 0; \xi = \xi_2, \eta = \pi; \\ \xi = \xi_3, \eta = \pi/2; \xi = \xi_4, \eta = 3\pi/2, \end{aligned} \quad (35)$$

代入(33), 即得到

$$B_0 = U_0 \frac{\sinh \xi_1 (\sinh 2\xi_2 + \sinh 2\xi_3) + \sinh \xi_2 (\sinh 2\xi_1 + \sinh 2\xi_2)}{\xi_1 \sinh \xi_2 \sinh 2\xi_3 + \xi_2 \sinh \xi_1 \sinh 2\xi_3 + \xi_3 (\sinh \xi_2 \sinh 2\xi_1 + \sinh \xi_1 \sinh 2\xi_2)}, \quad (36)$$

其中, 由(30)及(32)可见, $\omega_{1,2} = 0 + j(h \pm R)$, 则 $y = 0, x_{1,2} = \sinh \frac{\pi}{a} (h \pm R)$, 故即

$$\text{得到 } \eta_1 = 0, \sinh \frac{\pi}{a} (h + R) = \frac{d \sinh \xi_1}{\cosh \xi_1 - 1}, \text{ 及 } \eta_2 = \pi, \sinh \frac{\pi}{a} (h - R) = \frac{d \sinh \xi_2}{\cosh \xi_2 + 1},$$

即

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2 \coth^{-1} \frac{\sinh \frac{\pi}{a} (h+R)}{d}, \\ \eta_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 2 \tanh^{-1} \frac{\sinh \frac{\pi}{a} (h-R)}{d}, \\ \eta_2 &= \pi. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

其次, 由 (32), 当 $\eta_3 = \pi/2$, 则 $x_3 = d \tanh \xi_3$, $y_3 = d \operatorname{sech} \xi_3$, 因而 $x_3^2 + y_3^2 = d^2 (\tanh^2 \xi_3 + \operatorname{sech}^2 \xi_3) = d^2$ 及 $y_3/x_3 = \operatorname{csch} \xi_3$, 最后, 由 (30), 代入 $u_3 = -R$, $v_3 = h$, 即得到

$$d = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi R}{a} \sinh^2 \frac{\pi h}{a} + \sin^2 \frac{\pi R}{a} \cosh^{-1} \frac{\pi h}{a}} = \sqrt{\sinh^2 \frac{\pi h}{a} + \sin^2 \frac{\pi R}{a}}, \quad (38)$$

及

$$\xi_3 = \operatorname{csch}^{-1} \left(\tan \frac{\pi R}{a} \coth \frac{\pi h}{a} \right). \quad (39)$$

对于 $\eta_4 = 3\pi/2$, 我们又得到 (38) 及 $\xi_4 = \xi_3$ ($u_4 = R$, $v_4 = h$), 故我们只得到三个条件, 但这已足够定出 (33) 中的 B_0, B_1 及 B_2 三个常数了, 而 (36) 中的 ξ_1, ξ_2 及 ξ_3 也已完全确定:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 2 \coth^{-1} \frac{\sinh \frac{\pi}{a} (h+R)}{\sqrt{\sinh^2 \frac{\pi h}{a} + \sin^2 \frac{\pi R}{a}}}, \\ \xi_2 &= 2 \tanh^{-1} \frac{\sinh \frac{\pi}{a} (h-R)}{\sqrt{\sinh^2 \frac{\pi h}{a} + \sin^2 \frac{\pi R}{a}}}, \\ \xi_3 &= 2 \operatorname{csch}^{-1} \left(\tan \frac{\pi R}{a} \coth \frac{\pi h}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

我们又可把 (33) ($B_m = 0, m \geq 3$) 取作如下复数位函数的实部

$$W = U + jV = B_0 \zeta + B_1 \sinh \zeta + B_2 \sinh 2\zeta, \quad (41)$$

故由 (41) 的虚部, 我们即得通量函数为

$$V = B_0 \eta + B_1 \cosh \xi \sin \eta + B_2 \cosh 2\xi \sin 2\eta. \quad (42)$$

当 η 从零变到 2π 时, 则类似 (19) 式, 我们可得到我们所研究的线的每单位长度的电容量为 $C_0 = 2\pi\epsilon B_0/U_0$, 因而其特性阻抗是

$$Z_0 = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{2\pi} \frac{\sinh \xi_1 (\sinh 2\xi_2 + \sinh 2\xi_3) + \sinh \xi_2 (\sinh 2\xi_1 + \sinh 2\xi_3)}{\xi_1 \sinh \xi_2 \sinh 2\xi_3 + \xi_2 \sinh \xi_1 \sinh 2\xi_3 + \xi_3 (\sinh \xi_2 \sinh 2\xi_1 + \sinh \xi_1 \sinh 2\xi_2)}, \quad (43)$$

当 $h \rightarrow \infty$ 时, 槽形线即趋近于平板线, 而 $\xi_1 = 2 \coth^{-1} e^{\pi R/a} \log \frac{1}{\tanh \frac{\pi R}{2a}} = \xi_2 = 2 \tanh^{-1}$

$$e^{-\frac{\pi R}{a}} = \log \frac{1}{r_2}, \quad \xi_3 = \operatorname{csch}^{-1} \left(\tan \frac{\pi R}{a} \right) = \log \frac{1}{\tan \frac{\pi R}{2a}} = \log \frac{1}{r_1}, \quad \text{故 (43) 即转变为 (20),}$$

$b \rightarrow \infty$.

线中的电位梯度可由下式求出

$$E = \left| \frac{dW}{d\omega} \right| = \left| \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \frac{dz}{d\omega} \right|, \quad (44)$$

代入(41),(30)及(31), 则线的最大传输功率及衰减常数即可求出, 如我们已求矩形线的一样.

参 考 文 献

- [1] Chen, Tsung-Shon, "Determination of the Capacitance, Inductance, and the Characteristic Impedance of Rectangular Lines", *Trans. IRE, MTT-8*, No. 5 (Sept., 1960), 510—519.
- [2] Bowman, F., Introduction to Elliptic Functions, 1953 (或, 井上正雄著, 应用函数论, 共立全书; 第五章日文, 1954).
- [3] Frankel S., "Characteristics Impedance of Parallel Wires in Rectangular Troughs", *Proc. IRE*, **30**, (1942), 182.
- [4] Smythe, S. R., Static and Dynamic Electricity (1950), §§ 4.01, 5.38; 4.11; 13.18.
- [5] Wholey, W. B., Eldred W. N., "A New Type of Slotted Line Section", *Proc. IRE*, **38**, No. 3 (March, 1950), 244—248.
- [6] Byrd and Friedman, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists (1954).
- [7] Chisholm, R. M., "The Characteristic Impedance of Trough and Slab Line", *Trans. IRE, MTT-4*, No. 3 (July, 1956), 166—172. (或 Полосковые системы Сверхвысоких Частот, 1959; p. 87, 俄译本).
- [8] Stratton, J. A., Electromagnetic Theory, § 1.18, (1941).

THE WORKING CHARACTERISTICS OF A RECTANGULAR AND TROUGH LINE WITH INNER CIRCULAR CYLINDRICAL CONDUCTOR

LIN WEI-GUAN

ABSTRACT

By means of elliptical functions the rectangular line with inner central conductor of circular cylindrical shape is transformed into a coaxial line with circular outer conductor and nearly circular inner conductor, then by employing a finite number of terms of circular cylindrical harmonics we can fit the boundary conditions at the outer conductor and at a finite number of points at the inner conductor, thus the problem of the rectangular line with inner central circular conductor is solved. Similarly, by means of trigonometrical functions, the trough line with central inner conductor can be handled, i.e., it is transformed into a wire of nearly circular cross-section parallel to and in front of a grounded plane, then by means of the bipolar coordinate transformation, the problem of this trough line can be solved by using a finite number of rectangular harmonics. When the distance between the axis of the inner conductor and the bottom of the trough tends to infinity, the results obtained in this paper go into that of the well-known slab line.