

关于广义相对論中福克的諧和坐标条件*

段一士 張敬業

(兰 州 大 学)

提 要

本文利用半度規表象的数学工具对福克的諧和坐标条件进行了比較詳細的討論, 証明了該条件具有充分性, 但却不具有唯一性。

一、引 言

广义相对論中的引力場方程, 由于包含了四个恆等式, 是不能完全决定度規張量 g_{ik} 的十个分量的^[1]。如果要唯一的决定 g_{ik} , 則必須附加四个坐标条件。由于引力場方程是广义协变的, 即在任何的坐标中它都具有同样的形式, 因此度規張量在一般的情况下, 除了包含引力場以外, 还包含了由于坐标变换所引起的慣性力場部分。如果选定了具体形式的坐标条件, 就相当于选定了我們研究問題的参考坐标系。

长期以来, 对于坐标条件的理解有着原則性的分歧。福克 (B. A. Фок) 院士認為在广义相对論中存在着特殊坐标系統 (Привилегированная система координат), 这种坐标系統当引力場消失时就趨为慣性系, 并認為在处理物質分布比較集中的孤立体系的問題时, 他所提出的諧和条件^[2,3] (Условия гармоничности) 是絕對和唯一的, 并且把广义相对論的理論归結为引力場理論, 这样的看法沒有顾及到广义相对論中包含了可以用以处理慣性力場問題的其它一面^[4]。福克認為采用了他的諧和坐标条件和无穷远处为欧氏性的边界条件以后, 就有一羣特殊的坐标系被单义地确定下来, 它們之間以洛伦茲变换联系着。当引力場消失时, 这样的坐标系就变为一般的慣性系。但是諧和坐标条件具有如此的特性和它的唯一性, 福克长期以来在他的理論中并沒有严格地予以証明^[5,6]。

爱因斯坦和英菲尔德 (L. Infeld) 在上述問題中則持有不同的观点, 他們認為用任意的坐标系表述物理定律都是平权的。不利用福克的諧和坐标条件, 同样也可导出修正了的牛頓方程^[6]。作者認為这只是在近似的情况下才成立。在能够完全严格求解的問題中, 事实上用不同的坐标条件将导致不同的結果^[7,8]。

本文利用半度規表象的数学工具对福克的諧和坐标条件进行了比較詳細的討論, 一方面严格証明了当采用了諧和坐标条件及无穷远处为欧氏性的边界条件以后所确定的坐标系在引力場消失时, 的确变为一般意义下的慣性系; 但另一方面更指出了具有这样性質的坐标条件不是唯一的。

* 1961年10月4日收到。

二、半度規表示和李西旋度系数的性質

我們知道四維黎曼空間的度規張量 g_{ik} 可以用非對稱的矩陣 $\|\lambda_{i(a)}\|$ 的元素, 按照下列的形式表示^[9,10]:

$$\begin{aligned} g_{ik} &= \lambda_{i(a)} \lambda_{k(a)}, \\ \|g_{ik}\| &= \|\lambda_{i(a)}\|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

$\lambda_{i(a)}$ 在形式上好象是度規張量 g_{ik} 的一半, 因此称之为半度規. 而用 $\lambda_{i(a)}$ 叙述問題的表象, 則称为半度規表象. 如果

$$\text{Det } \lambda_{i(a)} = \sqrt{\text{Det } g_{ik}} = \sqrt{g} \neq 0,$$

則 $\|\lambda_{i(a)}\|$ 的逆矩陣存在, 設 $\lambda_{(a)}^i$ 为逆矩陣 $\|\lambda_{i(a)}\|^{-1}$ 的元素, 不難証明

$$\begin{aligned} \lambda_{(a)}^i \lambda_{i(\beta)} &= \delta_{(a\beta)}, \\ \lambda_{(a)}^i \lambda_{k(\beta)} &= \delta_k^i. \end{aligned} \quad (2)$$

李西旋度系数^[11] $\eta_{(a\beta\gamma)}$ 和半度規張量的協變微商 $(\lambda_{(\beta)}^i)_{,k}$ 有如下的关系:

$$(\lambda_{(\beta)}^i)_{,k} \lambda_{(a)}^k = \eta_{(a\beta\gamma)} \lambda_{(r)}^i, \quad (3)$$

它和半度規張量还可有下列的直接关系^[12]:

$$\begin{aligned} \eta_{(a\beta\gamma)} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \lambda_{i(a)}}{\partial x^k} [\lambda_{(\beta)}^k \lambda_{(r)}^i - \lambda_{(r)}^k \lambda_{(\beta)}^i] + \right. \\ &\quad + \frac{\partial \lambda_{i(\beta)}}{\partial x^k} [\lambda_{(a)}^k \lambda_{(r)}^i - \lambda_{(r)}^k \lambda_{(a)}^i] + \\ &\quad \left. + \frac{\partial \lambda_{i(r)}}{\partial x^k} [\lambda_{(\beta)}^k \lambda_{(a)}^i - \lambda_{(a)}^k \lambda_{(\beta)}^i] \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

由(4)式不難知道

$$\eta_{(a\beta\gamma)} = -\eta_{(a\gamma\beta)}, \quad (5)$$

并且

$$[\eta_{(a\beta\gamma)} - \eta_{(\beta a\gamma)}] \lambda_{k(a)} \lambda_{i(\beta)} = \frac{\partial \lambda_{k(r)}}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_{i(r)}}{\partial x^k}. \quad (6)$$

由于李西旋度系数不包含黎曼空間的張量指标, 因此它在黎曼空間中是一个标量.

下面我們来討論李西旋度系数和空間的黎曼性之間的关系. 为了方便起見, 定义

$$\begin{aligned} dx_{(a)} &\equiv \lambda_{i(a)} dx^i, \\ dx^i &= \lambda_{(a)}^i dx_{(a)}, \quad (x^i = ict), \end{aligned} \quad (7)$$

在一般情况下, $dx_{(a)}$ 不一定是全微分. 利用(1)和(7)可知, 微小弧长 ds 可表示为

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dx_{(a)} dx_{(a)}, \quad (8)$$

如果 $\lambda_{i(a)} = \frac{\partial x_{(a)}}{\partial x^i}$, 即 $dx_{(a)}$ 是全微分, 也即 $\oint \lambda_{i(r)} dx^i = 0$, 則由(7)式可知, (8)式所定义的空间为欧氏空間.

由于由(5)和(6)知道

$$\begin{aligned} \oint \lambda_{i(r)} dx^i &= \iint \left[\frac{\partial \lambda_{k(r)}}{\partial x^i} - \frac{\partial \lambda_{i(r)}}{\partial x^k} \right] d\sigma^{ik} = \iint [\eta_{(a\beta\gamma)} - \eta_{(\beta a\gamma)}] \lambda_{k(a)} \lambda_{i(\beta)} d\sigma^{ik} = \\ &= \sum_{(a, \beta, \gamma \neq)} \iint [\eta_{(a\beta\gamma)} - \eta_{(\beta a\gamma)}] \lambda_{k(a)} \lambda_{i(\beta)} d\sigma^{ik} + \sum_{(a)} \iint \eta_{(\gamma a\gamma)} [\lambda_{k(r)} \lambda_{i(a)} - \lambda_{k(a)} \lambda_{i(r)}] d\sigma^{ik}, \end{aligned} \quad (9)$$

因此可知,如果 $dx_{(\gamma)} = \lambda_{i(\gamma)} dx^i$ 是全微分,则必须要求:

$\langle i \rangle \eta_{(\alpha\beta\gamma)} = \eta_{(\beta\alpha\gamma)}$ (当 $\alpha, \beta, \gamma \neq i$); $\langle ii \rangle \eta_{(\beta\alpha\beta)} = 0$. 也即要求^[11]所有的李西旋度系数皆为零,即

$$\eta_{(\alpha\beta\gamma)} = 0, \quad (\text{当空间为欧氏的}). \quad (10)$$

因为引力场完全是由空间的黎曼性所决定的,所以当引力场不存在时 $dx_{(\alpha)}$ 为全微分,而引力场存在时则相反. 因此,由上述讨论可知,引力场的存在与否完全决定于所有的李西旋度系数 $\eta_{(\alpha\beta\gamma)}$ 是否为零.

此外由于 $\eta_{(\alpha\beta\gamma)}$ 在黎曼空间中是一个标量,它不随黎曼坐标的变换而变化. 这正说明引力场的本质是与坐标的变换无关的.

三、引力场和惯性力场

假设度规张量场函数 g_{ik} 已由爱因斯坦引力场方程:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_{ik}, \quad (11)$$

和物质的运动方程:

$$(T^i_k)_i = 0 \quad (12)$$

及某个坐标条件解出. T_{ik} 为物质的能量——动量张量. 现在我们通过对一个试验质点 (它不引起 g_{ik} 的变化) 在所确定的度规张量场中的运动方程 (短程线方程):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (13)$$

或

$$(u^i)_k u^k = 0, \quad u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (14)$$

的研究,来讨论引力场和惯性力场的作用.

因为

$$\frac{dx^i}{ds} \equiv u^i = u_{(\alpha)} \lambda^i_{(\alpha)}, \quad (15)$$

$u_{(\alpha)}$ 是黎曼空间中的不变量^[11]. 它的几何意义是四维速度 u^i 沿 α 向正交线汇的分量. 则利用(2), (3), (15)等式可知

$$\begin{aligned} (u^i)_k u^k &= (u_{(\beta)} \lambda^i_{(\beta)})_k u_{(\alpha)} \lambda^k_{(\alpha)} = \left[\frac{\partial u_{(\beta)}}{\partial x^k} \lambda^i_{(\beta)} + u_{(\beta)} (\lambda^i_{(\beta)})_k \right] u_{(\alpha)} \lambda^k_{(\alpha)} = \\ &= \frac{du_{(\beta)}}{ds} \lambda^i_{(\beta)} + \eta_{(\alpha\beta\gamma)} \lambda^i_{(\gamma)} u_{(\alpha)} u_{(\beta)} = \frac{du^i}{ds} - u_{(\beta)} \frac{d\lambda^i_{(\beta)}}{ds} + \eta_{(\alpha\beta\gamma)} \lambda^i_{(\gamma)} u_{(\alpha)} u_{(\beta)}. \end{aligned}$$

故试验质点的运动方程可改写为

$$\frac{du^i}{ds} = f_1^i + f_2^i, \quad (16)$$

其中

$$f_1^i = u_{(\alpha)} \frac{d\lambda^i_{(\alpha)}}{ds}, \quad (17)$$

$$f_2^i = -\eta_{(\alpha\beta\gamma)} \lambda^i_{(\gamma)} u_{(\alpha)} u_{(\beta)}. \quad (18)$$

当不存在引力場时,空間为欧氏的,此时 $dx_{(a)}$ 是全微分,故存在变换:

$$x_{(a)} = f_{(a)}(x^1, x^2, x^3, x^4), \quad (19)$$

并且

$$\lambda_{i(a)} = \frac{\partial x_{(a)}}{\partial x^i}. \quad (20)$$

由于 $\text{Det} \lambda_{i(a)} \neq 0$, (19) 式的逆变换

$$x^i = f^i(x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, x_{(4)}) \quad (21)$$

也是存在的,并且

$$\lambda^i_{(a)} = \frac{\partial x^i}{\partial x_{(a)}}. \quad (22)$$

所以(17)式可以变为

$$f_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x_{(a)} \partial x_{(\beta)}} u_{(a)} u_{(\beta)}, \quad (\text{当引力場不存在}). \quad (23)$$

又由上节討論可知,此时 $\eta_{(a\beta\gamma)} = 0$, 故

$$f_i^2 = 0, \quad (\text{当引力場不存在}). \quad (24)$$

也即是在引力場不存在时,試驗質点的运动方程(16)可簡化为

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x_{(a)} \partial x_{(\beta)}} u_{(a)} u_{(\beta)}. \quad (25)$$

由此可知当引力場不存在时, (17) 或 (25) 式所决定的 f_i^2 是由于坐标变换而引起的慣性力¹⁾. 而当引力場存在时, 因为(19)和(21)的变换关系式是不成立的, 故此項就不能簡單的认为是慣性力. 此外如果变换式(19) 和 (21)是綫性变换, 則 $\frac{\partial^2 x^i}{\partial x_{(a)} \partial x_{(\beta)}} = 0$. 故在此时慣性力等于零. 这个特点在下节討論諧和坐标条件問題时将是有益的.

至于 f_i^2 的物理意义, 則不能簡單的认为是引力的全部, 因为当空間是黎曼空間时(17)式所决定的 f_i^2 与半度規张量 $\lambda_{i(a)}$ 有直接的关系, 也即 f_i^2 与度規张量 g_{ik} 有直接的关系. 因此在这个情况下 f_i^2 也包含了引力部分. 所以我們只能将 f_i^2 理解为决定引力的主要部分.

四、关于福克的諧和坐标条件

福克认为在处理物質分布比較集中的孤立系統的引力場問題时, 应该唯一地采用諧和坐标条件:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} g^{ik}}{\partial x^k} = 0, \quad (26)$$

和无穷远处为欧氏性的边界条件^[3]:

$$g^{ik}|_{\infty} = \delta^{ik}. \quad (27)$$

由于

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} g^{ik}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \lambda^k_{(a)})}{\partial x^k} \lambda^i_{(a)} + \lambda^k_{(a)} \frac{\partial \lambda^i_{(a)}}{\partial x^k},$$

1) 严格地說, 是单位質量所受的慣性力, 即慣性加速度.

并且因为

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} \lambda_{(a)}^k)}{\partial x^k} = \eta_{(\beta a \beta)} \quad (28)$$

(参看文献[12]), 諧和坐标条件可改写为

$$\lambda_{(a)}^k \frac{\partial \lambda_{(a)}^i}{\partial x^k} + \eta_{(\beta a \beta)} \lambda_{(a)}^i = 0. \quad (29)$$

福克认为采用了諧和坐标条件(26), 即(29)和无穷远处为欧氏性的边界条件(27)以后, 所决定的坐标系当引力場消失时就变为慣性系。这个重要的論点福克沒有給出严格的証明。下面我们試严格証明这个論断。

因为当引力場不存在时, $\eta_{(\alpha \beta \gamma)} = 0$, 所以由(29)式可知諧和条件变为

$$\lambda_{(a)}^k \frac{\partial \lambda_{(a)}^i}{\partial x^k} = 0, \quad (30)$$

利用(22)式, 此式可化为

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial x_{(a)}^2} = 0, \quad (31)$$

而边界条件(27)在一般情况下可写为

$$\lambda_{(a)}^i|_{\infty} = a_{(a)}^i,$$

或

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_{(a)}} \Big|_{\infty} = a_{(a)}^i, \quad (32)$$

$$a_{(a)}^i a_{(a)}^k = \delta^{ik}, \quad (33)$$

其中 $a_{(a)}^i$ 是常数。

方程(31)在具有边界条件(32)情况下的唯一解的形式应为(参看附录)

$$x^i = f^i(x_{(a)}) = a^i + a_{(a)}^i x_{(a)}, \quad (a^i \text{ 是任意常数}). \quad (34)$$

此时由(23)式可知, $f_i^i = 0$. 則試驗質点的运动方程化为

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0. \quad (35)$$

由此可見, 运用了福克的諧和坐标条件和无穷远处为欧氏性的边界条件所确定的坐标系, 当引力場消失时, 的确变为一般意义下的慣性系。

但是由上述討論可知, 如以上的情况成立, 則福克的論断成立的主要因素只是諧和坐标条件中的一部分, 即(29)式中的第一項。如果我们采用无穷远处为欧氏性的边界条件和下面的坐标条件:

$$\lambda_{(a)}^k \frac{\partial \lambda_{(a)}^i}{\partial x^k} + \Phi^i(\eta_{(\alpha \beta \gamma)}) = 0, \quad (36)$$

其中 Φ^i 为 $\eta_{(\alpha \beta \gamma)}$ 的任意函数, 只要滿足

$$\Phi^i = 0, \quad \text{当 } \eta_{(\alpha \beta \gamma)} = 0, \quad (37)$$

則按照以上討論問題的邏輯, 同样可以証明由此所决定的坐标系, 当引力場不存在时, 仍然还是变为慣性系。

这就是說决定福克意义下的特殊坐标系, 即当引力場消失时变为慣性系的坐标系, 諧

和条件并不是唯一的。而且他把广义相对论归结为引力论的看法也还可以进一步商榷。作者认为利用半度规表象的数学工具，也许将有益于对广义相对论的一些基本问题作进一步的研究。

附 录

(34)式为方程(31)和边界条件(32)的唯一解的证明如下。假设 φ^i 为方程(31)和边界条件(32)的另一解，则

$$\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x_{(a)}^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_{(a)}} \Big|_{\infty} = a_{(a)}^i, \quad x_{(4)} = ix_{(0)}, \quad (38)$$

令

$$F^i = \varphi^i - f^i, \quad (39)$$

则由(34)和(38)式可知

$$\frac{\partial^2 F^i}{\partial x_{(a)}^2} = 0, \quad \frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} \Big|_{\infty} = 0, \quad (40)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_{(0)}} \left[\sum_{a=1}^3 \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_{(0)}} \right)^2 \right] - \sum_{a=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{(a)}} \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_{(0)}} \frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} \right) = \\ = - \frac{\partial}{\partial x_{(0)}} \left(\frac{\partial^2 F^i}{\partial x_{(0)}^2} \right), \end{aligned} \quad (41)$$

故由(40)和(41)可知

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_{(0)}} \left[\sum_{a=1}^3 \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_{(0)}} \right)^2 \right] (dx) - \\ - \int_{\Omega} \sum_{a=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{(a)}} \left(\frac{\partial^2 F^i}{\partial x_{(0)}^2} \right) (dx) = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

其中

$$(dx) = dx_{(0)}(d\mathbf{x}).$$

如果四维积分体积 Ω 选择为上下底 A, B 垂直于 $x_{(0)}$ 轴，侧面为 C 的柱面所包含的体积，且 A 与 $x_{(0)}$ 轴的交点为 $x_{(0)} = t$, B 与 $x_{(0)}$ 轴交于 $x_{(0)} = -\infty$, 而 A 与 B 的面积皆为无穷大，则由(40)之第二式可知

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} \Big|_B = \frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} \Big|_C = 0, \quad (43)$$

利用(43)和上面所规定的 Ω , 经过不甚复杂的运算可将(42)式化简为

$$\int \left[\sum_{a=1}^3 \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F^i}{\partial x_{(0)}} \right)^2 \right] (d\mathbf{x}) = 0,$$

上式之被积函数为平方和的形式，故其每项皆应等于零，所以

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_{(a)}} = 0, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4. \quad (44)$$

故

$$F^i = \text{常数}, \quad (45)$$

則由(39)和(34)可知

$$\varphi^i = a^{i'} + a_{(a)}^i x_{(a)}, \quad (46)$$

它的形式与 f^i 是完全一样的, 仅常数項有所区别, 所以 (34) 應該是方程 (31) 和边界条件 (32) 的唯一形式的解.

参 考 文 献

- [1] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Теория Поля.
- [2] Фок В. А., *Природа*, **12** (1953), 13.
- [3] Фок В. А., Теория пространства времени и тяготения (1955).
- [4] Широков М. Ф., *ЖЭТФ*, **30** (1956), 180.
- [5] Инфельд Л. и Фок В. А., 关于广义相对論問題的通訊: *Вопросы Философии*, **3** (1955), 155.
- [6] Infeld L., *Rev. of Mod. Phys.*, **29** (1957), 398.
- [7] 段一士, *ЖЭТФ*, **17** (1954), 756.
- [8] 段一士, *ЖЭТФ*, **31** (1956), 1098.
- [9] 段一士, Диссертаций М. Г. У. (1957).
- [10] 段一士, *ЖЭТФ*, **34** (1958), 632.
- [11] Eisenhart L. P., *Riemannian Geometry* (1957).
- [12] Румер Ю., *ЖЭТФ*, **2** (1953), 271.

К КООРДИНАТНОМУ УСЛОВИЮ ГАРМОНИЧНОСТИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Дуань И-ши, Чжан Чжин-е

Резюме

С помощью полуметрического представления обсуждается координатное условие гармоничности. Показано, что это условие достаточное, но не единственное.