

核子与氘核散射相移的非单值性*

时 学 丹
(内蒙古大学物理系)

提 要

本文从氘核与核子的散射截面在自旋转动下的不变性, 讨论了由散射截面确定相移的非单值性. 给出了在核子与氘核弹性散射下的南氏变换.

南氏^[1]曾指出在 π 介子和核子散射时, 由微分截面来确定相移可以有两组解. 在李丁^[2]等以及在布西可夫^[3]等的工作中, 曾详细讨论了这种非单值性的物理意义, 指出相移由一组变到另一组对应于自旋的转动. 他们并对核子-核子散射情形进行了研究. 但在核子-核子散射情况下的南氏变换是由沙斯达维可^[4]等得到的. 他们的方法易于推广到高自旋粒子散射时的研究. 我们将以此方法来讨论核子-氘核的弹性散射.

引入核子-氘核的散射振幅

$$x_f = M(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f, \mathbf{s}, \sigma) x_i, \quad (1)$$

式中 $\mathbf{k}_i$ 及 $\mathbf{k}_f$ 为在质心系中的入射及出射单位动量, $\mathbf{s}$ 为氘核的自旋算符, σ 为核子自旋算符的二倍. x_f 及 x_i 为初末态系统的自旋波函数. 散射振幅的具体形式如下:

$$\begin{aligned} M = & A\sigma_{00}T_{00} + B\sigma_{1\mu}n^\mu T_{1m}n^m + iC\sigma_{1\mu}n^\mu T_{00} + iDT_{1m}n^m + \\ & + E\sigma_{1\mu}l^\mu T_{1m}l^m + F\sigma_{1\mu}n^\mu T_{1m}m^m + G\sigma_{00}T_{2m}(ll)_2^m + \\ & + iH\sigma_{1\mu}n^\mu T_{2m}(ll)_2^m + I\sigma_{00}T_{2m}(mm)_2^m + iJ\sigma_{1\mu}n^\mu T_{2m}(mm)_2^m + \\ & + iK\sigma_{1\mu}l^\mu T_{2m}(nl)_2^m + iL\sigma_{1\mu}m^\mu T_{2m}(mm)_2^m, \end{aligned} \quad (2)$$

式中符号见参考文献[5]. 应当注意, 作为 k^2 及 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$ ($\mathbf{k}$ 及 $\mathbf{k}'$ 表示质心系中入射及出射动量)的标量函数的12个独立参数, 在弹性散射为主要形式时, 应用 s 矩阵的么正条件, 可以给予这些参数以积分方程形式的约束^[6], 例如有以下方程

$$4\pi \operatorname{Im} A = \frac{k}{6} \int Tr [M^+(\mathbf{k}\mathbf{k}') M(\mathbf{k}'\mathbf{k})] d\omega(k'), \quad (3)$$

$$4\pi \operatorname{Im} B = \frac{k}{6} \int Tr [\sigma_{1\mu}n^\mu T_{1m}n^m M^+(\mathbf{k}\mathbf{k}') M(\mathbf{k}'\mathbf{k})] d\omega(k'), \quad (4)$$

$$4\pi \operatorname{Re} C = \frac{k}{6} \int Tr [\sigma_{1\mu}n^\mu T_{00} M^+(\mathbf{k}\mathbf{k}') M(\mathbf{k}'\mathbf{k})] d\omega(k'), \quad (5)$$

不难得到其他9个方程, 此处不一一列出. 为了方便, 此处 $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ 取成单位矢量. 积分表示对 $\mathbf{k}'$ 的一切可能角度积分. 这些参数和散射相移是相联系的.

对散射振幅引入以下变换:

* 1961年6月19日收到.

$$M'' = \exp \left[+i \left(\mathbf{s} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \cdot \mathbf{k}_f \theta \right] M \exp \left[-i \left(\mathbf{s} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \cdot \mathbf{k}_i \theta \right], \quad (6)$$

式中 $\exp \left[-i \left(\mathbf{s} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \cdot \mathbf{k}_i \theta \right]$ 算符表示总自旋 $\mathbf{s} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ 繞 $\mathbf{k}_i$ 軸轉 θ 角, 前面之算符有相应的物理意义. 在 $\theta = \pm\pi$ 时, 不难得到

$$M' = -i(1 - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_f)^2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_f) M i(1 - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_i)^2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_i), \quad (7)$$

由轉动算符的么正性, 可直接看出散射截面在以上变换下是不变的:

$$\frac{1}{6} \text{Tr} M^+ M = \frac{1}{6} \text{Tr} M''^+ M'', \quad (8)$$

对于 θ 角取 $\pm\pi$ 时, 我們可以指明通过以上变换得到一組新的有物理意义的相移. 从而得到在核子-氘核散射中由散射截面确定相移是非单值的.

用球諧旋量把散射振幅展开:

$$M = \sum_{jm} \frac{2\pi}{ik} \sum_{ll's's'} Y_{ls}^{jm}(\mathbf{k}_f) Y_{l's'}^{jm+}(\mathbf{k}_i) R_{ls;l's'}^j, \quad (9)$$

$$M' = \sum_{jm} \frac{2\pi}{ik} \sum_{ll's's'} Y_{ls}^{jm}(\mathbf{k}_f) Y_{l's'}^{jm+}(\mathbf{k}_i) R_{ls;l's'}^j, \quad (10)$$

式中 s, s' 为总自旋量子数, 取 $1/2$ 及 $3/2$. l, l' 为軌道量子数取 $j + 1/2, j - 1/2$ 以及 $j + 3/2, j + 1/2, j - 1/2, j - 3/2$. 由(9), (10)及(7)式看出

$$R'^j = L^j R^j L^{j+}, \quad (11)$$

式中 L^j 代表由 $L_{l'l's's';ls}^j$ 构成之矩陣, 并且

$$(1 - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_f)^2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_f) Y_{ls}^{jm}(\mathbf{k}_f) = \sum_{l''s''} L_{l'l's's';ls}^j Y_{l''s''}^{jm}(\mathbf{k}_f), \quad (12)$$

注意到 $(1 - 2(\mathbf{s} \cdot \mathbf{k}_f)^2)(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_f)$ 算符不仅和总角动量且和总自旋算符对易, 可知 L^j 矩陣为准对角矩陣, $L_{l'l's's';ls}^j$ 在 $s \neq s''$ 时为零. 此点意义在于, 如果认为核子-氘核弹性散射中, 总自旋量子数是好量子数, 則通过所引入变换作用, 亦不会有二重态到四重态的跃迁. 把 $\mathbf{k}_f$ 取在特殊方向, 例如 z 軸, 經過比較长的計算, 把 L^j 矩陣分別对 $s = 1/2$ 及 $s = 3/2$ 写出, 有以下表式

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

此为对 $s = \frac{1}{2}$ 之矩陣, 对应于 $l = j + \frac{1}{2}, l = j - \frac{1}{2}$ 的顺序.

$$\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \sqrt{\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \sqrt{\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sqrt{\left(j-\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{3}{2}\right)} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

此为 $s = \frac{3}{2}$ 之矩阵, l 取值顺序为 $j + \frac{3}{2}, j + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, j - \frac{3}{2}$.

由以上所得到的 L^j 矩阵形式看出: R^j 矩阵在此变换下, 其由么正性条件所加的限制是不变的, 因此我们确实在此变换下得到新相移.

以下我们给出此一变换对应的相移变换. 在 $s = \frac{1}{2}$ 时, 注意到宇称守恒, 不同轨道态没有跃迁, 有

$$\delta'_{j \pm \frac{1}{2}} = \delta_{j \pm \frac{1}{2}}, \quad (15)$$

这里相移用 δ 表示, 下标表示 l 的取值.

在 $s = \frac{3}{2}$ 时, 由于此时 l 及 $l \pm 2$ 的轨道态是耦合在一起的, 因此此时要引入两个混合参数 $\epsilon_{j+\frac{3}{2}}, \epsilon_{j+\frac{1}{2}}$, 分别表示 $l = j + \frac{3}{2}, l = j - \frac{1}{2}$ 间的以及 $l = j + \frac{1}{2}, l = j - \frac{3}{2}$ 间的耦合. 经过简单计算得到

$$\left. \begin{aligned} \delta'_{j+\frac{3}{2}} &= \delta_{j-\frac{1}{2}}, \\ \delta'_{j+\frac{1}{2}} &= \delta_{j-\frac{3}{2}}, \\ \delta'_{j-\frac{1}{2}} &= \delta_{j+\frac{3}{2}}, \\ \delta'_{j-\frac{3}{2}} &= \delta_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

以及以下混合参数的变换:

$$\epsilon'_{j+\frac{3}{2}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2 \sqrt{\left(j - \frac{1}{2}\right)\left(j + \frac{3}{2}\right)}} - \epsilon_{j+\frac{3}{2}}, \quad (17)$$

$\epsilon_{j+\frac{1}{2}}$ 的变换和此相同. (17) 式指明由散射微分截面是不能决定 l 是否好量子数, 因为即使 $\epsilon_{j+\frac{3}{2}}, \epsilon_{j+\frac{1}{2}}$ 为零, 而 $\epsilon'_{j+\frac{3}{2}}, \epsilon'_{j+\frac{1}{2}}$ 不为零.

最后作者对黄念宁同志的帮助表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Minami, S. *Prog. Theor. Phys.*, **11** (1954), 213.
- [2] Рындин, Р., Смородинский, Я., *ДАН. СССР*, **103** (1955), 69.
- [3] Пузиков, Л., Рындин, Р., Смородинский, Я., *ЖЭТФ*, **32**, 3 (1957), 592.
- [4] Заставенко, Л., Рындин, Р., 周光召. *ЖЭТФ*, **34**, 2 (1958), 526.
- [5] 时学丹, 罗辽复, 徐行, 黄念宁, *物理学报* 16 卷, 6 期, (1960) 324.
- [6] Рындин, Р., Смородинский, Я., *ЖЭТФ*, **32** 6 (1957), 1584.

THE AMBIGUITY IN ASSIGNING PHASE SHIFT OF NUCLEON-DEUTERON SCATTERING

SHIH HSUEH-DAN

(The Department of Physics, Inner Mongolian University)

ABSTRACT

By using the fact that the properties of differential cross section are invariant under the rotation of total spin, the ambiguity in assigning phase shift of the nucleon-deuteron scattering is discussed. The Minami transformation for the nucleon-deuteron scattering has been given.