

## 微波强耦合論<sup>\*1)</sup>

黃 宏 嘉

### 提 要

在本文中,作者嘗試从耦合波的观点来研究电磁波通过两边有导电屏的长槽(即槽耦合波导系统)的衍射問題,提出一个实际求解这个边值問題的、建立在明暂物理概念上的理論。应用这个理論的观点,研究耦合波导問題,就和研究单一波导問題一样,能够采取相同的数学途径,这个途径就是正交函数的展开理論。这样,从来都是用不同方法来处理的两类波导傳輸問題,現在就能用統一的、联系的观点来分析。为了說明这个理論的具体应用,作者分析了用来完成矩形波导主波和低衰減圆电波之間功率轉換的长槽定向耦合器,得出了一系列的計算基本参数的原始公式。文末指出了本文所提理論和方法的若干进一步应用。

### 第一部分 引 言

本文的目的是双重的:在理論方面,它使两类一直是用不同数学方法来处理的电磁場边值問題(下面就要說明),能够用同一观点来研究,同时在实际方面,它提供一种分析长槽定向耦合器的方法,給出一系列的計算基本参数的原始公式。

重要的是上述两类問題,即使不是包括整个的,也是包括大部分的波导傳輸理論和实际問題。第一类問題研究在单一波导中所发生的波型变换,例如在各种型式波导中由于弯曲、截面改变以及媒质非均匀性、内表面粗糙、介质膜、非各向同性结构等而发生的波型变换(接头傾斜及阶梯可看作弯曲、截面变形的极限情形)。这类边值問題,正和热传导与弹性振动的經典問題,以及近代的量子力学和 Schrödinger 方程的研究一样,都曾成功地用几乎相同的数学来解决,这就是正交函数的展开理論<sup>2)</sup>。

上述的第二类問題包括各种耦合系統<sup>[26-45]</sup>,特别是电磁波定向耦合器,在这种系統中波型变换是在一对互相連接的波导中发生的。从現象方面,这类問題也曾用傳輸綫的观点来研究过<sup>[21]</sup>,但是傳輸綫耦合波方程中系数的計算仍然是未解決的問題。从电磁場的观点,也提出过一些不同的理論。作为天綫理論的一个自然的发展,Stevenson 提出了矩形波导槽耦合理論<sup>[39]2)</sup>,在这种理論中,他得到一个积分方程;但是,考虑到波导的边界,这个

\* 1961年9月15日收到。

1) 本文同时在“中国科学”1962年第1期上发表。

2) 在电动力学中,Кисункo<sup>[11]</sup>首先提出了这个概念。采取相似的途径,Slater 发展了空腔問題的展开理論<sup>[12]</sup>,而 Marcuvitz 和 Schwinger 則研究了波导的不連續性問題<sup>[13]</sup>。在不規則波导理論中,Stevenson 最早发表了这方面的工作<sup>[41]</sup>。但是,直到 Schelkunoff 发表了他的論文<sup>[15]</sup>,这种方法的有效才被普遍認識。与此同时,Каценеленбаум 在一系列关于不規則波导的論文中<sup>[6]</sup>发展了这个方法(他称这种方法为“橫截面方法”)。除了上述的工作外,許許多多其他作者也曾采用这种方法或其演变形式研究了各种各样的不規則波导問題<sup>[17-25]</sup>。

方程的求解是困难的。从另一个角度 Bethe 提出了小孔衍射理论<sup>[41]</sup>, 它将电磁场化为静电场问题来处理(介于积分方程和偶极子的分析之间, 还提出过某些中间的分析方法<sup>[42]</sup>)。Bethe 的工作给出了实际的结果, 引出了关于定向耦合器的一系列的论文。作为补充, Schelkunoff 导出了定向耦合器中一对耦合波型的微扰传播常数的计算公式<sup>2)</sup>。这样, Bethe 的基本结果加上 Schelkunoff 的公式, 就能够充分地用来研究两个互相耦合的波; 不过, 它们还不能描述耦合波导结构中多个波型的整个场问题。除了上述的一些理论, 另一种理论是将耦合波导问题当作空间差拍现象来研究。虽然在分析一对接近简并波型之间的能转换时, 这种方法很有效, 但是空间差拍的概念在耦合波导的多波型分析中也不是普遍的。一种更加特殊的方法是采用微扰的概念来分析槽耦合在波导之间激发起的杂波<sup>[45]</sup>。综上所述, 从耦合波导理论的发展来看, 虽然耦合波导在一方面曾经用传输线的观点来研究过, 而在另一方面也曾用电磁场的观点来分析, 但我们仍然缺乏一个完整和统一的理论, 用它将电磁场边值问题化为耦合传输线问题<sup>3)</sup>。

作者尝试用研究第一类问题的观点, 同样来研究第二类问题。为了使数学方法表达得更清楚, 作者将结合一个具体的实际问题, 即长槽定向耦合器, 来提出耦合波导理论; 从数学方面说, 这个理论是正交函数展开理论的进一步发展, 它解决了在某些复合域中正交函数的展开问题。

作者相信, 对于上述的两类波导问题, 提出一个统一的互相联系的理论是十分有意义的; 只要我们想到传输线概念在近代微波电子学中所起的重要作用, 就能够理解这一点。事实上, 上述两类问题虽然在波导数目上是完全不同的——一类问题是研究单一波导, 另一类是研究多波导系统, 但在很多方面, 从波型变换现象来看, 它们却是非常相似的。

例如, 无论对于单一或多波导系统, 一个最重要的问题是在一对“简并”或空间“同步”波型之间所发生的波型变换现象。作为具体的例子, 对于单一波导, 我们想到圆截面弯曲波导中简并波型  $H_{01}$  和  $E_{11}$  常常引起我们很大的注意, 而对于多波导系统, 我们只要举出定向耦合器就够了, 在这种元件的两个相连接的波导中, 在一对相位常数相同或几乎相同的波型之间发生能的转换。实际上, 当研究一对简并或空间同步波型的完全转换时, 我们很自然地会意识到在这两类问题中我们处理着这样类似的现象!

当然, 对于第一类问题, 我们感兴趣的常常是决定在一段某种形式的波导结构中所产生的“不需要”的杂波幅度, 或者是当杂波幅度被限制在给定值之下时设计最佳或改进的波导结构, 而对于第二类问题, 我们的目的常常是计算在一个多波导系统中所发生的“需要”的能转换, 或者是根据给定的能转换值来设计定向耦合器。但是, 对“不需要”或“需要”波型变换的控制不一定是区别这两类问题的特点。事实上, 一个单一波导结构也同样能够用作“需要”波型的转换器或“耦合”器(例如波纹管和均匀介质填充管波型转换器<sup>[46][18]</sup>, 或双临界角弯波导<sup>[47]</sup>), 而对于一个由多个波导构成的定向耦合器, 也常常应该计算“不需要”波型的幅度, 以决定波型选择性(或杂波抑制性)。为了进一步解释这一点, 我

1) 在最近发表的一篇论文中, Белянцев 采取相似的途径研究了耦合谐振腔问题<sup>[40]</sup>。

2) 参阅 Miller 的论文<sup>[30]</sup>, 其中引用了 Schelkunoff 的公式。

3) 有几篇论文研究了不同形式的空间耦合系统(从狭义上说, 它们不是定向耦合器), 包括: 耦合弦和相互作用的链条, 耦合传输线和滤波器, 对流传层和电离层波导, 耦合表面波和耦合同轴线, 等等<sup>[35-38]</sup>。

們還可以指出,特殊設計的耦合波導也同樣能夠用作“不需要”波型或混雜波型濾波器<sup>[48]</sup>。

因而,在原理上也同時在實際上,對“不需要”和“需要”的波型變換兩者的控制應該是研究兩類波導傳輸問題的共同“焦點”。這就清楚地說明了為什麼在波導傳輸問題中我們十分需要一個統一的理論。

在以下各節中,我們將從電磁場邊值問題的提出開始,這個邊值問題是和我們所要研究的多波導系統相關連的。由我們所提出的理論,最後將得到一組均勻耦合波方程。為了說明所提理論的實際應用,我們將結合波導傳輸問題中一種重要類型的定向耦合器(長槽定向耦合器)的參數計算,來進行耦合波方程組的求解。對於均勻耦合波方程組,常系數常微分方程組的求解問題已經完全解決。對於具有緩變參數的定向耦合器,我們並不需要由電磁場邊值問題開始,從新建立一個理論。我們所要作的只是簡單地將耦合波方程組中的系數看作變數,然後採用本地簡正波方法來求解變系數微分方程組<sup>[49-50]</sup>。在這方面,作者曾提出過一個廣義的理論<sup>[51]</sup>。

為了便於閱讀,在本文附錄中列出了一個符號表。

## 第二部分 物理概念。槽耦合系統不同波導間 “聯系邊界條件”的建立

作者在開始構成多波導系統的耦合波理論時,最初的思想不過是這樣一個簡單的物理概念:一個複雜的波導結構應該能夠分成一些具有比較簡單幾何形狀的部分,其中每一部分的電磁場都能夠用一組適當的場結構或波型來表示。每一組這樣的波型,它們雖是封閉導體(簡單形狀波導)中可以獨立存在的電磁場,但在實際結構的相應部分卻是互相耦合的。同時,在相鄰兩個部分的两組波型之間也一定會發生“交叉耦合”<sup>1)</sup>,因為相鄰部分實際上是互相連接的,因而一部分的電磁場顯然要和相鄰部分的電磁場發生關係。

用“數學的語言”來說,上面扼要敘述的概念就是:為了求解一個複雜區域的電磁場邊值問題,我們可以將它劃分成幾個分區,在每一“開啟”分區中將電磁場展開為正交函數集(波型),而這個函數集是對應於相當的“封閉”分區的<sup>1)</sup>。在各個分區的邊界上,新的邊界條件不僅關係着各個分區內部許多波型之間的耦合,也同時關係着相鄰分區中許多波型之間的“交叉耦合”。

對於任意形狀的波導結構,如果將它劃分成任意幾個分區,實際上也很難求得一個複雜邊值問題的解,因為從物理概念就能知道,在這種任意的情形下,級數展開將要求過多的強耦合波型項。

但是,對於大多數我們可能遇到的多波導系統,例如各種類型的定向耦合器,我們所要劃分的分區很自然地是構成定向耦合器的一對或一些波導。同時,作為有效的波型變換器,定向耦合器幾個分區之間的邊界條件一定是這樣的,當電磁場展開成級數時,只要求很少幾項(幾個波型)就夠了。

1) 這是作者造用的一個詞,用它來形容在不同波導之間發生的波型耦合,以區別於在同一波導中發生的波型耦合。



同波导边界的这个特点,我們將称它們为“联系边界条件”。

从物理現象看,很容易列出长槽定向耦合器的耦合波方程。在定向耦合器的每一无限短小段中,任何一个波型  $F^i$  的幅度都会发生微小的变化,这变化一部分是因为这个波型本身沿这小段在传输,一部分是因为这个波型和其它波型发生耦合。根据这个简单的物理概念,我們就能直接列出下面的关系式:

$$\Delta F_{1,2}^i = - \sum_k K_{1,2}^{ik} F_{1,2}^k + \sum_k 'K_{2,1}^{ik} F_{2,1}^k, \quad (2)$$

其中具有相同角注( $i=k$ )的系数代表传播常数,而具有不同角注的系数則代表耦合系数。

上面的关系式,如果每項都除以  $\Delta z$  并趋于极限,就化为一組微分方程,这組方程我們將称为长槽定向耦合器的广义耦合波方程。

我們注意到,上面列出的多波导系統的耦合波方程和单一波导的耦合波方程是相似的,区别仅仅在于:在多波导耦合波方程中,除了包含每个波导中波型的耦合系数( $K$ )以外,同时还包含不同波导中波型之間的“交叉耦合”系数( $'K$ )(参看附录中的符号表)。

当然,为了求出耦合波方程所包含的耦合系数以及传播常数,我們还必须采取謹严的数学途径来解决相关的电磁場边值問題。在本文的下一部分,我們將提出解决这个边值問題的数学方法。从下一部分所得的結果(見方程 26),可以看出,对于一个长槽定向耦合器,無論是同一波导中波型之間的耦合,或是不同波导波型之間的“交叉耦合”,都只发生在那样一些磁波之間,它們在槽口上具有非零值的纵向磁場。

在采取数学途径求解之前,这里可以指出,上面叙述的长槽定向耦合器的耦合特性实际上可以从明哲的物理概念估計出来。

如前所述,在长槽定向耦合器中,同一波导和不同波导波型之間的耦合来源于在槽口存在着的磁場纵向分量  $\mathcal{H}_z$ 。我們也能从另一角度来看这个問題。波导內壁邻近的纵向磁場总是和在內壁上沿周向流动的传导电流相伴存在的。在波导壁上切去一个长槽,就会阻隔传导电流的流动,而这說明了为什么位移电流  $j\omega\epsilon\mathcal{E}$  出現在长槽中(根据連續性原理)。十分清楚,波导內壁上传导电流的被切断以及同时在长槽口上出現的周向电场,这是发生波型耦合現象的根源。由此可見,举例來說,当純圆电波( $H_{01}$ )投入长槽定向耦合器时,它将通过上述耦合“机构”轉化为其它波型,或者說和其它波型发生耦合。另一方面,当一些在长槽口上纵向磁場等于零的磁波以及所有的电波( $\mathcal{H}_z = 0$ )通过长槽定向耦合器时,由于波导內壁上传导电流的分布不会受到扰乱,长槽的存在就不在这些传输的波型之間引起耦合。因而,在这种意义上,可以說,在圆波导和矩形波导中,槽口上纵向磁場等于零的磁波<sup>1)</sup>以及所有的电波,在长槽定向耦合器中是“簡正”的。

在本文下一部分,我們將看到,这里根据物理現象列出的长槽定向耦合器的广义耦合波方程,是利用正交函数展开理論求解相关电磁場边值問題的直接結果。我們也将看到,上面关于长槽定向耦合器耦合特性的物理解释有着謹严的数学根据。

1) 对于圆波导,在槽口上磁場纵向分量等于零的磁波是具有奇数角向号碼的偶波( $\Pi_{nm}^* = \text{常数} \cdot J_n(x_{nm}^* \rho) \cos(n\varphi); n=1,3,5\cdots$ ),以及具有偶数角向号碼的奇波( $\Pi_{nm}^* = \text{常数} \cdot J_n(x_{nm}^* \rho) \sin(n\varphi); n=2,4,6\cdots$ ); 这里假定长槽位于  $\varphi = \pi/2$ 。对于矩形波导,在槽口上磁場纵向分量等于零的磁波是  $n=1,3,5\cdots$  的  $H_{nm}$  波(如果长槽是在寬壁的中綫上),或是  $m=1,3,5\cdots$  的  $H_{nm}$  波(如果长槽是在窄壁的中綫上)。

### 第三部分 数学方法

#### § 3.1 电磁场边值问题的提出

为了求解普遍的电磁场问题,我们常采用广义正交曲线坐标系 $(\eta, \zeta, \xi)$ ,在这种坐标系中,长度元 $dS$ 表示为 $dS^2 = h_1^2 d\eta^2 + h_2^2 d\zeta^2 + h_3^2 d\xi^2$ ,  $h_1, h_2$ 和 $h_3$ 是“度量系数”。因为实际的耦合波导系统或定向耦合器,很少是作成弯曲形状的,所以在这里我们对坐标系加上一个限制,  $h_3 = 1$ ; 这样,坐标 $\xi$ 就用 $z$ 来代替<sup>1)</sup>。

我们和通常一样考虑正弦交变电磁场,时间因子是 $e^{j\omega t}$ ; 由于可以利用 Laplace 变换方法,考虑正弦情形并不有损理论的普遍性。这样,场分量就理解为相应复量的实部,并且在没有自由电荷和电流的均匀媒质中,Maxwell 场方程可表示为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}(h_2 \mathcal{H}_\zeta) &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathcal{H}_z) - j\omega\epsilon h_2 \mathcal{E}_\eta, \\ \frac{\partial}{\partial z}(h_1 \mathcal{H}_\eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta}(\mathcal{H}_z) + j\omega\epsilon h_1 \mathcal{E}_\zeta, \\ \mathcal{E}_z &= -\frac{j}{\omega\epsilon} \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}(h_2 \mathcal{H}_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_1 \mathcal{H}_\eta) \right\}, \\ \frac{\partial}{\partial z}(h_2 \mathcal{E}_\zeta) &= \frac{\partial}{\partial \zeta}(\mathcal{E}_z) + j\omega\mu h_2 \mathcal{H}_\eta, \\ \frac{\partial}{\partial z}(h_1 \mathcal{E}_\eta) &= \frac{\partial}{\partial \eta}(\mathcal{E}_z) - j\omega\mu h_1 \mathcal{H}_\zeta, \\ \mathcal{H}_z &= \frac{j}{\omega\mu} \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}(h_2 \mathcal{E}_\zeta) - \frac{\partial}{\partial \zeta}(h_1 \mathcal{E}_\eta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这里 $\mu$ 和 $\epsilon$ 是波导结构中媒质的导磁系数和介电系数,并且对于有损耗媒质, $\epsilon$ 是复量 $(\epsilon - j\sigma/\omega)$ 。对于一个为完全导电壁所包围的区域,电磁场的边界条件或是切向电场等于零,或是法向磁场等于零,即

$$\mathcal{E}_{||} = 0, \text{ 或 } \mathcal{H}_n = 0, \text{ 在边界上.} \quad (4)$$

对于一个复杂的波导结构,我们根据具体的波导几何形状,将它划分为两个或多个分区。为了说明清楚起见,我们仍研究前面讨论过的两个分区的问题,这两个分区通过长槽而被连接在一起。

首先考虑两个独立的分区 1 和 2, 它们各被两个封闭的曲线 $\Sigma_{1,2} = S_{1,2} + \delta_{1,2}$  所包围, 这里 $S_{1,2}$ 属于两个波导的内壁,而 $\delta_{1,2}$ 是长槽两边的口。假定 $\Sigma_{1,2}$ 形成的两个柱面是完全导电的,那么,在分区 1 和 2 中,场分量能够从两个标函数集 $\Pi_{1,2}^{*i}(\eta, \zeta)$ 和 $\Pi_{1,2}^i(\eta, \zeta)$ 导出,它们各称为波型函数或磁和电 Hertz 矢量 $z$ 分量的横向部分。波型函数本身是波动方程的解:

$$\begin{aligned} \nabla_{1,2}^2 \Pi_{1,2}^{*i} &= \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*i}}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*i}}{\partial \zeta} \right) \right\} = -(\chi_{1,2}^{*i})^2 \Pi_{1,2}^{*i}, \\ \nabla_{1,2}^2 \Pi_{1,2}^i &= -(\chi_{1,2}^i)^2 \Pi_{1,2}^i, \end{aligned} \quad (5)$$

1) 当然,这个限制并非是不可缺少的。但是,不加上这个限制,在下面将得到的一些方程中会出现附加的曲率耦合项,而这些项在任何定向耦合器的实际设计中却并不需要。为了同样的原因,在整个论文中,我们都将假定波导结构中媒质的导磁系数和介电系数是均匀的。

边界条件是

$$\frac{\partial \Pi_{1,2}^{*i}}{\partial n} = 0, \quad \Pi_{1,2} = 0, \quad \text{在 } \Sigma_{1,2} = S_{1,2} + \delta_{1,2} \text{ 上.} \quad (6)$$

归一化条件和正交条件(或正交条件)是

$$\begin{aligned} (\chi_{1,2}^{*i})^2 \int_{\Omega_{1,2}} (\Pi_{1,2}^{*i})(\Pi_{1,2}^{*k}) d\Omega_{1,2} &= (\chi_{1,2}^i)^2 \int_{\Omega_{1,2}} (\Pi_{1,2}^i)(\Pi_{1,2}^k) d\Omega_{1,2} = \int_{\Omega_{1,2}} (\nabla_i \Pi_{1,2}^{*i}) \cdot (\nabla_i \Pi_{1,2}^{*k}) d\Omega_{1,2} \\ &= \int_{\Omega_{1,2}} (\nabla_i \Pi_{1,2}^i) \cdot (\nabla_i \Pi_{1,2}^k) d\Omega_{1,2} = \delta_{ik}; \quad (\delta_{ik} = 1, i = k; \delta_{ik} = 0, i \neq k). \\ \int_{\Omega_{1,2}} \left( \frac{\partial \Pi_{1,2}^i}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*k}}{h_2 \partial \zeta} - \frac{\partial \Pi_{1,2}^i}{h_2 \partial \zeta} \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*k}}{h_1 \partial \eta} \right) d\Omega_{1,2} &= \\ \int_{\Omega_{1,2}} \left( \frac{\partial \Pi_{1,2}^i}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \Pi_{1,2}^k}{h_2 \partial \zeta} - \frac{\partial \Pi_{1,2}^i}{h_2 \partial \zeta} \frac{\partial \Pi_{1,2}^k}{h_1 \partial \eta} \right) d\Omega_{1,2} &= 0, \quad (\text{对于所有 } i, k). \end{aligned} \quad (7)$$

在封闭曲线  $\Sigma_{1,2}$  所包围的两个独立分区 1 和 2 中, 电磁场可展开成下列级数:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{H}_{\eta_{1,2}} &= \sum_k \left\{ I_{1,2}^{*k}(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*k}}{h_1 \partial \eta} - I_{1,2}^k(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^k}{h_2 \partial \zeta} \right\}, \\ \mathcal{H}_{\zeta_{1,2}} &= \sum_k \left\{ I_{1,2}^{*k}(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*k}}{h_2 \partial \zeta} + I_{1,2}^k(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^k}{h_1 \partial \eta} \right\}, \\ \mathcal{E}_{\eta_{1,2}} &= \sum_k \left\{ U_{1,2}^{*k}(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*k}}{h_2 \partial \zeta} + U_{1,2}^k(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^k}{h_1 \partial \eta} \right\}, \\ \mathcal{E}_{\zeta_{1,2}} &= \sum_k \left\{ -U_{1,2}^{*k}(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*k}}{h_1 \partial \eta} + U_{1,2}^k(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^k}{h_2 \partial \zeta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这里  $I_{1,2}^{*i}(z)$  和  $U_{1,2}^{*i}(z)$  等是幅度函数, 它们象通常一样各称为“电流”和“电压”函数。

为了得到磁场和电场纵向分量的展开式, 可以将上列横向分量的级数代入 Maxwell 场方程(3)中的第 3 和第 6 式。我们注意到, 对于两个由完全导电壁所包围的独立区域, 上列展开式的每一项均适合 Maxwell 场方程, 并满足边界条件(4)(根据方程(5)和(6))。

当然, 对于实际的耦合波导结构, 我们还需要一组新的边界条件。在本文第二部分, 作者曾提出一个在长槽口上的联系边界条件。这里, 为了将长槽的边缘效应考虑在内, 我们可以采取一个稍微不同的途径来导出这个关系(这个途径是基于电路的概念)。由此, 作者得到下列一组适用于实际结构分区 1 和 2 的更加普遍的边界和联系边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*i}}{\partial \eta} &= 0, \quad \Pi_{1,2}^i = 0; \quad \text{在 } S_{1,2} \text{ 上,} \\ \mathcal{E}_{\zeta_{1,2}} &= \frac{j}{\omega \epsilon C \delta} (\mathcal{H}_{\eta_{1,2}} - \mathcal{H}_{\zeta_{1,2}}); \quad \text{在 } \delta_{1,2} \text{ 上,} \\ \mathcal{E}_{\eta_{1,2}} &= 0, \quad \text{在 } \Sigma_{1,2} \text{ 上,} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

这里的  $C$ , 我们将称为长槽每单位长度的电容系数。

上面加在长槽口上的联系边界条件(方程(9)的第二式), 是基于前面已作的假定( $\delta \ll \sigma \ll \lambda_g$ )。在这个假定下, 由于场在长槽中和槽口邻近是准稳定的和均匀的(如本文第二部分所述), 我们可以得到近似的关系式:  $\mathcal{E}_{\zeta} = \frac{V}{\delta} = \frac{I_d}{j\omega \epsilon C \delta}$ ,  $V$  是长槽两侧导电面之间的电压,  $I_d$  是长槽中的位移电流,  $C$  是长槽每单位长度形成的平行板空气电容器的电容。如果忽略平行板电容器电场的边缘效应, 那么  $C = \sigma/\delta$ , 而方程(9)的第二式就化为

以前列出过的联系边界条件(1)。为了更准确的计算,我们可以引用考虑了边缘电场发散的計算平行板电容器电容的任何改进公式<sup>1)</sup>或图表<sup>[4]</sup>,这样,长槽的整个特性都包括在一个几何的(其实也是物理的)参量  $C$  之中。

### § 3.2 边值问题的求解

我们现在来求解上面提出的电磁场边值问题。将展开式(8)代入 Maxwell 场方程(3)的第 1, 2, 4 和 5 式,组成这样的新方程,使得它们的每一项在作截面积分时,归一化条件和正交条件(7)都能够有利地被利用;这样,我们就得到下列的微分积分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_{1,2}^{*i}}{dz} &= \int_{\Omega_{1,2}} \nabla_t(\mathcal{H}_{z1,2}) \cdot \nabla_t \Pi_{1,2}^{*i} d\Omega_{1,2} - j\omega\epsilon U_{1,2}^{*i}, \\ \frac{dI_{1,2}^i}{dz} &= \int_{\Omega_{1,2}} \left\{ \frac{\partial \Pi_{1,2}^i}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial}{h_2 \partial \zeta} (\mathcal{H}_{z1,2}) - \frac{\partial \Pi_{1,2}^i}{h_2 \partial \zeta} \frac{\partial}{h_1 \partial \eta} (\mathcal{H}_{z1,2}) \right\} d\Omega_{1,2} - j\omega\epsilon U_{1,2}^i, \\ \frac{dU_{1,2}^{*i}}{dz} &= - \int_{\Omega_{1,2}} \left\{ \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*i}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial}{h_2 \partial \zeta} (\mathcal{E}_{z1,2}) - \frac{\partial \Pi_{1,2}^{*i}}{h_2 \partial \zeta} \frac{\partial}{h_1 \partial \eta} (\mathcal{E}_{z1,2}) \right\} d\Omega_{1,2} - j\omega\mu I_{1,2}^{*i}, \\ \frac{dU_{1,2}^i}{dz} &= \int_{\Omega_{1,2}} \nabla_t(\mathcal{E}_{z1,2}) \cdot \nabla_t \Pi_{1,2}^i d\Omega_{1,2} - j\omega\mu I_{1,2}^i. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

为了求解上面的微分积分方程,我们将它们变换为微分方程的形式。让我们按次序来考虑上面的 4 个方程。

对于方程组(10)的第一式,我们将场分量  $\mathcal{H}_z$  展开成下面的形式:

$$\mathcal{H}_{z1,2} = \sum_k \chi_{1,2}^{*k} i_{1,2}^{*k}(z) \Pi_{1,2}^{*k}. \quad (11)$$

当这个展开式代入方程组(10)的第一式以代替  $\mathcal{H}_z$  时,由归一化和正交条件(7),就可以知道,这个方程右边的第一项积分将变为  $\chi_{1,2}^{*i} i_{1,2}^{*i}$ 。因而,我们的下一步骤是决定磁场纵向分量的幅度函数,  $i_{1,2}^{*i}$ ; 显然这将是更加复杂的工作。

为了决定  $i_{1,2}^{*i}$ , 我们将  $\mathcal{E}_z$  分成两个部分,第一部分是由那些在长槽两边口上纵向磁场不等于零的磁波产生的,而第二部分则是在长槽口上纵向磁场等于零的磁波以及所有的电波所产生的。根据加在长槽口上的边界条件,我们进一步假定,后一部分的场分量可以展开成方程(8)第 4 式的形式,而前一部分则必须作另外的处理。这样,我们就得出下面的展开式:

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z^* + \sum_k \left\{ -\check{U}_{1,2}^{*k}(z) \frac{\partial \check{\Pi}_{1,2}^{*k}}{h_1 \partial \eta} + U_{1,2}^k(z) \frac{\partial \Pi_{1,2}^k}{h_2 \partial \zeta} \right\}, \quad (12)$$

这里(Λ)和(V)各代表在长槽口上纵向磁场不等于零和等于零的磁波。

现在,让我们将展开式(11)和(12)代入 Maxwell 场方程(3)的第 6 式,将这个方程的每一项都依次乘以  $\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}$  和  $\check{\Pi}_{1,2}^{*i}$ , 然后在分区 1 和 2 的截面上作积分。于是,利用  $\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}$  和  $\check{\Pi}_{1,2}^{*i}$  的正交特性(即这两个函数乘积的截面积分等于零),我们就得到下面的决定  $i_{1,2}^{*i}$  和  $\check{i}_{1,2}^{*i}$  的方程组:

1) 当计算平行板电容器的电容或二磁极间气隙的磁导时,如果平板间隙或气隙不太宽,边缘效应常常是这样考虑的,就是,可认为电容器或气隙横截面的长宽各加了一个约等于平板间隙或气隙的长度。这样,在我们的问题中,对于不太宽的长槽,我们就能应用简单的近似公式  $C \approx (\sigma + \delta)/\delta$ 。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{t}_{1,2}^{*i}}{\hat{\chi}_{1,2}^{*i}} &= \frac{j}{\omega\mu} \left\{ \int_{\Omega_{1,2}} \frac{\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 \mathcal{E}_\zeta^*) d\Omega_{1,2} - \sum_k \left[ \int_{\Omega_{1,2}} \frac{\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \hat{\Pi}_{1,2}^{*k}}{\partial \zeta} \right) d\Omega_{1,2} \right] \hat{U}_{1,2}^{*k} \right\}, \\ \frac{\hat{t}_{1,2}^{*i}}{\hat{\chi}_{1,2}^{*i}} &= \frac{j}{\omega\mu} \left\{ \int_{\Omega_{1,2}} \frac{\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 \mathcal{E}_\zeta^*) d\Omega_{1,2} - \sum_k \left[ \int_{\Omega_{1,2}} \frac{\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \hat{\Pi}_{1,2}^{*k}}{\partial \zeta} \right) d\Omega_{1,2} \right] \hat{U}_{1,2}^{*k} + 1 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (13-a, b)$$

对于方程(13a)右边第一项,我们作如下的分部积分:

$$\begin{aligned} & \int_{(\zeta_{1,2})_0}^{(\zeta_{1,2})^\circ} \int_{(\eta_{1,2})_0}^{(\eta_{1,2})^\circ} \hat{\Pi}_{1,2}^{*i} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_2 \mathcal{E}_\zeta^*) d\eta d\zeta \\ &= \int_{(\zeta_{1,2})_0}^{(\zeta_{1,2})^\circ} \left\{ \hat{\Pi}_{1,2}^{*i} (h_2 \mathcal{E}_\zeta^*) \Big|_{(\eta_{1,2})_0}^{(\eta_{1,2})^\circ} - \int_{(\eta_{1,2})_0}^{(\eta_{1,2})^\circ} (h_2 \mathcal{E}_\zeta^*) \frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}) d\eta \right\} d\zeta. \end{aligned} \quad (14)$$

对于实际的定向耦合器,我们总可以这样来安置分区 1 和 2 的坐标,使得  $\eta = (\eta_{1,2})^\circ$  包含长槽两边的口,而  $\eta = (\eta_{1,2})_0$  则或者是坐标系的原点(如在圆形的分区中),或者是波导边界的某些部分(如在矩形的分区中). 对于任何一种情形,除了在长槽两边的口上(这里的坐标是  $\eta = (\eta_{1,2})^\circ$ ,  $\zeta_{1,2} < \zeta < \zeta_{1,2}^\circ$ ), 在整个  $\eta = (\eta_{1,2})_0$  和  $\eta = (\eta_{1,2})^\circ$  上,  $\mathcal{E}_\zeta$  都等于零. 在长槽两边口上的这些特殊部分,我们应用(9)中的“联系边界条件”,其中  $\mathcal{E}_\zeta$  等于  $\mathcal{E}_\zeta^*$ , 因为方程(9)中的  $\mathcal{H}_{z1,2}$  仅仅是那些在长槽口上纵向磁场不等于零的磁波产生的. 这样,将联系边界条件(9),然后将展开式(11)依次代入方程(14)的第一项,我们就得到

$$\frac{j}{\omega\epsilon C \delta} \int_{\zeta_{1,2}}^{\zeta_{1,2}^\circ} \hat{\Pi}_{1,2}^{*i}(\eta_{1,2}^\circ, \zeta_{1,2}) \sum_k \{ \hat{\chi}_{2,1}^{*k} \hat{t}_{2,1}^{*k} \hat{\Pi}_{2,1}^{*k}(\eta_{2,1}^\circ, \zeta_{2,1}) - \hat{\chi}_{1,2}^{*k} \hat{t}_{1,2}^{*k} \hat{\Pi}_{1,2}^{*k}(\eta_{1,2}^\circ, \zeta_{1,2}) \} h_2 d\zeta_{2,1}. \quad (15)$$

在已作的假定( $\delta \ll \sigma \ll \lambda_g$ )下,可以认为长槽口上的  $\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}$  是均匀的<sup>1)</sup>, 于是上面的积分化为下列形式<sup>2)</sup>:

$$\frac{j}{\omega\epsilon C} \sum_k \{ (\hat{\Pi}_{1,2}^{*i} \hat{\Pi}_{2,1}^{*k}) \hat{\chi}_{2,1}^{*k} \hat{t}_{2,1}^{*k} - (\hat{\Pi}_{1,2}^{*i} \hat{\Pi}_{1,2}^{*k}) \hat{\chi}_{1,2}^{*k} \hat{t}_{1,2}^{*k} \}, \quad (16)$$

这里,  $(\eta_{1,2}^\circ, \zeta_{1,2}^\circ)$  是在长槽口的中心;为简单起见,式中  $\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}$  代替了  $\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}(\eta_{1,2}^\circ, \zeta_{1,2}^\circ)$ .

对于(14)式右边第二项,我们将  $\mathcal{E}_\zeta^*$  用展开式(8d)右边第一项级数来表示. 这样,由(13a), (14)和(16),我们就得到下列决定  $\hat{t}_{1,2}^{*i}$  的方程组:

$$\begin{aligned} & - \sum_{k \neq i} \frac{\hat{\Pi}_{1,2}^{*i} \hat{\Pi}_{1,2}^{*k}}{K^2 C} \hat{\chi}_{1,2}^{*k} \hat{t}_{1,2}^{*k} + \left\{ \frac{1}{(\hat{\chi}_{1,2}^{*i})^2} - \frac{(\hat{\Pi}_{1,2}^{*i})^2}{K^2 C} \right\} \hat{\chi}_{1,2}^{*i} \hat{t}_{1,2}^{*i} + \sum_k \frac{\hat{\Pi}_{1,2}^{*i} \hat{\Pi}_{2,1}^{*k}}{K^2 C} \hat{\chi}_{2,1}^{*k} \hat{t}_{2,1}^{*k} \\ &= \frac{j}{\omega\mu} \sum_k \left\{ \int_{\Omega_{1,2}} \left[ \frac{\partial \hat{\Pi}_{1,2}^{*i}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \hat{\Pi}_{1,2}^{*k}}{h_1 \partial \eta} - \frac{\hat{\Pi}_{1,2}^{*i}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \hat{\Pi}_{1,2}^{*k}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_{1,2} \right\} \hat{U}_{1,2}^{*k}. \end{aligned} \quad (18)$$

为了将纵向磁场的电流幅度函数表示成横向电场的电压幅度函数,方程组(18)所包

1) 这相当于认为  $\sin\theta/\theta \simeq 1$  ( $\theta = \delta/R$  是槽口对于圆波导中心所张的角);对于小的  $\theta$  值,这样的考虑不致引起任何显著的误差.

2) 这里,不难将我们的方法加以推广,用于更加复杂的波导结构,例如 Персиков 的定向耦合器<sup>[88]</sup>,它包括一个中间波导和数目相当多的,例如 4 个,侧波导. 对于这样的定向耦合器,如果采用长槽耦合,那么,方程(16)就将变为:

$$\sum_n j/(\omega\epsilon C) \sum_k \{ (\hat{\Pi}_{1,n}^{*i} \hat{\Pi}_{n,1}^{*k}) \hat{\chi}_{n,1}^{*k} \hat{t}_{n,1}^{*k} - (\hat{\Pi}_{1,n}^{*i} \hat{\Pi}_{1,n}^{*k}) \hat{\chi}_{1,n}^{*k} \hat{t}_{1,n}^{*k} \}, \quad (17)$$

虽然在这里指出了推广我们方法的可能性,但是,为了使以后的公式尽量简单,我们将不再采用(17)式的形式.

括的方程数是必要的,同时也是充分的.因为在几乎所有的具体问题中,我們实际上仅仅处理有限数目的波型,所以,这里在求解方程組(18)中 $i_{1,2}^{*i}$ 的时候,我們就不去考虑无穷多項的运算問題.

对于方程組(18),我們可以将它简单地表示成下面的矩陣形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}\mathbf{i} &= \mathbf{U} \\ \mathbf{i} &= \mathbf{y}\mathbf{U} \end{aligned} \quad (19)$$

在一个具体的問題中,如果对于波导 1,被考虑的波型数是  $p$ ,而对于波导 2,被考虑的波型数是  $q$ ,那么,方程(19)中的  $\mathbf{i}$  就代表一个包含  $(p+q)$  元的列矩陣,  $(i_1^{*1}, i_1^{*2}, \dots, i_1^{*p}; i_2^{*1}, i_2^{*2}, \dots, i_2^{*q})$ ;  $\mathbf{U}$  代表一个包含  $(p+q)$  元的列矩陣,它的元是(18)式右边的各項;  $\mathbf{Z}$  代表一个  $(p+q)$  阶的方陣,它的元是(18)式左边的各系数,同时  $\mathbf{y} = \mathbf{Z}^{-1}$ . 应用矩陣代数方法,我們直接得到下面表示  $i_{1,2}^{*i}$  的公式:

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_{1^{*i}i_1^{*i}} &= \sum_{k=1}^p y_1^{(*i)(*k)} \hat{U}_1^{*k} + \sum_{k=1}^q y_2^{(*i)(*k)} \hat{U}_2^{*k}, \\ \hat{\chi}_{2^{*i}i_2^{*i}} &= \sum_{k=1}^q y_2^{(*i)(*k)} \hat{U}_2^{*k} + \sum_{k=1}^p y_1^{(*i)(*k)} \hat{U}_1^{*k}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} y_1^{(*i)(*k)} \\ y_2^{(*i)(*k)} \end{matrix} \right\} &= \frac{j}{\omega\mu} \sum_{r=1}^p \int_{Q_1} \left[ \frac{\partial \hat{U}_1^{*r}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \hat{U}_1^{*k}}{h_1 \partial \eta} - \frac{\hat{U}_1^{*r}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( h_2 \frac{\partial \hat{U}_1^{*k}}{\partial \zeta} \right) \right] dQ_1 \left\{ \begin{matrix} y_1^{ir} \\ y_2^{ir} \end{matrix} \right\}, \\ \left\{ \begin{matrix} y_2^{(*i)(*k)} \\ y_1^{(*i)(*k)} \end{matrix} \right\} &= \frac{j}{\omega\mu} \sum_{r=1}^q \int_{Q_2} \left[ \frac{\partial \hat{U}_2^{*r}}{h_2 \partial \eta} \frac{\partial \hat{U}_2^{*k}}{h_2 \partial \eta} - \frac{\hat{U}_2^{*r}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( h_1 \frac{\partial \hat{U}_2^{*k}}{\partial \zeta} \right) \right] dQ_2 \left\{ \begin{matrix} y_2^{ir} \\ y_1^{ir} \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

为了說明上面式子中  $y_{1,2}^{ir}$  和  $\tilde{y}_{1,2}^{ir}$  所代表的意义,我們將方程(19)中的矩陣  $\mathbf{y}$  划分成 4 个部分或分矩陣,其左上和右下分矩陣各为  $p$  和  $q$  阶方陣,而右上和左下則各为  $p \times q$  和  $q \times p$  长方陣. 这样,  $y_1^{ir}$  和  $y_2^{ir}$  就分別代表在左上和右下分矩陣中第  $i$  行和  $r$  列的元,而  $\tilde{y}_1^{ir}$  和  $\tilde{y}_2^{ir}$  則分別代表左下和右上分矩陣中相当的元.

現在,回到方程(13)的第一式. 对于这个方程的右边第一項,我們假定,至少就計算这一項的积分來說,  $\mathcal{E}_\zeta^*$  可以用展开式(8)的第四式右边第一項級数来代替. 为了說明作这样的假定是合理的,我們指出这样一个事实,就是虽然上述被用来代替  $\mathcal{E}_\zeta^*$  的級数在封閉区域 1 和 2 中是非均匀收敛的(因为  $\mathcal{E}_\zeta^*$  在边界上处处等于零,但在长槽两边的口上并不等于零),但是,  $\hat{U}_{1,2}^{*i}$  在长槽两边口上却等于零. 因此,当我們象对方程(14)一样作分部积分时,从(13)第二式右边第一項所得到的結果,就正和将  $\mathcal{E}_\zeta^*$  代以級数后再逐項作分部积分所得結果一样. 这样,在上述假定下,利用  $\hat{U}_{1,2}^{*i}$  和  $\hat{U}_{1,2}^{*j}$  的正交特性,我們就从(13)的第二式得到下列的簡單方程:

$$\frac{\hat{U}_{1,2}^{*i}}{\hat{\chi}_{1,2}^{*i}} = \frac{j}{\omega\mu}. \quad (21)$$

得到了用(20)和(21)两式表示的  $i_{1,2}^{*i}$  和  $\tilde{i}_{1,2}^{*i}$ , (10) 式中第一个微分积分方程就化为两个微分方程,各对应于在长槽两边口上纵向磁場不等于零和等于零的磁波.

对于方程組(10)的第二式,当展开式(11)代到右边第一項以代替  $\mathcal{E}_\zeta^*$  时,这一項将变为零(根据正交条件(7)). 因而,方程組(10)的第二式直接化为微分方程的形式.

相似的,对于方程組(10)的第三式,我們將  $\mathcal{E}_z$  代以 Maxwell 方程的第三式,然后利用正交条件(7),就能証明这个式子的右边第一項积分等于零。这样,方程組(10)的第三式也直接化为微分方程的形式。

現在,讓我們来考虑方程組(10)的最后一式。应用 Green 定理的二維形式,我們將这个方程右边第一項变换为一个綫积分和一个面积分之和,即

$$\int_{\Omega_{1,2}} (\nabla_t \mathcal{E}_{z1,2}) \cdot (\nabla_t \Pi_{1,2}^i) d\Omega_{1,2} = \oint_{\Sigma_{1,2}} (\mathcal{E}_{z1,2}) \frac{\partial}{\partial \eta} (\Pi_{1,2}^i) h_2 d\zeta - \int_{\Omega_{1,2}} (\mathcal{E}_{z1,2}) \nabla_t^2 \Pi_{1,2}^i d\Omega_{1,2}, \quad (22)$$

上列方程中的綫积分变为零,根据边界条件(9)。对于面积分,將  $\mathcal{E}_z$  代以 Maxwell 方程的第三式;这样,由(5)式,这个积分就变为  $\frac{j}{\omega \epsilon} (\chi_{1,2}^i)^2 I_{1,2}^i$ 。

总结上面的結果,我們最后得到下列长槽定向耦合器等效耦合传输綫的耦合“电流”和“电压”方程組:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{I}_{1,2}^{*i}}{dz} &= - \sum_k \hat{Y}_{1,2}^{(*i)(*k)} \hat{U}_{1,2}^{*k} + \sum_k \hat{Y}_{2,1}^{(*i)(*k)} \hat{U}_{2,1}^{*k}, \\ \frac{d\check{I}_{1,2}^{*i}}{dz} &= - \check{Y}_{1,2}^{*i} \check{U}_{1,2}^{*i}, \\ \frac{dI_{1,2}^i}{dz} &= - Y_{1,2}^i U_{1,2}^i, \\ \frac{dU_{1,2}^{*i}}{dz} &= - Z_{1,2}^{*i} \Gamma_{1,2}^{*i}, \\ \frac{dU_{1,2}^i}{dz} &= - Z_{1,2}^i \Gamma_{1,2}^i. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{1,2}^{(*i)(*i)} &= - \hat{y}_{1,2}^{(*i)(*i)} + j\omega\epsilon, \\ \hat{Y}_{1,2}^{(*i)(*k)} &= - \hat{y}_{1,2}^{(*i)(*k)}, \quad k \neq i, \\ \check{Y}_{1,2}^{*i} &= \frac{j}{\omega\mu} (\check{\beta}_{1,2}^{*i})^2, \\ Y_{1,2}^i &= j\omega\epsilon, \\ Z_{1,2}^{*i} &= j\omega\mu, \\ Z_{1,2}^i &= \frac{j}{\omega\epsilon} (\beta_{1,2}^i)^2. \end{aligned}$$

在上列方程中,  $\hat{y}_{2,1}$  及  $\hat{y}_{1,2}$  由公式(20)来表示。

在实际問題中,为方便起見,常常是采用向前和向后行波的耦合方程組,而不直接采用“电流”和“电压”的耦合方程組。为了将方程組(23)变换成所需要的形式,我們引用下列传输綫理論中熟知的关系式:

$$\begin{aligned} I &= A^{-\frac{1}{2}} (E^+ - E^-), \\ U &= A^{\frac{1}{2}} (E^+ + E^-), \end{aligned} \quad (24)$$

这里,  $E^\pm$  各为向前和向后波的幅度。將行波幅度归一化使  $|E^\pm|^2$  直接代表功率流,这样,  $A$  就等于波阻抗:

$$\begin{aligned} A_{1,2}^{*k} &= \frac{\omega\mu}{\beta_{1,2}^{*k}} = \frac{\omega\mu}{\{K^2 - (\chi_{1,2}^{*k})^2\}^{1/2}}, \\ A_{1,2}^k &= \frac{\beta_{1,2}^k}{\omega\epsilon} = \frac{\{K^2 - (\chi_{1,2}^k)^2\}^{1/2}}{\omega\epsilon}, \end{aligned} \quad (25)$$

这里,  $\beta$  是相应波型的未微扰相位常数.

于是, 由(23)和(24)式, 我們得到下列耦合波方程組:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{E}_{1,2}^{(*i)\pm}}{dz} &= - \sum_k \left( \hat{K}_{1,2}^{(*i)\pm(*k)+} \hat{E}_{1,2}^{(*k)+} + \hat{K}_{1,2}^{(*i)\pm(*k)-} \hat{E}_{1,2}^{(*k)-} \right) + \\ &\quad + \sum_k \left( {}^t\hat{K}_{2,1}^{(*i)\pm(*k)+} \hat{E}_{2,1}^{(*k)+} + {}^t\hat{K}_{2,1}^{(*i)\pm(*k)-} \hat{E}_{2,1}^{(*k)-} \right), \\ \frac{d\check{E}_{1,2}^{(*i)\pm}}{dz} &= - \check{K}_{1,2}^{(*i)\pm} \check{E}_{1,2}^{(*i)\pm}, \\ \frac{dE_{1,2}^{i\pm}}{dz} &= - K_{1,2}^{i\pm} E_{1,2}^{i\pm}, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{K}_{1,2}^{(*i)\pm(*i)\pm} &= \pm \frac{j}{2} \left\{ \hat{\beta}_{1,2}^{*i} + \frac{K^2}{\hat{\beta}_{1,2}^{*i}} - \frac{\omega\mu}{j\hat{\beta}_{1,2}^{*i}} \gamma_{1,2}^{(*i)(*i)} \right\}, \\ \hat{K}_{1,2}^{(*i)\pm(*i)\mp} &= \pm \frac{j}{2} \left\{ -\hat{\beta}_{1,2}^{*i} + \frac{K^2}{\hat{\beta}_{1,2}^{*i}} - \frac{\omega\mu}{j\hat{\beta}_{1,2}^{*i}} \gamma_{1,2}^{(*i)(*i)} \right\}, \\ \hat{K}_{1,2}^{(*i)+(*k)\pm} &= -\hat{K}_{1,2}^{(*i)-(*k)\pm} = -\frac{1}{2} (\hat{A}_{1,2}^{*i} \hat{A}_{1,2}^{*k})^{1/2} \gamma_{1,2}^{(*i)(*k)}, \quad k \neq i, \\ {}^t\hat{K}_{2,1}^{(*i)+(*k)\pm} &= -{}^t\hat{K}_{2,1}^{(*i)-(*k)\pm} = \frac{1}{2} (\hat{A}_{1,2}^{*i} \hat{A}_{2,1}^{*k}) \gamma_{2,1}^{(*i)(*k)}, \\ \check{K}_{1,2}^{(*i)\pm} &= \pm j\check{\beta}_{1,2}^{*i}, \\ K_{1,2}^{i\pm} &= \pm j\beta_{1,2}^{i\pm}. \end{aligned}$$

为简单起见, 可以将耦合波方程組表示成下列的矩阵方程形式:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{K}\mathbf{E} \quad (27)$$

列矩阵  $\dot{\mathbf{E}}$ ,  $\mathbf{E}$  和方阵  $\mathbf{K}$  所代表的意义是十分明显的; 只要我們用一些符号来代表矩阵的元, 然后逐项比较方程組(26)和(27), 就能决定矩阵所有的元.

由方程組(26), 我們很清楚地看到, 正象以前根据物理概念估计的一样, 同一波导中波型的耦合以及不同波导中波型的“交叉耦合”, 仅仅发生在这样一些磁波之間, 它們在长槽两边口上的纵向磁场不等于零. 对于在长槽口上纵向磁场等于零的那些磁波, 以及对于所有的电波, 波型之間不发生耦合. 此外, 这里还可以指出, 在  $\hat{K}_{1,2}^{(*i)\pm(*i)\pm}$  的公式中,

$\frac{\omega\mu}{\hat{\beta}_{1,2}^{*i}} \gamma_{1,2}^{(*i)(*i)}$  和  $(\hat{\chi}_{1,2}^{*i})^2 / \hat{\beta}_{1,2}^{*i}$  的差代表长槽耦合所产生的相位常数的微扰.

#### 第四部分 应用举例

现在, 让我们进一步来研究长槽定向耦合器的耦合波方程. 为了说明本文所提理論和方法的具体应用, 这里我們將計算均匀耦合长槽定向耦合器的最主要的一些特性参数.

即耦合量、轉換長度、波導的“微擾尺寸”、方向性、反射系數、雜波抑制性(波型選擇性)和頻率特性。我們將不討論關於這種類型定向耦合器設計問題的某些細節,例如,最佳參數的選擇以及槽諧振的防止,等等;這些問題超出了本文所討論的範圍。

#### § 4.1 長槽定向耦合器的耦合量、轉換長度和“微擾尺寸”

為了計算定向耦合器的耦合量或總的能轉換,我們將作這樣的近似分析,即忽略所有其他的波型,而僅僅考慮一對耦合最緊的(強耦合)波型,它們常常是在兩個波導中向前傳輸的波,其相位常數相同或者幾乎相同。因此,方程組(26)近似地化為下列兩個向前耦合波方程<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_1}{dz} &= -K_1 E_1 + {}'K_2 E_2, \\ \frac{dE_2}{dz} &= {}'K_1 E_1 - K_2 E_2. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

為簡單起見,這裡  $E_{1,2}$  代替了方程組(26)<sup>1)</sup>中的  $E_{1,2}^{(*)+}$ ,  $K_{12}$  代替了  $K_{1,2}^{(*)+}({}^{(*)})^+$ , 並且  ${}'K_{2,1}$  代替了  ${}'K_{2,1}^{(*)+}({}^{(*)})^+$ 。十分明顯,上面的一對耦合波方程正是 Miller 在他的“耦合波理論”<sup>[2]</sup>中從現象方面直接寫出的形式。但是,Miller 不曾計算耦合系數  ${}'K_{2,1}$  和微擾(修正)傳播常數  $K_{1,2}$ , 而這些都是在研究定向耦合器時所必需知道的重要參數。

讓我們應用本文前面幾節得到的公式來計算上述參數。從(26),(28),(23)和(20),我們得到

$$\left. \begin{aligned} K_{1,2} = jh_{1,2} &= \frac{j}{2} \left\{ \beta_{1,2}^* + \frac{K^2}{\beta_{1,2}^*} - \frac{1}{\beta_{1,2}^*} \frac{(\chi_{2,1}^*)^{-2} - (\Pi_{2,1}^*)^2 / K^2 C}{\mathcal{D}} \int_{\Omega_{1,2}} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_{1,2}^*}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\Pi_{1,2}^*}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_{1,2}^*}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_{1,2} \right\}, \\ {}'K_{2,1} = j{}'c_{2,1} = jc_0 &= \frac{-j}{2(\beta_1^* \beta_2^*)^{1/2}} \frac{\Pi_1^* \Pi_2^* / K^2 C}{\mathcal{D}} \int_{\Omega_{1,2}} \left\{ \left( \frac{\partial \Pi_{2,1}^*}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Pi_{2,1}^*}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_{2,1}^*}{\partial \zeta} \right) \right\} d\Omega_{2,1}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中

$$\mathcal{D} = \{(\chi_1^*)^{-2} - (\Pi_1^*)^2 / K^2 C\} \{(\chi_2^*)^{-2} - (\Pi_2^*)^2 / K^2 C\} - (\Pi_1^* \Pi_2^* / K^2 C)^2,$$

這裡  $h_1$  和  $h_2$  代表微擾相位常數,  $c_0$  代表耦合系數的大小。

在上列公式中,符號上一些前面用過的標註省略了,原因是這裡我們僅僅處理兩個耦合波型,省去一些標註不會引起任何混亂。

對於一個用來變換圓電波為矩形波導主波或作相反變換的長槽定向耦合器,公式(29)中的兩個波型函數<sup>1)</sup>各為

$$\left. \begin{aligned} \Pi_1^* = \Pi_{01}^* &= \frac{J_0(\chi_{01}^* \rho)}{\sqrt{\pi} (\chi_{01}^* R) J_0(\chi_{01}^* \rho)}; \quad J_0'(\chi_{01}^* R) = 0, \quad \chi_{01}^* = \frac{3.832}{R}, \\ \Pi_2^* = \Pi_{10}^* &= \frac{\sqrt{2a/b}}{\pi} \cos \frac{\pi}{a} x. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

1) 在本文的整個這一部分,符號上的標註(Λ)均省去不寫,因為很清楚,這裡我們所考慮的波型都是在長槽兩邊口上縱向磁場不等於零的磁波。

将公式(30)代入(29),然后算出一些面积分,就得到下列适用于圆波导——矩形波导长槽定向耦合器的参数计算公式:

$$\left. \begin{aligned} h_1 = h_{01} &= \frac{1}{2} \left\{ \beta_{01}^* + \frac{K^2}{\beta_{01}^*} - \frac{1}{\beta_{01}^*} \frac{(\chi_{10}^*)^{-2} - 2a(\pi^2 K^2 b C)^{-1}}{(\mathcal{D})} \right\}, \\ h_2 = h_{10} &= \frac{1}{2} \left\{ \beta_{10}^* + \frac{K^2}{\beta_{10}^*} - \frac{1}{\beta_{10}^*} \frac{(\chi_{01}^*)^{-2} - (\chi_{01}^* R K)^{-2} (\pi C)^{-1}}{(\mathcal{D})} \right\}, \\ c_0 &= \frac{-1}{2(\beta_{01}^* \beta_{10}^*)^{1/2}} \frac{(2a/b)^{1/2} (\chi_{01}^* R K^2 C)^{-1} \pi^{-3/2}}{(\mathcal{D})}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中

$$(\mathcal{D}) = \{(\chi_{10}^*)^{-2} - 2a(\pi^2 K^2 b C)^{-1}\} \{(\chi_{01}^*)^{-2} - (\chi_{01}^* R K)^{-2} (\pi C)^{-1}\} - (2a/b)(\pi^{3/2} \chi_{01}^* R K^2 C)^{-2}.$$

从(31)或(29),我们看到,一对耦合向前波的微扰相位常数以及它们之间的耦合系数,都是虚数。这个结果是很自然的,只要我們想到,这里所作的分析曾经暗含这样的假定:不仅定向耦合器波导内壁是完全导电的,而且耦合机构也是无损耗的。同时,我们还看到,在耦合波方程中两个耦合系数是相等的,这符合能量守恒原理。

这样,从(31)式算出了两个耦合波方程中的系数,我們就能直接求解这个方程组。常用的端点条件是  $E_1(0) = 1$ ,  $E_2(0) = 0$ ; 在这两个条件下,我們能够计算两个向前波在沿着定向耦合器开槽部分通过给定距离之后的幅度:

$$\left. \begin{aligned} E_1(z) &= \{ \cos[(1+Q^{-2})^{1/2} c_0 z] - jQ^{-1}(1+Q^{-2})^{-1/2} \sin[(1+Q^{-2})^{1/2} c_0 z] \} \times \\ &\times \exp\{-j[(h_1 + h_2)/2 + c_0]z\}, \\ E_2(z) &= j(1+Q^{-2})^{-1/2} \sin[(1+Q^{-2})^{1/2} c_0 z] \exp\{-j[(h_1 + h_2)/2 + c_0]z\}, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

式中  $Q = 2c_0/(h_1 - h_2)$  是一个参数,它经常出现在耦合波方程的解的公式中。为了区别这个参数和耦合系数  $c_0$ ,我們將称它为对应于我們所考虑的一对耦合波的“耦合能力”。事实上,不是耦合系数  $c_0$ ,而是  $c_0$  对  $\Delta h = h_1 - h_2$  (两个耦合波的相位差)的比值,才决定耦合量。

从上面的方程可以直接得出转换长度和转换损失的公式:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\pi}{2c_0} (1+Q^{-2})^{-1/2}, \\ T &= 10 \log (1+Q^{-2}) \sin^{-2}[(1+Q^{-2})^{1/2} c_0 z], \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

这里,我們感兴趣的是零分貝定向耦合器,它是用来完成能的全部转换的。根据(33),可以得出结论,为了完成能的全部转换,我們应该这样来选择波导和长槽的横截面尺寸,使得两个波导中波型的微扰相位常数恰恰相等。从(33)和(31),零分貝长槽定向耦合器的交换长度等于<sup>1)</sup>

1) 这里假定长槽开在矩形波导窄边的中线上。

1) 正象在第一部分一个角註中所提到的,在几篇已发表的论文中,定向耦合器所完成的波型转换被看成是空间的差拍现象<sup>[43,44]</sup>。于是,转换长度就表示为  $L = \pi/(\beta_I - \beta_{II})$ ,  $\beta_{I,II}$  是定向耦合器的一对“简正波型”的相位常数。所引论文的主要工作正是采取不同途径来决定这些相位常数。这里,让我们指出,当写出了耦合波方程并且决定了方程中的所有系数时[如本节的方程(28)–(31)],我們可以很容易地采用矩阵对角线化的方法来计算定向耦合器“简正波型”的相位常数<sup>[31]</sup>。例如,对于微扰相位常数相等的情形,我們將耦合波方程(28)系数所构成的矩阵对角线化,所得对角线矩阵的两个元将各为  $\beta_{I,II} = h \pm c_0$ 。由此可见,转换长度等于  $\pi/2c_0$ ; 这个结果和本文由耦合波方程(32)的解得到的相符合。

$$L = \frac{\pi(\beta_{01}^*\beta_{10}^*)^{1/2}\{[(\chi_{01}^*)^{-2} - (\chi_{01}^*RK)^{-2}(\pi C)^{-1}][(\chi_{10}^*)^{-2} - 2a(\pi^2 K^2 bC)^{-1}] - (2a/b)(\pi^{3/2}\chi_{01}^*RK^2C)^{-2}\}}{(2a/b)^{1/2}(\pi^{3/2}\chi_{01}^*RK^2C)^{-1}}, \quad (34)$$

对于通常的长槽定向耦合器，它的几何尺寸是使在公式(33)分子的大括弧中除了  $\chi_{01}^*$  和  $\chi_{10}^*$  以外，所有其余各項都可以忽略，这样，零分貝长槽定向耦合器的公式就簡化为

$$\frac{L}{\phi} \simeq 3.412 \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2} G_{10}^{1/2} C G_{01}^{1/2} \left(\frac{\phi}{\lambda}\right)^3, \quad (35)$$

$$\begin{cases} G_{10} = [1 - (2a/\lambda)^{-2}]^{1/2}, \\ G_{01} = [1 - 1.488(\phi/\lambda)^{-2}]^{1/2}, \end{cases}$$

这里  $\phi$  是定向耦合器圆波导的直径； $G_{10}$  和  $G_{01}$  各称为在工作波长  $\lambda$  上矩形波导和圆波导的“波导因数”。

上面的公式在实际計算中是很有用的，因为它将长槽定向耦合器的所有几何尺寸关系用一个簡單的无量綱公式联系了起来。从这个公式可以看出：这种型式的零分貝定向耦合器，它的长度(相对于圆波导直径)比例于矩形波导高寬比( $b/a$ )的平方，长槽每单位长度电容( $C$ )的一次方，并且近似地说，几乎比例于 $(\phi/\lambda)$ 的三次方<sup>2)</sup>(作近似的估計时，公式中的 $(2a/\lambda)^{-2}$ 可认为等于  $1.488(\phi/\lambda)^{-2}$ )。从这里可以得出結論：和圆波导直径与工作波长的比例( $\phi/\lambda$ )以及长槽每单位长度电容( $C$ )的影响相比，調整矩形波导的横截面尺寸，仅仅起着次要的作用。进一步說，为了将定向耦合器的长度限制在合理的值之下，减小圆波导直径(对工作波长而說)又要比减小长槽电容(这相当于加寬槽口)有效得多。近似的，我們可以說，对于通常的定向耦合器， $\phi/\lambda$  的值大致应限制在 2 以下，除了特殊情形很少超过 3。因而可以估計，当用于低衰减波导系統时，用来完成能的全部轉換的长槽定向耦合器应该是和波导过渡器并用的。

作为更加近似的計算，矩形波导的寬边(即公式(35)中的  $a$ )可取作它的未微扰值。这样，公式(35)就进一步簡化为下面的形式：

$$L/\phi \approx 3.412(b/a)^{1/2} C G_{01}(\phi/\lambda)^3, \quad G_{01} = [1 - 1.488(\phi/\lambda)^{-2}]^{1/2}, \quad (36)$$

这里符号  $\approx$  代表进一步的近似。

在图 2 中繪出了从上面公式得到的曲綫。在这个图中，所选择的( $b/a$ )值是 0.5。对于  $b/a$  的其它值，这組曲綫也是同样适用的，这时，只要将纵坐标乘以  $1.414(b/a)^{1/2}$  就可以了。

通常  $L/\phi$  是被限制在一个允許的最大值之下的，这时，我們可以很方便地利用图 2 中的曲綫来初步选择  $\phi/\lambda$ ， $C$  和  $b/a$  这些几何参数。如果利用这些曲綫来决定定向耦合器的长度，那么就應該理解，它只是一个近似的估計。为了更准确地算出轉換长度，我們必須直接应用公式(34)或(35)。但是，在这些公式中，对应于微扰相位常数的矩形波导寬度  $a$  的精確值，还没有計算出。因而，下一步是决定这个值。

在推导一个用来計算必需的矩形波导寬度  $a$  的公式之前，讓我們先来討論一个有兴

2) 在文献中， $Ka$  ( $a$  代表圆波导半径)常被当作一个重要的参数。这里，作者选择了  $\phi/\lambda$  这个参数，而不用  $Ka$ ，原因是  $\phi$  和  $\lambda$  都是能够直接测出的量，而  $K$  则多少是来源于数学推导。除了这样一个小的区别， $\phi/\lambda$  和  $Ka$  包含了相同的物理含义，事实上在它們之間存在着简单的关系  $\phi/\lambda = Ka/\pi$ 。

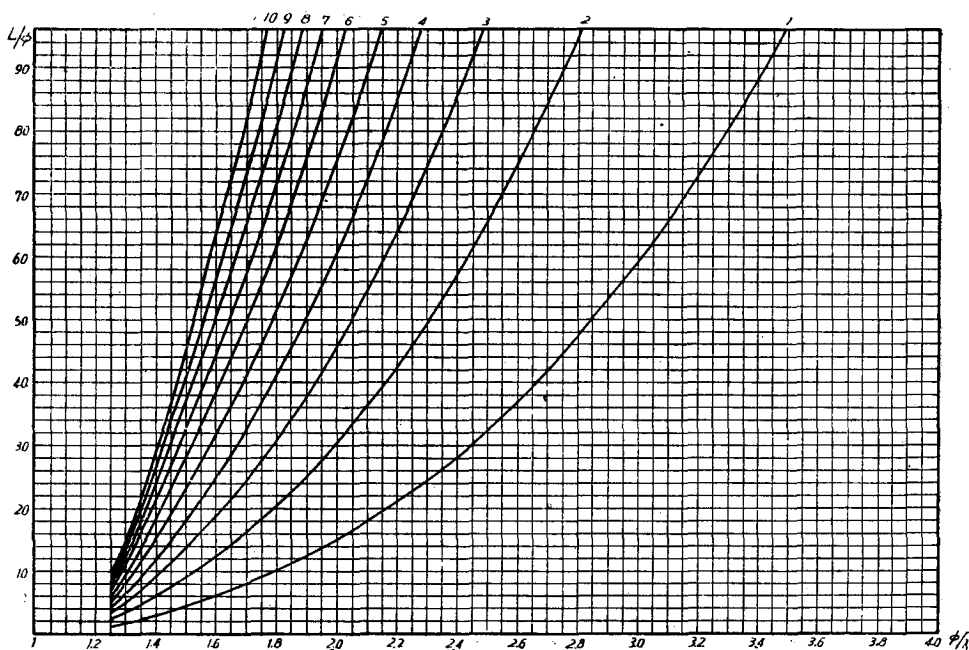


图2 零分貝长槽定向耦合器轉換长度的近似估計(轉換长度和  $\phi/\lambda$  与  $C$  之間的函数关系;  
 $b/a = 0.5$ ). 对于其它的  $b/a$  值, 纵坐标讀数应乘以  $1.414(b/a)^{1/2}$ .

趣的問題: 是否有可能調配两个波导和长槽的几何尺寸关系, 使得未微扰相位常数相等, 而同时微扰相位常数也相等. 換一种說法, 这个問題就是: 是否有可能使长槽对两个波导中的一对传输波型起着相同的作用? 从公式(31), 我們可以知道发生这种情况的条件是  $b/a \approx 10$ , 这当然是絕對不能允許的. 因而, 我們所能利用的条件是两个微扰相位常数相等, 而两个未微扰相位常数則必須有一定的差.

从公式(31)可以直接导出微扰相位常数相等的条件<sup>1)</sup>, 利用这个条件就可以根据在初步計算(估計)中所預先选择的  $\phi/\lambda$ ,  $C$  和  $b/a$  这些参数, 来决定必需的  $2a/\lambda$  的精确值.

#### § 4.2 定向耦合器的方向性

現在, 进一步来計算定向耦合器的方向性. 在采取数学步驟之前, 这里讓我們指出, 对于一个具有強、甚至中耦合量的定向耦合器, 在为了計算方向性而多考虑一个(第三个)向后传输波型的时候, 我們必須同时处理三个耦合波型, 并且联解三个耦合波型的方程組. 換句話說, 这里我們所研究的系統包含着在两个相位常数相等或几乎相等的波型之

1) 这个条件是一个 4 次的代数方程, 它的解可以近似地表示成下面的公式:

$$\frac{2a}{\lambda} \approx [1 - (\Delta G + G_{01})]^{-1/2}.$$

这里  $G_{01} = [1 - 1.488(\phi/\lambda)^{-2}]^{1/2}$ , 并且

$$\Delta G = \frac{0.2026(a/b)C^{-1} - \{\Theta[0.02532 - 0.005184(a/b)C^{-1}]G_{01} + 2G_{01}^2 + 0.005131\Theta(a/b)C^{-1}G_{01}^3 + 0.2026(a/b)C^{-1}G_{01}^4\}}{\Theta[0.02532 - 0.005184(a/b)C^{-1}] + 4G_{01} + 0.01539\Theta(a/b)C^{-1}G_{01}^2 + 0.8104(a/b)C^{-1}G_{01}^3},$$

其中  $\Theta = -39.49(G_{01} + G_{01}^{-1}) + (\phi/\lambda)^{-2}G_{01}^{-1}[0.01703 - 0.0005489C^{-1}(\phi/\lambda)^{-2}]^{-1}$ .

間所发生的相当强的能轉換,因而和許多单一波导問題的杂波計算不同,我們不能每次仅仅考虑两个波型(在单一波导問題中可以这样作,是因为所有杂波的总功率和传输波型功率相比是很小的).

从方程(26),我們所需要的計算耦合器方向性的一組三个耦合波方程可以表示为下列形式:

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dz} &= -K_1 E_1 + 'K_2^{++} E_2^+ + 'K_2^{+-} E_2^-, \\ \frac{dE_2^+}{dz} &= 'K_1^{++} E_1 - K_2^+ E_2^+ - K_2^{+-} E_2^-, \\ \frac{dE_2^-}{dz} &= 'K_1^{+-} E_1 - K_2^{++} E_2^+ - K_2^- E_2^-, \end{aligned} \quad (37)$$

式中,为简单起见,符号标注\*省去不用,同时一些其它标注也是为了明显的理由而省略.

和以前討論过的情形一样,(37)式右边的对角綫系数代表三个耦合波型的(微扰)相位常数,而对角綫外系数則代表耦合系数. 从方程(26),可以看出,在上面的方程組(37)中,系数  $K_1$  和两个耦合波型情形的相同,  $K_2^+$  和  $K_2^-$  各等于公式(29)中的  $\pm K_2$ ,  $'K_2^{++}$  和  $'K_2^{+-}$  都等于  $'K_2$ ,  $'K_1^{++}$  和  $'K_1^{+-}$  各等于  $\pm 'K_1$ . 因而,我們只缺少計算  $K_2^{+-}$  和  $K_2^+$  的公式,它們可根据(26)式表示为下列形式:

$$\begin{aligned}K_2^{\pm\mp} = j c_2^{\pm\mp} &= \frac{j}{2} \left\{ -\beta_2^* + \frac{K^2}{\beta_2^*} - \frac{1}{\beta_2^*} \frac{(\chi_1^*)^{-2} - (\Pi_1^{*o})^2 / K^2 c}{\{(\chi_1^*)^{-2} - (\Pi_1^{*o})^2 / K^2 c\} \{(\chi_2^*)^{-2} - (\Pi_2^{*o})^2 / K^2 c\} - (\Pi_1^{*o} \Pi_2^{*o} / K^2 c)^2} \right. \\ &\quad \times \left. \int_{\Omega_2} \left\{ \left( \frac{\partial \Pi_2^*}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_2^*}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_2^*}{\partial \zeta} \right) \right\} d\Omega_2 \right\}, \end{aligned} \quad (38)$$

对于一个低衰减波导系統中应用的长槽定向耦合器,如果象以前一样,用标注1和2各代表圓波导和矩形波导,那么上面的公式就化为

$$c_2^{\pm\mp} = \pm \frac{1}{2} \left\{ -\beta_{10}^* + \frac{K^2}{\beta_{10}^*} - \frac{1}{\beta_{10}^*} \frac{(\chi_{01}^*)^{-2} - (\chi_{01}^* R K)^{-2} (\pi C)^{-1}}{\{(\chi_{10}^*)^{-2} - 2a(\pi^2 K^2 b C)^{-1}\} \{(\chi_{01}^*)^{-2} - (\chi_{01}^* R K)^{-2}\} - (2a/b)(\pi^{3/2} \chi_{01}^* R K^2 C)^{-2}} \right\}, \quad (39)$$

显然,如果代表定向耦合器两个波导的标注1和2互相对換(即1代表矩形波导,2代表圓波导),那么只要将上面公式中(01)和(10)互相对換,这个公式就仍旧适用.

在下列端点条件下,

$$E_1(0) = 1, E_1^+(0) = 0, E_2^-(l) = 0, \quad (40)$$

我們联解三个耦合波方程(37)<sup>1)</sup>, 求出  $E_1$ ,  $E_2^+$  和  $E_2^-$ , 这样就直接得到长槽定向耦合器的方向性,通常将它表示为  $20 \log |E_2^+(l)/E_2^-(0)|$  分貝,这里  $l$  是槽长.

虽然上面叙述的三个耦合波方程的联解在数学上并没有任何困难,但是我們还是能够作出某些合理的假定,然后更加簡便地得出問題的解. 因而,作为第一步,我們采用(40)式中的前两个条件解出两个强耦合向前波,忽略由于第三个向后波型的存在而对这两个强耦合波型所产生的影响;然后第二步,我們采用(40)式中的最后一个条件从方程(37)的

1) 由于在实际問題中,对角綫外系数和对角綫系数相比是很小的,因而数字計算可以大为簡化.

第三式解出向后传输的波型<sup>1)</sup>。应用这个方法,我們得到下列計算耦合器方向性所需要的所有結果:

$$\begin{aligned}
 E_2^+(l) &= j \sin(c_0 l) \exp\{-j[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0]l\}, \\
 E_2^-(0) \Big|_{\substack{E_1(0)=1 \\ E_2^+(0)=0}} &= \frac{\exp\{-j[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0 - h_2^-]l\}}{-[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0 - h_2^-]^2 + c_0^2} \left\{ j^2 c_1^+ \left[ j \left( \frac{h_1 + h_2^+}{2} + c_0 - h_2^- \right) \times \right. \right. \\
 &\quad \times \cos(c_0 l) - c_0 \sin(c_0 l) \Big] \\
 &\quad - c_2^+ \left[ -j \left( \frac{h_1 + h_2^+}{2} + c_0 - h_2^- \right) \sin(c_0 l) - c_0 \cos(c_0 l) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{c_1^+ [(h_1 + h_2^+)/2 + c_0 - h_2^-] - c_2^+ c_0}{-[(h_1 + h_2^+)/2 - h_2^-]^2 + c_0^2} \right] \right\}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

我們現在来研究零分貝长槽定向耦合器。为了便于計算,这里在估計耦合器的方向性时,我們將不去注意长槽所产生的相位常数的微扰,也不去区分两个波导的两个微扰相位常数的相等条件和两个未微扰相位常数的相等条件。在这个近似假定下,我們利用适合通常定向耦合器结构的下列条件,  $|c_2^+| \ll |c_0| \ll \beta^*$  ( $\beta^* \simeq \beta_{01}^* \simeq \beta_{10}^*$ ), 就能从公式(41)得到一个简单的向后波幅度的公式:

$$\left| E_2^-(0) \right|_{\substack{E_1(0)=1 \\ E_2^+(0)=0}} \simeq \left| \frac{c_0}{2\beta^*} \right| \quad (42)$$

从这个公式,我們直接得到

$$\begin{aligned}
 \text{方向性} &= 10 \log D \quad \text{分貝} \\
 &\simeq 10 \log \left[ 144.7 \left( \frac{b}{a} \right) C^2 G_{01} \left( \frac{\phi}{\lambda} \right)^8 \right], \quad G_{01} = [1 - 1.488(\phi/\lambda)^{-2}]^{1/2}, \quad (43)
 \end{aligned}$$

这里  $D$  是用功率比表示的方向性。根据上列公式我們知道,长槽定向耦合器的方向性和矩形波导  $(b/a)$  比值的一次方成正比,和长槽每单位长度的电容的平方成正比,而近似地说,几乎和圆波导的  $\phi/\lambda$  的 8 次方成正比。可見,和耦合器轉換长度的情形一样,这里在耦合器方向性的情形中,  $\phi/\lambda$  这个参数仍然起着最重要的影响。但是,对于耦合器长度,加大  $\phi/\lambda$  将会不可避免地使耦合器的长度随着增加(这当然是实际上所不希望的),而与此相反,对于方向性,大的  $\phi/\lambda$  值趋向于改善耦合器的方向性。

在图 3 中繪出了公式(43)的結果;公式中矩形波导横截面的寬高比是任意选择的 ( $b/a = 0.5$ )。对于其它的  $b/a$  比,只要将图 3 中纵坐标讀数加上  $10 \log(b/a)$ , 就直接得到方向性。

在进入下一节之前,讓我們指出,从公式(42)或(43)可以清楚地看到:在第一次近似下,無論圆波导是激发波导而矩形波导是被激发波导,或者相反,我們所研究的长槽耦合器的方向性都将是一样的。

1) 如果假定  $|h_1 - h_2| \ll |c_0|$ , 那么这个解就能表示为更加简单的形式。在这个假定下,对于一对微扰相位常数各为  $h_1$  和  $h_2^+$  的强耦合波,公式(32)化为

$$E_1(x) \simeq \cos(c_0 x) \exp\{-j[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0]x\}, \quad E_2^+(x) \simeq j \sin(c_0 x) \exp\{-j[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0]x\}.$$

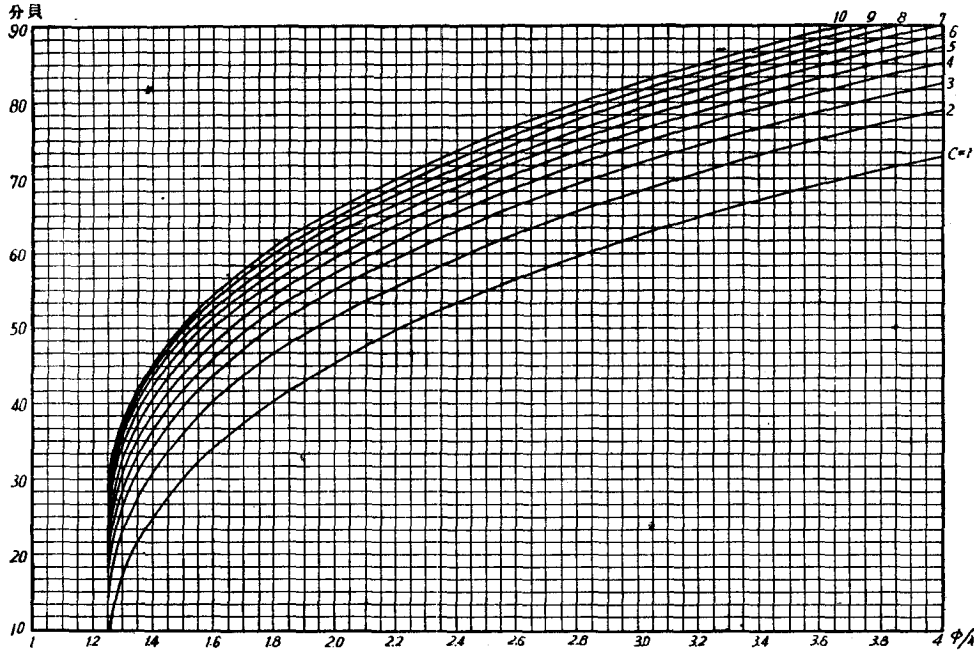


图3 零分貝長槽定向耦合器方向性的近似估計(方向性和参数  $\phi/\lambda$  和  $C$  之間的关系; 对于  $b/a = 0.5$ ). 对于其它的  $b/a$  值, 縱坐标讀数应加上  $10 \log(b/a)$ . 图中曲綫对于构成定向耦合器的两个波导均适用, 同时, 也能用来近似估計定向耦合器的反射系数.

### § 4.3 反 射 系 数

現在, 讓我們來計算長槽定向耦合器的反射系数. 我們可以估計到, 这里所將采取的数学步驟和上节計算耦合器方向性时所采取的是相似的. 为簡單起見, 我們將不再写新的耦合波方程, 而仍采用由(37)表示的三个耦合波方程. 为了計算波导2的反射系数, 我們应用下列端点条件:

$$E_1(0) = 0, \quad E_2^+(0) = 1, \quad E_2^-(l) = 1. \quad (44)$$

近似的, 我們可以以前一样忽略反射波对两个強耦合向前波的不重要的影响, 从而利用端点条件(44)的前两式求解有关的一对耦合波方程式, 得到

$$E_1 \simeq j \sin(c_0 z) \{ -j[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0]z \}, \quad E_2^+ \simeq \cos(c_0 z) \{ -j[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0]z \}, \quad (45)$$

对于  $|h_1 - h_2^+| \ll |c_0|$ .

將上面的式子代入方程組(37)的第三式, 再利用端点条件(44)的第三式, 就可以求出反射波的解; 結果是

$$\begin{aligned} E_2^-(0) \Big|_{\substack{E_1(0)=0 \\ E_2^+(0)=1}} &= \frac{\exp\{-j[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0 - h_2^-]l\}}{[(h_1 + h_2^+)/2 + c_0 - h_2^-]^2 + c_0^2} \left\{ -{}^t c_1^- + \left[ j \left( \frac{h_1 + h_2^+}{2} + c_0 - h_2^- \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin(c_0 l) - c_0 \cos(c_0 l) \right] \right. \\ &\quad \left. + j c_2^- + \left[ j \left( \frac{h_1 + h_2^+}{2} + c_0 - h_2^- \right) \cos(c_0 l) - c_0 \sin(c_0 l) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{{}^t c_1^- c_0 - c_2^- [(h_1 + h_2^+)/2 + c_0 - h_2^-]}{-(h_1 + h_2^+)/2 + c_0 + h_2^-]^2 - c_0^2} \right\}. \end{aligned} \quad (46)$$

因为  $E_2^+(0) = 1$ , 波导 2 的反射系数显然可以表示为  $20 \log |1/E_2^-(0)|$  分贝. 这里我们指出, 公式(46)可以用来计算定向耦合器两个波导中任何一个——矩形波导或圆波导的反射系数; 唯一要注意的是, 对于矩形波导, 我们应用公式(39)来计算  $c_2^+$ , 而对于圆波导, 我们将公式(39)中的标注(10)和(01)加以互换, 然后再应用这个公式计算  $c_2^+$ .

作为近似的估计, 我们仍假定  $\beta_{01}^* \simeq \beta_{02}^* \simeq \beta^*$ , 并且利用条件  $|c_2^+| \ll |c_0| \ll |\beta^*|$ . 这样, 我们得到的零分贝长槽定向耦合器反射系数的公式, 它的形式就恰恰和前面得到的计算方向性的公式相同. 因而, 在估计上述定向耦合器任一波导的反射系数时, 公式(42)和图 3 中的曲线在第一次近似下都仍然适用.

#### § 4.4 杂波抑制性

最后, 让我们来计算长槽定向耦合器的杂波抑制性(或波型选择性). 在实际应用中, 矩形波导截面尺寸总是选择得使只有主波是非消失的. 对于这样的定向耦合器, 杂波抑制性仅仅是对于圆波导中的杂波而言. 十分明显, 和计算耦合器方向性以及反射系数时我们曾经考虑三个耦合波型的原因一样, 这里为了计算杂波抑制性, 我们仍然必须同时考虑三个耦合波型. 由于向后波所携带的能量通常总是远比向前波所携带的要小, 因而, 在杂波抑制性的计算中, 我们将忽略向后波.

以  $E_1^i, E_1^x$  代表在波导 1 中的两个向前的磁波 ( $E_1^x$  指某一杂波),  $E_2$  代表在波导 2 中的一个向前的磁波, 那么从(26)式, 三个耦合波型的方程组就可以表示成下面的形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE_1^i}{dz} &= -K_1^i E_1^i - K_1^x E_1^x + {}'K_2^i E_2, \\ \frac{dE_1^x}{dz} &= -K_1^{x1} E_1^i - K_1^x E_1^x + {}'K_2^x E_2, \\ \frac{dE_2}{dz} &= {}'K_1^i E_1^i + {}'K_1^x E_1^x - K_2 E_2. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

在上列方程组中, 9 个系数可以直接从方程(26), (25), (23)和(20)得到:

$$\left. \begin{aligned} K_1^i &= jk_1 = \frac{j}{2} \left( \beta_1^{*i} + \frac{K^2}{\beta_1^{*i}} \right) - \frac{j}{2\beta_1^{*i}[\mathcal{D}]} \left\{ \mathcal{D}_{11} \int_{\Omega_1} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_1^{*1}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}_{12} \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} - \frac{\Pi_1^{*x}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right\}, \quad (i=1, x) \\ K_2 &= jk_2 = \frac{j}{2} \left( \beta_2^* + \frac{K^2}{\beta_2^*} \right) - \frac{j}{2\beta_2^*[\mathcal{D}]} \int_{\Omega_2} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_2^*}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_2^*}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_2, \\ K_1^{1x} &= jc_1^{1x} = \frac{-j}{2(\beta_1^{*1}\beta_1^{*x})^{1/2}[\mathcal{D}]} \left\{ \mathcal{D}_{11} \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{h_1 \partial \eta} - \frac{\Pi_1^{*1}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}_{12} \int_{\Omega_1} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_1^{*x}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right\}, \\ K_1^{x1} &= jc_1^{x1} = \frac{-j}{2(\beta_1^{*x}\beta_1^{*1})^{1/2}[\mathcal{D}]} \left\{ \mathcal{D}_{21} \int_{\Omega_1} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_1^{*1}}{h_1 h_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{D}_{22} \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} - \frac{\Pi_1^{*x}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right\}, \\ {}'K_2^i &= jc_2^i = \frac{j\mathcal{D}_{13}}{2(\beta_1^{*i}\beta_2^{*1})^{1/2}[\mathcal{D}]} \int_{\Omega_2} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_2^{*1}}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_2^{*1}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_2^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_2, \quad (i=1, x) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
 K_1^* = j'c_1^* &= \frac{j}{2(\beta_2^* \beta_1^{*1})^{1/2} [\mathcal{D}]} \left\{ \mathcal{D}_{31} \int_{\Omega_1} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_1^{*1}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{D}_{32} \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} - \frac{\Pi_1^{*x}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right\}, \\
 K_1^* = j'c_1^* &= \frac{j}{2(\beta_2^* \beta_1^{*x})^{1/2} [\mathcal{D}]} \left\{ \mathcal{D}_{32} \int_{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{h_1 \partial \eta} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{h_1 \partial \eta} - \frac{\Pi_1^{*x}}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*1}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{D}_{31} \int_{\Omega_1} \left[ \left( \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{h_1 \partial \eta} \right)^2 - \frac{\Pi_1^{*x}}{h_1 h_2} \left( \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \Pi_1^{*x}}{\partial \zeta} \right) \right] d\Omega_1 \right\},
 \end{aligned}$$

式中 $[\mathcal{D}]$ 是下列矩陣的行列式， $\mathcal{D}_{ik}(i, k = 1, 2, 3)$ 是它的余式：

$$\begin{bmatrix}
 \left\{ \frac{1}{(\chi_1^{*1})^2} - \frac{(\Pi_1^{*10})^2}{K^2 C} \right\} & -\frac{\Pi_1^{*10} \Pi_1^{*x0}}{K^2 C} & \frac{\Pi_1^{*10} \Pi_2^{*0}}{K^2 C} \\
 -\frac{\Pi_1^{*x0} \Pi_1^{*10}}{K^2 C} & \left\{ \frac{1}{(\chi_1^{*x})^2} - \frac{(\Pi_1^{*x0})^2}{K^2 C} \right\} & \frac{\Pi_1^{*x0} \Pi_2^{*0}}{K^2 C} \\
 \frac{\Pi_2^{*0} \Pi_1^{*10}}{K^2 C} & \frac{\Pi_2^{*0} \Pi_1^{*x0}}{K^2 C} & \left\{ \frac{1}{(\chi_2^{*0})^2} - \frac{(\Pi_2^{*0})^2}{K^2 C} \right\}
 \end{bmatrix}$$

从上述耦合方程組，我們根据下列端点条件

$$E_1^*(0) = 1, \quad E_1^*(0) = 0, \quad E_2(0) = 0, \quad (49)$$

求解  $E_1^*$ ,  $E_1^x$  和  $E_2$ 。对于  $E_1^x$ ，杂波抑制性可以表示为  $20 \log |1/E_1^x(l)|$  分貝， $E_1^x(l)$  是在长槽定向耦合器終端的杂波功率。

我們可以采取和以前計算耦合器方向性与反射系数时所采取的相似的数学途径来求上面問題的近似解。这就是，我們首先暂时忽略杂波对于两个強耦合波型的影响，从(28)式所表示的两个耦合波型的方程組，求解这两个強耦合波型  $E_1^1$  和  $E_2$ 。然后，从(42)的第二个方程求解  $E_1^x$ ，得到

$$\begin{aligned}
 E_1^x(l) &= \frac{\exp[(h_1^+ + h_2^+)/2 + h_1^x] \{ h_1^{x1} [(h_1^+ + h_2^+)/2 + h_1^x] + j'c_2^x c_0 \}}{c_0^2 + [(h_1^+ + h_2^+)/2 + h_1^x]^2} \exp(-h_1^x l) \\
 &\quad - \frac{\exp[(h_1^+ + h_2^+)/2 + h_1^x]}{c_0^2 + [(h_1^+ + h_2^+)/2 + h_1^x]^2} \left\{ c_1^{x1} \left[ \left( \frac{h_1^+ + h_2^+}{2} + h_1^x \right) \cos(c_0 l) + c_0 \sin(c_0 l) \right] \right. \\
 &\quad \left. - j'c_2^x \left[ \left( \frac{h_1^+ + h_2^+}{2} + h_1^x \right) \sin(c_0 l) - c_0 \cos(c_0 l) \right] \right\} \exp(-h_1^x l), \quad (50)
 \end{aligned}$$

为簡單起见，这里  $K_1^+ = jh_1^+$  和  $K_2^+ = jh_2^+$  分別代替在三个耦合波型的方程組中的  $K_1^1 = jh_1^1$  和  $K_2 = jh_2$ ；并且对于一般的具有长槽耦合的多波导系統，这两个系数都可以利用公式(29)来計算。如果长槽定向耦合器是用来完成在圓电波和矩形波导主波之間的能轉換的，那么这两个系数就用公式(31)的头两个式子来表示。由于长槽对相位常数的影响是不重要的，因此在近似計算中，圓波导杂波的微扰相位常数  $h_1^x$  可以取作相应波型的未微扰相位常数。对于这样的定向耦合器，为了計算公式(45)中所包含的其它系数(两个耦合系数)，我們应用公式(43)，其中波型函数由(30)和下面的式子来代表：

$$\Pi_1^{*x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{J_n(\chi_{nm}^* \rho)}{[(\chi_{nm}^* R)^2 - n^2] J_n(\chi_{nm}^* R)} \cos(n\varphi), \quad J_n'(\chi_{nm}^* R) = 0, \quad (51)$$

于是，算出几个面积分后我們就得到

$$K_1^{x1} = j c_1^{x1} = \frac{-j \Delta_{21}}{2(\beta_1^{*x} \beta_1^{*1})^{1/2} \Delta}, \quad (52)$$



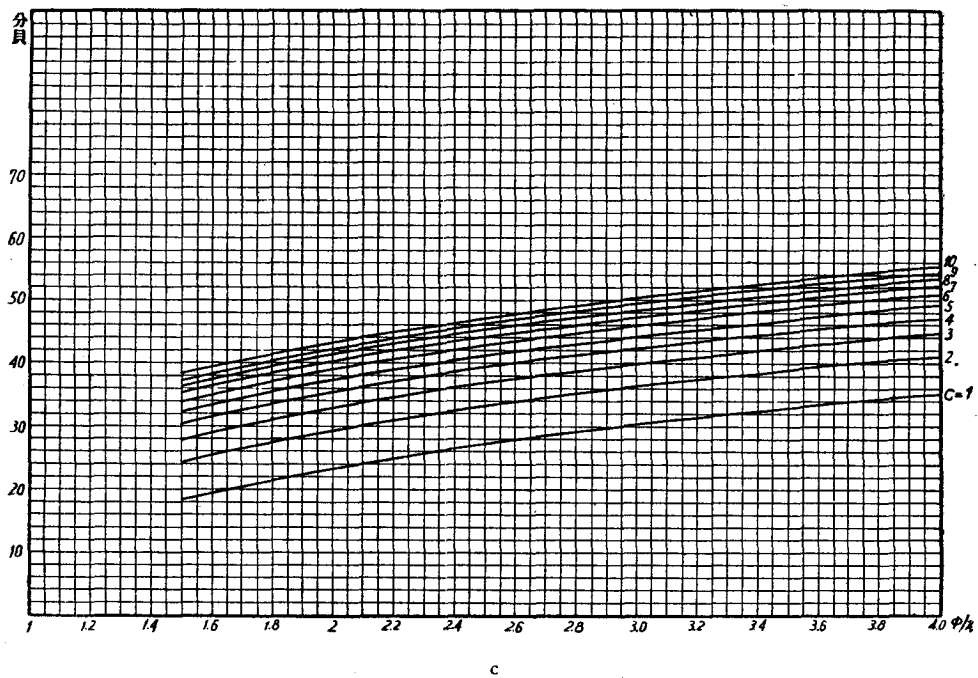
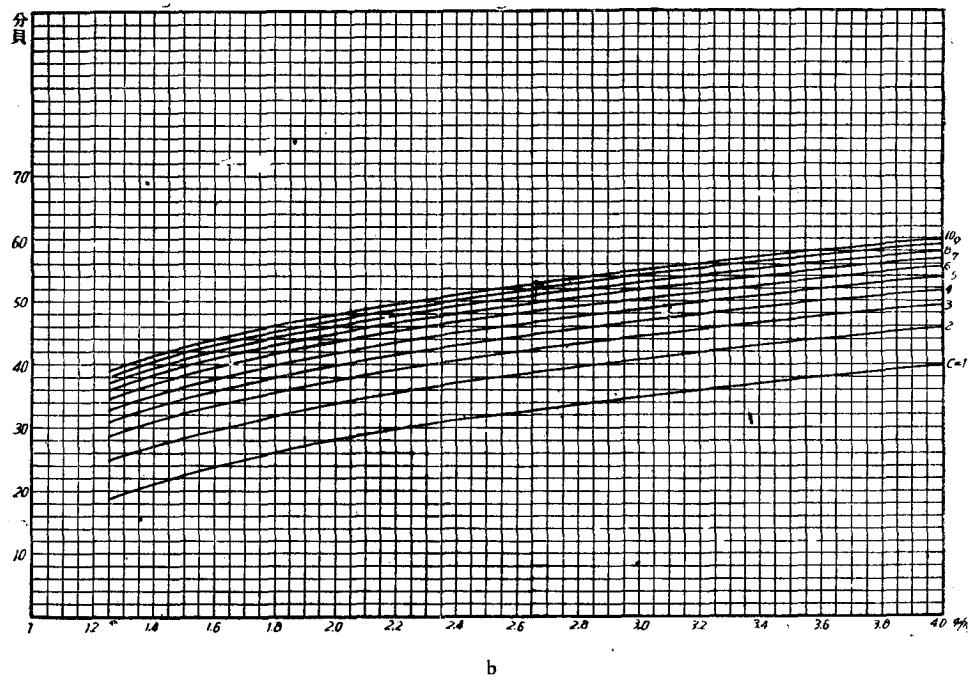


图 4 杂波抑制性的近似估计. 对于: (a),  $H_{11}$  波型; (b),  $H_{21}$  波型; 和 (c),  $H_{31}$  波型.

这里,  $S$  代表用功率比表示的抑制性;  $v_{nm}$  是  $n$  阶 Bessel 函数导数  $J'_n(x)$  的第  $m$  个根.

从上列公式可以看出, 和方向性与反射系数的情形一样, 长槽定向耦合器的杂波抑制性正比于长槽每单位长度电容的平方, 而近似的几乎正比于  $\phi/\lambda$  的 8 次方. 我们还注意到, 在公式(54)中没有  $b/a$  项.

图 4 中的曲线组是对于传输波型(圆电波)两边的几个杂波的抑制性. 正象本文第二和第三部分所讨论过的那样, 仅仅那些纵向磁场在槽口不消失的磁波才和传输的波型发生耦合; 因此, 如果为了不使耦合器过长而限制直径波长比在 2 以下, 在圆波导中就至多有 5 个非消失波, 它们是  $H_{21}, H_{41}$  的偶波和  $H_{11}, H_{31}$  和  $H_{12}$  的奇波. 但是, 对于实际问题的需要来说, 考虑了图 4 中所示的三个杂波常常是足够的.

#### § 4.5 频率特性

在推导以上几节中的许多计算公式时, 我们仅仅考虑了一个频率, 它是指工作频带的中心频率. 但是, 在某些问题中, 也常常需要知道定向耦合器的传输特性怎样随频率而变化.

让我们仍来研究用来完成圆电波和矩形波导主波之间能的全部转换的零分贝长槽定向耦合器. 虽然从以上几节中的结果可以导出定向耦合器各种参数的频率特性, 但在这里为了说明分析的方法, 我们将只研究转换损失的频率特性, 因为对于上述的定向耦合器类型, 这是最重要的一个频率特性.

从公式(33)可以知道, 转换损失随频率的变化是由于耦合系数和(或)相位常数随频率而变化. 通常, 频率选择性一小部分是耦合长槽产生的, 而大部分是在离开中心频率时因为出现了耦合波之间的相位差而产生的.

我们可以从公式(33)和(31)得到下列估计转换损失的频率特性的公式:

$$\text{转换损失} = 10 \log (1 + Q^{-2}) \sin^{-2} [(1 + Q^{-2})^{1/2} c_0 L],$$

式中,

$$\begin{aligned} Q^{-1} \simeq & 3.412 C \left( \frac{b}{a} \right)^{1/2} \left( \frac{\phi}{\lambda_0} \right)^4 \left( \frac{f}{f_0} \right)^4 g_{01}^{1/2} g_{10}^{1/2} \left\{ (g_{01} - g_{10}) + (g_{01}^{-1} - g_{10}^{-1}) - \right. \\ & - 0.02532 \left( \frac{\phi}{\lambda_0} \right)^{-2} \left( \frac{f}{f_0} \right)^{-2} g_{01}^{-1} \left[ 0.01703 - 0.002102 C^{-1} \left( \frac{\phi}{\lambda_0} \right)^{-2} \left( \frac{f}{f_0} \right)^{-2} \right]^{-1} \\ & \left. - 0.02532 \left( \frac{2a}{\lambda_0} \right)^{-2} \left( \frac{f}{f_0} \right)^{-2} g_{10}^{-1} \left[ 0.02532 - 0.005131 \left( \frac{b}{a} \right)^{-1} C^{-1} \left( \frac{2a}{\lambda_0} \right)^{-2} \left( \frac{f}{f_0} \right)^{-2} \right]^{-1} \right\}, \\ c_0 L \simeq & \frac{\pi}{2} \frac{G_{01}}{g_{01}} \left( \frac{f}{f_0} \right)^2, \end{aligned}$$

式中,  $\lambda_0$  和  $f_0 (= v_c / \lambda_0, v_c$  是光速) 分别为工作频带的中心波长和中心频率;  $G_{01}$  是在  $\lambda_0$  上圆波导的“波导因数”;  $g_{01}$  和  $g_{10}$  分别为在离开中心的某一频率  $f$  上圆波导和矩形波导的“波导因数”.  $G_{01} = [1 - 1.488(\phi/\lambda_0)^{-2}]^{1/2}$ ,  $g_{01} = [1 - 1.488(\phi/\lambda_0)^{-2}(f/f_0)^{-2}]^{1/2}$ ,  $g_{10} = [1 - (2a/\lambda_0)^{-2}(f/f_0)^{-2}]^{1/2}$ .

对于一个工作在较宽频带的定向耦合器, 可以估计到, 当频率越过对应于某一杂波的截止时, 需要的波型耦合将会受到显著的微扰. 在进行波导尺寸和长槽参数  $C$  的最佳选择时, 这是一个应该考虑的重要现象.

## 簡短的結束語

現在,通過統一的和互相聯系的途徑,我們已經完成了零分貝長槽定向器的最重要的幾個參數的計算。在以上幾節中已經得到的公式和曲線組將會是實際有用的,然而,它們還僅僅是一些用來說明本文所提理論和方法的實際應用的例子。

對於一個長槽定向耦合器,無論要求在圓電波和矩形波導主波之間發生多大比例的能轉換,在本文第四部分中已經導出了能夠用來進行數字計算的全部有關公式。

在測量特殊波導結構的濾波和分相作用時,或在波導技術的其它應用中,常常需要這樣的定向耦合器,它有目的地將矩形波導主波變換成為低衰減圓波導中的某一雜波,或作相反變換。對於用在這個方面的定向耦合器,本文第四部分仍然給出了進行實際計算所需要的所有公式。在這類問題中,我們仍能夠有利地利用在  $H_{01}$ - $H_{10}$  定向耦合器計算中曾經利用過的某些近似的假定,從而將問題的分析進一步簡化。

顯然,本文提出的理論和方法,其應用不僅限於圓波導-矩形波導定向耦合器。對於在微波技術中廣泛被應用的由兩個矩形波導構成的長槽(磁耦合)定向耦合器,我們的方法和公式是全部適用的。事實上,計算這種定向耦合器的參數將比計算用於高階波型系統的定向耦合器的參數要簡單得多。

更一般的,我們的方法適用於一對橫截面是任何幾何形狀的長槽耦合的波導結構。為了進行參數計算,我們只要應用公式(29),(38)和(48),求出一些有關的面積分。

正象在第三部分一個角注中所提到的那樣,我們的分析能夠立刻應用到這樣一個多波導系統,它是由多於兩個波導構成的,但所有波導都是通過長槽而發生耦合。同時,在本文的“引言和結語”部分,我們也曾提到將我們的方法推廣用於變耦合系數和變相位常數問題的可能性(這時,可以引用本地簡正波型方法<sup>[51]</sup>)。十分清楚,為了實現變耦合,可以按一定規律來改變槽寬,而為了實現變相位常數,可以改變波導截面,或者採用非均勻介質填充波導。

對於變的槽寬,只要將參數  $C \simeq (\sigma + \delta)/\delta$  ( $\delta < \sigma < \lambda_g$ ) 看成是變數,那麼以前幾節所得到的所有公式就仍然都適用。從波導系統中所採用的其它過渡器的特性可以估計到,一個具有變槽寬的長槽定向耦合器有着較寬的頻帶,但它的長度要更加長。

進一步推廣是考慮一個彎曲的耦合多波導系統。但是,在目前,這方面的推廣看起來僅僅有理論方面的意義。

在原理上,採用小孔作為耦合機構的定向耦合器,應該可以看成是一種具有變耦合的耦合波導結構。事實上,對於僅僅包含磁耦合的這種類型的定向耦合器,如果小孔直徑和孔間距離都比波導波長要短,那麼,我們也有理由設想,這種定向耦合器的特性可以從一個相當的長槽定向耦合器的特性估計出來(長槽的耦合強度是實際結構中一系列耦合小孔的平均耦合強度)。對於這樣的問題,如果耦合波導公共壁的厚度和小孔直徑相比不過小,那麼小孔陣的等效長槽電容也將是能夠估計的。

可以估計,本文所提理論和方法不難推廣用於長槽耦合的空腔諧振器系統。

此外,我們還可以探討另一個有興趣的問題:我們的方法是否還能夠加以發展,用來分析開槽天線和它的開槽系統?

对于具有更加复杂形式的耦合机构,本文理論所依据的物理概念以及文中所发展的数学方法是仍然适用的。但是,究竟能否得出有关电磁場边值問題的解析解,这在很大程度上要看能否建立一組简单的适用于包含若干分区的复杂波导結構的边界和联系边界条件。經驗告訴我們,建立一組简单的边界和联系边界条件几乎等于完成了一半的工作。

作为簡短的結束語,作者愿意指出,本文所討論的問題实际上不仅是物理学和工程技术中的重要課題,而且,在数学方面,它是和影响近代科学理論发展极其深远的Fourier方法紧密相关的。推广这种方法到可以划分成若干简单部分的复合区域,无疑地是一个十分值得探索的領域,在这里数学家們将会找到一系列耐人寻味的有着很大实际意义的新課題。

致謝:作者感謝馬大猷,黃武汉等教授对本文初稿所提的寶貴意見。和呂保維教授的几次討論是十分有益的,作者謹对他表示深切的謝意。

## 附录:符 号 表

|                            |                                                                                |
|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $1, 2$                     | 作为符号的右下角标註,是指分区 1 和 2 的量。                                                      |
| $\Lambda, V$               | 在符号頂上,各指在长槽口纵向磁場不等于零和等于零的磁波。                                                   |
| $+, -$                     | 在符号右上角,各指向前和向后波。                                                               |
| $*$                        | 在右上角,指磁波或 $H$ -波(除非另外註明,相当的沒有标註 $*$ 的符号就代表电波)。                                 |
| $\epsilon$                 | 作为左上角标註,是指多波导系統或定向耦合器不同波导波型之間的交叉耦合系数(相当的沒有标註 $\epsilon$ 的符号是指在同一波导中波型之間的耦合系数)。 |
| $o$                        | 在符号右上角,是指在长槽口中心的值。                                                             |
| $i, k, r, s, n$            | 加在不同符号上的标註,它們的意义可以明显地从有关符号看出。                                                  |
| $(\eta, \xi, \xi)$         | 广义曲綫坐标。                                                                        |
| $(\eta, \xi, z)$           | 耦合波导或定向耦合器的普遍坐标。                                                               |
| $(\rho, \varphi, z)$       | 圆柱坐标。                                                                          |
| $(x, y, z)$                | 直角坐标。                                                                          |
| $h_1, h_2, h_3$            | 广义曲綫坐标的度量系数。                                                                   |
| $h$                        | 也用来代表波型的微扰相位常数(修正相位常数)。                                                        |
| $\Omega$                   | 波导截面的敞开面。                                                                      |
| $\Sigma_{1,2}$             | 波导 1 和 2 边界的封閉曲綫。                                                              |
| $S_{1,2}$                  | 不包含长槽口的曲綫。                                                                     |
| $\delta_{1,2}$             | 长槽口寬度。                                                                         |
| $\sigma$                   | 长槽深度(在文中一个地方,也用来代表电导率)。                                                        |
| $l$                        | 槽的纵长。                                                                          |
| $L$                        | 长槽定向耦合器的轉換长度。                                                                  |
| $\Lambda \xi, \xi \Lambda$ | 长槽口两端的坐标。                                                                      |
| $V$                        | 长槽两侧导电面間的电压。                                                                   |
| $I_d$                      | 經过长槽的位移电流。                                                                     |
| $C$                        | 长槽每单位长度的电容系数(同时用来代表长槽所形成的小分区)。                                                 |
| $\nabla_\epsilon$          | 二維梯度算符。                                                                        |
| $t, n$                     | 在一个面上(或在波导边界上)切綫和法綫方向(切向,法向)。                                                  |
| $c_0$                      | 两个波型的耦合系数(見方程 32)。                                                             |

- $\mathcal{E}$  電場強度.  
 $\mathcal{H}$  磁場強度.  
 $E$  行波幅度.  
 $F$  一個任意波型(磁波或電波).  
 $U$  波型電壓.  
 $I$  波型電流.  
 $i$  縱向磁場的幅度函數.  
 $Z, Y$  耦合“電流”和“電壓”方程中的阻抗和導納係數.  
 $y$  用來決定  $i^*$  的方程中的導納係數(見方程 18).  
 $y, \tilde{y}$   $y$  的分矩陣元.  
 $\omega$  角頻率.  
 $e^{i\omega t}$  時間因子.  
 $\epsilon$  波導結構中媒質的介電係數.  
 $\mu$  波導結構中媒質的導磁係數.  
 $\epsilon_0, \mu_0$  自由空間的介電係數, 導磁係數.  
 $K$  沒有任何標註時, 指媒質波數; 加上標註時, 指耦合係數或微擾(修正)相位常數.  
 $\beta$  未微擾相位常數.  
 $\chi^*, \chi$  磁波和電波的截止波數.  
 $\Pi^*, \Pi$  波型函數, 或磁和電 Hertz 矢量縱分量的橫向部份.  
 $A^*, A$  磁波和電波的波阻抗.  
 $i, U, Z, y$  電流、電壓、阻抗、導納矩陣.  
 $\dot{E}, E, K$  耦合波的矩陣.  
 $\mathcal{D}, (\mathcal{D}), [\mathcal{D}], \Delta$ : 公式(29), (31)(48)和(52)中的行列式.  
 $\mathcal{D}_{ik}, \Delta_{ik}$ :  $[\mathcal{D}]$ 和 $\Delta$ 的余式.  
 $R, \Phi$  圓波導半徑, 直徑.  
 $a, b$  矩形波導截面的寬和高.  
 $D$  用功率比來表示的耦合器方向性.  
 $S$  定向耦合器的雜波抑制性, 用功率比表示.  
 $v_{nm}$   $n$  階 Bessel 函數導數的第  $m$  個根.  
 $a_0$  和未微擾相位常數相對應的矩形波導寬度.  
 $G, g$  “波導因數”.  
 $Q$  “耦合能力”.  
 本文採用米—仟克—秒單位制.

### 參 考 文 獻

第一類: 關於單一波導問題的正交函數展開理論(前兩種文獻主要是研究空腔諧振器問題).

- [1] Кисунько, Г. В. Электродинамика полых систем, (1949).
- [2] Slater J. C., Microwave Electronics, (1950).
- [3] Marcuvitz N. and Schwinger J., On the representation of the electric and magnetic fields produced by currents and discontinuities in waveguides, *J. A. P.*, No. 6, (1956).
- [4] Stevenson A, General theory of electromagnetic horns, *J. A. P.*, No. 12, (1951).
- [5] Schelkunoff S. A., Generalized telegraphist's equations for waveguides. *B.S.T.J.*, No. 4 (1952). Conversions of Maxwell's equations into generalized telegraphist's equations. *B.S.T.J.*, No. 5, (1955).

- [6] Каценеленбаум, В. З., Нерегулярные волноводы с медленно меняющимися параметрами, *ДАН СССР*, № 4 (1955), Изогнутые волноводы постоянного сечения, *Р. и Э.* № 2 (1956), Симметричный диэлектрический переход в волноводе круглого сечения для волны  $H_{01}$ , *Р. и Э.* No. 3, (1956). Длинный симметричный волноводный переход для волны  $H_{01}$ , *Р. и Э.* No. 5, (1957). К общей теории нерегулярных волноводов, *ДАН СССР*, № 2, (1957). Доклад на международном конгрессе по сверхвысокочастотным цепям и антеннам, Париж, (1957). Изогнутые волноводы с неоднородным заполнением, *Р. и Э.* № 5, (1958). Нерегулярные волноводы с переменным диэлектрическим заполнением, *Р. и Э.* № 7, (1958). Скрученные волноводы, *Р. и Э.* № 9, (1959). Волноводные переходы, № 9, (1959). Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами, Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, (1959).
- [7] Гутман, А. А., К расчету волноводов с постепенно изменяющимся сечением, *Радиотехника*, 1957. № 9 Расчет переходов от прямоугольных волноводов к П и Н- волноводам, *радиотехника*, № 12 (1958).
- [8] Казанцев, Ю. Н., Расчет симметричных переходных устройств в волноводе круглого сечения для волн типа  $H_{01}$ , *Р. и Э.* № 2 (1957).
- [9] Ван Хуанг-чжо, Метод расчета диэлектрической вставки для согласования волны  $H_{01}$  в переходе между двумя волноводами круглого сечения, *Р. и Э.* № 7 (1960).
- [10] Керженцева, Н. П., О распространении электромагнитных волн в изогнутых волноводах круглого сечения, *Р. и Э.* № 5 (1958). О прохождении волн  $H_{01}$  через изогнутый спиральный волновод, *Р. и Э.* № 2 (1959).
- [11] Барсуков, К. А., О неоднородном гиротропном заполнении волновода, *Р. и Э.* № 4, (1959).
- [12] Исаеко, Ю. М. Расчет плавного преобразователя для волны  $H_{01}$ , *Р. и Э.* № 4 (1959).
- [13] Емелин, Б. Ф. Волноводные уравнения для нерегулярных волноводов, *Р. и Э.* № 5 (1958).
- [14] Пюбарский, Г. Я. и Повзнер, А. Я., К теории распространения волн в нерегулярных волноводах, *ЖТФ*, № 2 (1959).
- [15] Бродский, В. Б., К вопросу о распространении волн в волноводах, заполненных средой с переменными диэлектрической и магнитной проницаемостями, *Р. и Э.* № 5, (1958).
- [16] Reiter G., Generalized telegraphist's equation of varying cross-section. *Proc. I. E. E.* pt. B, supplement No. 13, 106 (1959).
- [17] Unger H. G., Circular waveguide taper of improved design. *B. S. T. J.* No. 4 (1958). Helix waveguide theory and applications. *B. S. T. J.* No. 5 (1958).
- [18] Morgan S. P., Theory of curved circular waveguide containing an inhomogeneous dielectric, *B. S. T. J.* No. 5, (1957).
- [19] Gerosa G., Taper section in circular waveguides, *Proc. I. R. E.* No. 12 (1958).
- [20] Leonard D., and Yen L., Junction of smooth flared waveguides, *J. A. P.* No. 12 (1957).
- [21] Heyn E., Beweis der Vollständigkeitsrelation für die charakteristischen Vektorfelder der Hohlleiter, *Theorie Math. Nachrichten*, No. 1, 2 (1955).
- [22] Andreason M., Ausbreitung von Grundwellen in kreisrunden und quadratischen gebogenen Hohlleiter konstanter Krümmung, *Arch. E. Ü.* No. 9 (1958).
- [23] Shimizu Y., Theory of transmitting circular electric wave around bends, Report on International Conference on Ultrahigh-freq. Circuits and Antennas, Paris. (1957).
- [24] Oquchi B., and Kato M., The effects of circular TE-waves on the propagation of circular TE-wave in a curved waveguide, *ibid.*
- [25] Ken-ichi NODA, Circular electric wave transmission through hybrid mode waveguide, *Elec. Comm. Lab. Tech. Journal*, No. 6 (1960).
- 第二类: 耦合波理論和耦合系統或定向耦合器問題
- [26] Schwartz R. F., Bibliography on directional couplers, *Trans. I. R. E.* MTT-2, No. 2 (1954),
- [27] Мериакри В. В., Направленные ответвители с сильной связью в многоволновых круглых волноводах, *Р. и Э.*, № 11 (1959).
- [28] Kuhl R. L., Directional Couplers, Radiation Lab. Series, Vol. 11, Ch. 4.
- [29] Mumford W. W., Miller S. E., Multi-element couplers, *Proc. I. R. E.*, No. 9 (1952); Miller S. E., Coupled wave theory and waveguide applications, *B. S. T. J.* No. 2 (1954),
- [30] Karman N. I., Theory and design of wave selectors. *Proc. of NEC.* (1946),
- [31] Broussond G., *Annales de Radio electricite*, No. 53, (1958).
- [32] Barnett E. F., Lacy P. D. and Oliver B. M., Principles of directional coupling in reciprocal system,

- Symposium on Modern Advances in Microwave Techniques, Polytechnic Inst. of Brooklyn, 1954,
- [33] Персиков М. В., Направленный ответвитель для волн в волноводе круглого сечения. *Р. и Э.*, № 1 (1959).
  - [34] Dawson R. W., An experimental dual polarization antenna feed for three relay bands. *B. S. T. J.*, No. 2 (1957).
  - [35] Краснушкин, П. Е., Вест МГУ, № 1 (1947), Метод нормальных волн в применений к проблемам дальних радиосвязей, Изд. МГУ (1947).
  - [36] Потемкин В. В., *Ж.Т.Ф.*, № 4 (1948).
  - [37] Meyerhoff A. A., *Proc. I. R. E.*, No. 9 (1952).
  - [38] Архипова К. М., Купьбацкий К. Е., Судаков В. А., Сборник научных трудов, выпуск II, Всесоюзный Заочный Электротехнический Институт Связи Министерство Связи, СССР.
  - [39] Stevenson A. F., Theory of slots in rectangular waveguides, *J. A. P.*, No. 1 (1948).
  - [40] Белянцов А. М., К теории связанных резонаторов, Радиофизика, Том III, Известия Высших Учебных Заведений, 6, (1960).
  - [41] Bethe H. A., Theory of Diffraction by Small Holes, *The Physics Review*, **66** 7—8 (1944).
  - [42] Lewin L., Some observations on waveguide coupling through medium-sized slots, *P. I. E. E.* Part C, No. 12 **107** Sept. 1960.
  - [43] Краснушкин, П. Е. и Хохлов Р. В., *Ж.Т.Ф.*, № 8 (1949).
  - [44] Pascher H., Langschlitz-Richtungskoppler für H-Wellen, *Arch. E. Ü.*, No. 12, (1958).
  - [45] Jaumann A., Über Richtungskoppler zur Erzeugung der H-Welle im runden Hohlleiter, *Ibid*, No. 12, (1958).

#### 其 它 文 献

- [46] Керженцева Н. П., Научные Доклады Высшей Школы, № 2 (1959)
- [47] Miller S. E., *Proc. I. R. E.*, No. 7 (1952).
- [48] Ваганов, Р. Б., Исаенко, Ю. М. и Мериакри В. В., Доклад на всесоюзной научной сессии, посвященной дню радио 1960 г.
- [49] Louisell, W. H., *B. S. T. J.*, No. 4 (1955).
- [50] Unger, H. G., *B. S. T. J.*, No. 5 (1957) *ibid.* No. 4 (1958).
- [51] 黃宏嘉, Generalized theory of coupled local normal modes in multi-wave guides, *Scientia Sinica*, Vol. IX, No. 1, (1960), 變換系数法, *數學學報*, **11**, 第 3 期 (1961).

## THEORY OF COUPLED WAVEGUIDES

HUANG HUNG-CHIA

### ABSTRACT

In this paper, the author endeavors to study the diffraction of electromagnetic wave by a long slot with conducting environment on opposite sides (i.e., a slot-coupled system of arbitrary shapes) from the viewpoint of coupled waves. A novel theory, which is justified by clear physical reasoning, is presented for a practical solution of the relevant boundary-value problem. In the light of this theory, problems of coupled waveguides, like problems of a single waveguide structure, are attacked by the same mathematical approach, namely, the theories of development in the orthogonal functions. Thus, two types of problems heretofore treated differently are brought under a unified and coherent point of view. To illustrate the applicability of the present theory, the author solves the problem of a long slot directional coupler, whose usefulness in the development of long-distance waveguide transmission is well-known, and derives a set of original formulas for computing the coupler parameters. As concluding remarks, some further applications of the theory are freely discussed.