

螺旋綫型迴旋加速器調变 磁場曲綫形式的选择*

方 守 賢

提 要

本文中对具有調变場形式为 $f = \sin(\Phi(r) - N\varphi)$ 的螺旋形迴旋加速器作了研究,討論了选择調变曲綫形式 $\Phi(r)$ 的方法,从而可求得滿足某些条件下的最合适的曲綫形式,該形式在加速器中心为托馬斯型,在外半径区域可用几个不同参数的阿基米德螺旋綫分段接近,采用这曲綫后有很多优点,例可使中心区的散焦力減少到最小,非綫性共振亦減弱,并且为了克服中心区的散焦力,在相同的滑相条件下,所要求的D盒加速电压亦大为降低,并使外半径区具有最大磁間隙。

引 言

螺旋型迴旋加速器自1955年被提出后,立即得到世界各国的重視,在最近五、六年中,世界各国很多的实验室对这种类型的加速器作了研究,他們在設計过程中所采用的螺旋綫形式是形形色色、各不相同的,例如苏联是采用阿基米德螺旋綫 ($r = N\lambda\varphi$)^[1],而美国橡树岭实验室則采用 $r^2 = \varphi$ 的形式^[2],英国哈威尔实验室最初采用对数形式的形式 $\left(\log \frac{r}{r_0} = N\varphi\right)$ ^[3],亦有采取其他任意曲綫的,但是到底那一种曲綫的性能为最好,那一种方案最为理想,至今尚未見到有关这一方面的专门論文。我們在对上列各方案作了初步的調研后,利用一个与实验相当符合的有关調变磁場的近似公式,在理論上找到符合某些要求的曲綫,并得到下面的一些結果。

(1) 有关中心区域的問題 中心区域磁場采用何种曲綫为最合适,到目前为止,还是一个大問題,如苏联联合核子研究所的模型,在它的中心是采用圆盘形垫片(即沒有調变場);美国在已經发表的各个大小不同的加速器中,中心曲綫亦是各种各样,估計亦沒有解决这一問題。本文求得在中心半径小于 $\frac{N}{4}$ 磁間隙的地方應該采用托馬斯式垫片,这样将使粒子在垂直方向的运动更快地进入稳定区域,亦就是說托馬斯式曲綫所引起的散焦效应将比阿基米德螺旋綫小,因此为了补偿此散焦效应所需牺牲的滑相亦小,換言之,为了使得此滑相保持在一定的数值內,托馬斯式垫片所要求的加速电压将比阿基米德螺旋綫将近小40%左右。

* 1962年1月15日收到。

当采用托馬斯式垫片后,由于托馬斯式的非綫性效应将比阿基米德来得小,因此将会使粒子流的性能改善,即粒子流径向自由振蕩的起始振幅减小,对以后穿过非綫性共振区域时所引起的粒子流损失将减小,这是很重要的。

(2) 在大半径区域 本文中所建議的曲綫,在保証一定的聚焦条件下,給出最大的磁間隙。如众所知,在螺旋型迴旋加速器中,可利用的磁間隙是极其重要的,如果磁間隙太小,将会給工程带来极大的困难,而且会牺牲粒子流强度(因为如果間隙太小,最后就不得不下降D形盒 z 向的孔径)。因此尽可能的在一定条件下,扩大磁間隙是有一定意义的。本文所得的曲綫,就能滿足这一要求。

当然,該曲綫的加工是比阿基米德曲綫困难得多,但是如有程序車床加工的話,那末这一困难是可以解决的。如果不可能,那末建議在中心区域采用托馬斯式,而在外半径則采用某一个或几个最接近于該曲綫的阿基米德螺旋綫来分段代替之,这样可以取得一折衷的較合理的結果。

一、运动方程的推导

在圓柱形坐标中,带电粒子在磁場中运动的方程为^[1]

$$\begin{aligned} r'' - \frac{2r'^2}{r} - r &= -\frac{e}{mc} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2 + z'^2}}{v} \left(rH_z - z'H_\varphi - \frac{z'r'}{r}H_r + \frac{r'^2}{r}H_z \right), \\ z'' - \frac{2r'z'}{r} &= -\frac{e}{mc} \frac{\sqrt{r'^2 + r^2 + z'^2}}{v} \left(r'H_\varphi - rH_r - \frac{z'^2}{r}H_r + \frac{z'r'}{r}H_z \right), \end{aligned} \quad (1)$$

此处 r' 及 z' 表示对 φ 的微分, H_z, H_r, H_φ 为相应的各磁場分量, mv 是粒子的动量。

設在中心平面的磁場具有下形式:

$$H_z = H(r)[1 + \epsilon f(r, \varphi)], \quad (2)$$

此处 ϵ 是磁場的調幅度; $f(r, \varphi)$ 是 r 及 φ 的周期函数,其平均值为0。将(2)代入(1)式后,我們可以得到具有动量为 mv :

$$mv = p = \frac{e}{c} H(R)R \quad (3)$$

的粒子的运动方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \rho'' + \left[1 + n + \epsilon R \frac{\partial f}{\partial r} + (2+n)\epsilon f \right] \rho + \left[\frac{1}{R} \left(d + \frac{3}{2} + 2n \right) \right. \\ \left. + \frac{\epsilon}{R} \left(\frac{3}{2} + 2n + \frac{d}{2} \right) f + \epsilon(2+n) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\epsilon R}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right] \rho^2 - \frac{1}{2R} [1 - 3\epsilon f] \rho'^2 \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{2d}{R} + \dots \right] z^2 - \dots = -\epsilon R f, \right\} \quad (4) \\ \left. \begin{aligned} z'' - \left[n + \epsilon n f + \epsilon R \frac{\partial f}{\partial r} \right] z - \left[\frac{2}{R} (n+d) + \frac{2\epsilon}{R} (n+d) f + 2\epsilon(1+n) \frac{\partial f}{\partial r} \right. \\ \left. + \epsilon R \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right] z \rho + \dots = 0, \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

此处

$$\rho = r - R, \quad n = \frac{R}{H(R)} \frac{dH(r)}{dr} \Big|_{r=R}, \quad d = \frac{1}{2} \frac{R^2}{H(R)} \frac{d^2H(r)}{dr^2} \Big|_{r=R}.$$

閉合軌道的方程在綫性近似的情況下, 可以由方程(4)得到, 其形為

$$\bar{\rho}'' + \left[1 + n + \varepsilon R \frac{\partial f}{\partial r} + (2 + n) \varepsilon f \right] \bar{\rho} = -\varepsilon R f, \quad (5)$$

而對於圍繞閉合軌道所作的振蕩, 則應滿足下面的方程:

$$\left. \begin{aligned} \rho'' + \left[1 + n + \varepsilon R \frac{\partial f}{\partial r} + (2 + n) \varepsilon f + \frac{1}{R} (3 + 4n + 2d) \bar{\rho} \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{R} (3 + 4n + d) f \bar{\rho} + 2\varepsilon (2 + n) \bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial r} + \varepsilon R \bar{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \right] \rho \\ - \frac{1}{R} (1 - 3\varepsilon f) \bar{\rho}' \rho' = 0, \\ z'' - \left[n + \varepsilon n f + \varepsilon R \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{2}{R} (n + d) \bar{\rho} + \frac{2\varepsilon}{R} (n + d) \bar{\rho} f \right. \\ \left. + 2\varepsilon (1 + n) \bar{\rho} \frac{\partial f}{\partial r} + \varepsilon R \bar{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\varepsilon}{R} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \bar{\rho}' \right] z - \frac{1}{R} (1 - \varepsilon f) \bar{\rho}' z' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

今設 f 具有形式為

$$f = \sin(\Phi(r) - N\varphi), \quad (7)$$

其中 $\Phi(r)$ 為未知的任意函數, 應由上列方程附加一定的條件來求得。然後由 $\Phi(r) = N\varphi$ 求得 $r = G(\varphi)$, 即相應方案中應採用的螺旋綫的表示式。

由(7)式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= \frac{d\Phi}{dr} \cos(\Phi(r) - N\varphi) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} &= \frac{d^2\Phi}{dr^2} \cos(\Phi(r) - N\varphi) - \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 \sin(\Phi(r) - N\varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

代入(5)式, 求得 $\bar{\rho}$ 之解為

$$\bar{\rho} = \frac{\varepsilon R}{N^2 - (1 + n)} \sin(\Phi(R) - N\varphi) - \frac{\varepsilon^2 R (2 + n)}{2[N^2 - (1 + n)](1 + n)} + \dots, \quad (9)$$

將(9)式和(8)式代入(6)式, 則在綫性近似下方程化為

$$\left. \begin{aligned} \rho'' + \left\{ 1 + n + \varepsilon R \frac{d\Phi}{dr} \cos(\Phi(R) - N\varphi) - \frac{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2}{2[N^2 - (1 + n)]} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2 R^2 \frac{d^2\Phi}{dr^2}}{2[N^2 - (1 + n)]} \sin 2(\Phi(R) - N\varphi) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2}{2[N^2 - (1 + n)]} \cos 2(\Phi(R) - N\varphi) \right\} \rho = 0, \end{aligned} \right\}$$

$$z'' + \left\{ -n - \varepsilon R \frac{d\Phi}{dr} \cos(\Phi(R) - N\varphi) + \frac{\varepsilon^2 N^2}{2[N^2 - (1+n)]} + \frac{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2}{2[N^2 - (1+n)]} - \frac{\varepsilon^2 R^2 \frac{d^2\Phi}{dr^2}}{2[N^2 - (1+n)]} \sin 2(\Phi(R) - N\varphi) - \frac{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2}{2[N^2 - (1+n)]} \cos 2(\Phi(R) - N\varphi) \right\} z = 0. \quad (10)$$

若采用 $\Phi(R) = \frac{r}{\lambda}$, 则 $\frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{\lambda}$, $\frac{d^2\Phi}{dr^2} = 0$; 代入 (9) 式后, 即得阿基米德螺旋线的全部方程, 这与文献[1]中全部相符。

在 $\Phi(r)$ 为任意函数时, $\frac{d^2\Phi}{dr^2} \neq 0$, 则在 (9) 式中比文献[1]的 (11) 式多了 $2N\varphi$ 的周期项, 但是由电子计算机的结果知道, 在我们的情况下, 略去 $2N\varphi$ 周期项引起的误差将是很小的¹⁾, 对结论不可能引起决定性的改变, 利用变数变换 $2\xi = \Phi(R) - N\varphi$, 则在略去某些较小的项后, 即得

$$\begin{aligned} \rho'' + (a_\rho + 2q \cos 2\xi) \rho &= 0, \\ z'' + (a_z - 2q \cos 2\xi) z &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} a_\rho &= \frac{4}{N^2} \left\{ 1 + n - \frac{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 \Big|_R}{2N^2 \left(1 - \frac{1+n}{N^2}\right)} \right\}, \\ a_z &= -\frac{4}{N^2} \left\{ n - \frac{\varepsilon^2}{2 \left(1 - \frac{1+n}{N^2}\right)} - \frac{\varepsilon^2 R^2 \left(\frac{d\Phi}{dr}\right)^2 \Big|_R}{2N^2 \left(1 - \frac{1+n}{N^2}\right)} \right\}, \\ q &= \frac{2\varepsilon}{N^2} R \left(\frac{d\Phi}{dr}\right) \Big|_R. \end{aligned} \quad (12)$$

到目前为止, $\Phi(r)$ 为 r 之未知函数, 故上式粗看起来, 其物理意义是极不明显的, 讨论起来亦极为困难, 但是如果作下列一些简单变换, 我们将得到一系列崭新的物理概念。

因为

$$\frac{d\Phi(r)}{d\varphi} = \frac{d\Phi(r)}{dr} \frac{dr}{d\varphi} = N,$$

所以

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{N}{r'}, \quad (13)$$

再引入一新的参数 θ , $\tan \theta = \frac{r}{r'} \Big|_R$, θ 的物理意义很明显, 即指所采用的螺旋线在半径为

1) 本文所得的结果可以证明, 略去 $2N\varphi$ 项是允许的。

R 处的切綫与徑向矢量所成之夾角, 如图 1 所示。于是(12)式变为

$$\left. \begin{aligned} a_\rho &= \frac{4}{N^2} \left\{ 1 + n - \frac{\epsilon^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \left(1 - \frac{1+n}{N^2} \right)} \right\}, \\ a_z &= \frac{4}{N^2} \left\{ -n + \frac{\epsilon^2}{2 \left(1 - \frac{1+n}{N^2} \right)} + \frac{\epsilon^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \left(1 - \frac{1+n}{N^2} \right)} \right\}, \\ q &= \frac{2\epsilon}{N} \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

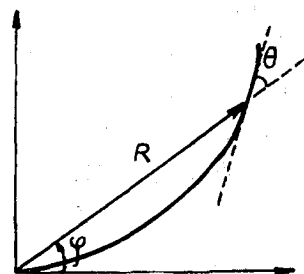


图 1

这表示粒子运动状态完全被当地的螺旋綫弯曲度 θ 来决定, 因此参数 θ 在設計时具有重大的意义。在某一能量, 理論上对不同的 θ 就要求不同的 ϵ , 才能滿足一定的运动状态。

由方程(14)求得的 ϵ , 我們用 ϵ_r 表示, 此意味着在理論上所要求之調變值。

二、实际的調變度 ϵ_n 的函数关系

在設計具体方案时, 决不应该脱离实际而单从純理論方面出发, 实际上, 理論上的最好方案往往不是实际上的最好方案, 同样在本文中为了求得最合适的曲綫形式, 因而必須具体研究一下实际上調變度的函数关系, 在文献 [4] 中曾給出了一个正确度很好的近似公式:

$$\epsilon_n = \frac{8M}{H_x} \sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right) e^{-\frac{Nh}{r \cos \theta}} \left[1 - e^{-\frac{2NL}{r \cos \theta}} \right], \quad (15a)$$

式中 M 为磁化系数, h 为螺旋綫垫片表面到中心平面的間距, L 为螺旋綫垫片本身的高度, α 为与螺旋綫垫片寬度有关之参数。在一般情况下, 为使磁場調變度尽可能的大, 故我們使螺旋的寬度随半径的改变而改变, 即始終保持 (15a) 中的正弦項为 1, 由此得

$$\epsilon_n = \frac{8M}{H_x} e^{-\frac{Nh}{r \cos \theta}} \left[1 - e^{-\frac{2NL}{r \cos \theta}} \right], \quad (15)$$

經過实验数据的檢驗^[4], 此式有很好的正确度。

由于在实际情况下, $e^{-\frac{2NL}{r \cos \theta}} \ll 1$, 因此对 ϵ 的主要貢獻是来自第一項指数, 很明显, 为了討論方便起見, 我們把(15)式再度簡化为

$$\epsilon_n = A e^{-\frac{\delta}{\beta \cos \theta}}, \quad (16)$$

式中 $A = \frac{8M}{H_x}$ 与磁性材料的性能有关之常数。

$$\delta = \frac{Nh}{r_\infty}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{r}{r_\infty}, \quad r_\infty = \frac{E_0}{eH(0)}.$$

这样的近似不会使結論引起重大的定性改变, 在实际設計时, 即使采用(15)式亦不是太麻煩的, 順便指出一点, 在原則上我們只須知道 $\epsilon_n = \epsilon_n(\delta, \beta, \theta)$, 不管它是那一种函

数形式,我們均可利用下面的方法来求得其相应的最合适調变曲綫形式。

由(16)式可知,在小半径时 $\beta \rightarrow 0$, 則当 δ 为有限值时, ϵ_n 是一很小的量,因此肯定地说,一定存在着一个区域,在这个区域中,不論选择何种調变場曲綫,不但不能使 z 向运动的工作点沿着某一指定的工作綫路运行(即指有一定的振蕩頻率,例如 $\mu_z = \text{const}$),而且甚至連最起码的运动稳定性的条件($\mu_z = 0$)亦不能滿足,但当 β 逐漸增大(即到大半径区域),在适当的选择参数 δ, θ 时,就可能使 ϵ_n 充分大,而且滿足 $\epsilon_n = \epsilon_T$, 也就是使粒子沿着所期望的工作路綫(如 $\mu_z = \text{const}$) 运行。因此在討論过程中,就可以把問題分成三部分:(1)中心区域——即指运动进入稳定区之前的区域(此时 μ_z 为虚数)。(2)大半径区域——即指已經在所期望的工作路綫上运行的区域($\mu_z = \text{某一期望的常数}$)。(3)过渡区域——即指已进入稳定区域但又尚未达到所期望的工作路綫上的那一段区域,此时 z 向振蕩頻率 μ_z 由 0 变到某一期望的常数值。

三、中心区域所要求的最合适的螺旋綫形式

在中心区域能量 $\geq 1 \text{ Mev}$ 时,粒子在磁場中所遵从的規律(見[5])基本上允許用(10)式来描写,因此我們可以放心地来利用(14)式作为討論的基础。

如上所述,在中心区,在一定的磁間隙高度下($\delta = \text{有限值}$ 时),实验上所能給的 ϵ_n 是不能达到理論上的相应于 $\mu_z = 0$ 所給出的 ϵ_T 的要求的,因此在中心区必将引起散焦現象。因而我們理論上要求的所謂最合适的曲綫亦就是指能使这种散焦力減弱到最低程度的曲綫,換言之,即求 $-\theta$ 对 R 的函数,滿足这种函数时,克服散焦力所化之力量为最少。下面将求得这种条件。

在稳定区的边界, $\mu_z = 0$, 則要求 $a_z \simeq \frac{1}{2} q^2$, 由(14)式得知,即

$$-n + \frac{\epsilon_T^2}{2} + \epsilon_T^2 \text{tg}^2 \theta \cong 0. \quad (17)$$

由于实验上的 ϵ_n 在任何 θ 时,都不能滿足上式中所要求的 ϵ_T , 因此等式(17)在实际情况下是不成立的。即出現了散焦力,为了克服这种散焦力,我們假設利用人工方法給一附加的 Δn , 而使(17)式被滿足,即

$$\Delta n = \frac{\epsilon_n^2}{2} + \epsilon_n^2 \text{tg}^2 \theta - n. \quad (18)$$

最明显的 Δn 是利用牺牲共振条件来达到的。換言之,为克服散焦力,則粒子在中心区将不可避免地发生相对于加速电場的滑相,为了尽可能的減少这种滑相,則必須选择这种曲綫,使 Δn 为減小,即要求在任意一确定之半径上有

$$\left. \frac{\partial \Delta n}{\partial \theta} \right|_{\beta=\text{const}} = 0, \quad (19)$$

因为

$$\Delta n = A^2 e^{-\frac{2\delta}{\beta \cos \theta}} (0.5 + \text{tg}^2 \theta) - \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}, \quad (20)$$

由(20)式知,如(19)式成立,則必須

$$A^2 e^{-\frac{2\delta}{\beta \cos \theta}} \left\{ \left(-2 \frac{\delta}{\beta} \sec \theta \operatorname{tg} \theta \right) \left(\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2 \theta \right) + 2 \operatorname{tg} \theta \sec^2 \theta \right\} = 0, \quad (21)$$

即要求

$$\operatorname{tg} \theta = 0 \quad (\text{当 } \theta = 0^\circ \text{ 时}) \quad \left(\text{当 } \frac{\delta}{\beta} \neq \frac{\sec \theta}{\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2 \theta} \right), \quad (22)$$

或

$$\frac{\delta}{\beta} = \frac{\sec \theta}{\frac{1}{2} + \operatorname{tg}^2 \theta}, \quad (\text{当 } \operatorname{tg} \theta \neq 0) \quad (23)$$

成立。

(23)式只有当 $\frac{\beta}{\delta} \geq \frac{1}{2}$ 时才有解,經過証明可知,当 $\frac{\beta}{\delta} \leq \frac{1}{2}$ 时,(22)是 Δn 的极小条件,当 $\frac{\beta}{\delta} \geq \frac{1}{2}$ 时,极小条件由(23)式决定,因此我們得出在 $\beta \leq \frac{1}{2} \delta$ 的区域内,应该采用托馬斯式垫片 ($\theta = 0^\circ$),而当 $\beta \geq \frac{1}{2} \delta$ 时,由(23)式在給定某一肯定的 δ 值下,就可以求得相应半径 r (即 β) 上所采用的 θ 值,即可推知曲綫的規律。在 $\beta = \frac{1}{2} \delta$ 时,(22),(23)式給出相同的条件,因此过渡是光滑的。

由 δ 的定义可知,托馬斯垫片的終結半径为 $r_1 = \frac{N}{2} h$,即与磁間隙有很密切的关系。但是很有意思的是托馬斯垫片的終結半径与 A 的值无关。即与磁化系数 M 无关,因此 M 的測不定在原則上不会影响到上列的結果,只要 M 是 h, L, θ, β 等的慢变函数即可。但 M 值的大小直接影响到散焦力的数值以及散焦区伸展范围的大小。值得指出的是,当 ϵ_n 不具有(15)的形式时,但只要 ϵ_n 是 $\cos \theta$ 的函数,那么有关中心区采用托馬斯式的結論还是不变。

此外由(18)式可以决定(23)所适用的范围,即可以确定散焦区域所延伸之半径,在同时滿足(23)式及 $\Delta n = 0$ 时,可以解得一 β_2 值,在此半径 r_2 上 ($r_2 = \beta_2 r_\infty$),理論上与实验上所要求的 ϵ 相等,即在該点恰好使 $\mu_x = 0$,粒子运动位于稳定区域的边界,因而(23)式只适用在 $r \leq r_2$ 的范围之内,可以証明,在滿足上列条件下求得的 β_2 是最小值¹⁾,即如果采用这种曲綫,可以使中心的散焦区域縮小到最小的程度。物理意义是很明显的,即在每一点的散焦力是最小时,則必然会使 ϵ_n 与 ϵ_r 相交的那一点所相应的 β_2 为最小。

順便提一下,当 $r > r_2$ 时,利用(23)式及 $\Delta n = 0$ 所确定的 $\beta = \beta(\theta)$,是表示此时在滿足 $\epsilon_n = \epsilon_r$ 的条件下(即沿 $\mu_x = 0$ 运行时)曲綫給出的 δ_1 是最大的²⁾。当所采用的磁間隙大于相应的 δ_1 时,則粒子受到散焦力,当采用的磁間隙小于 δ_1 时,則粒子受到聚焦力,实际上在 $\beta > \beta_2$ 时,我們決不愿使工作点还沿着稳定区边界运行 ($\mu_x = 0$)。而是使粒子尽快地进入稳定区,达到所期望的工作路綫上去。关于这一点,我們将于过渡区中詳細

1) 因为此时 $\frac{d\beta}{d\theta} = 0$ 的条件,又与 $\frac{\partial \Delta n}{\partial \theta} \Big|_{\beta} = 0$ 的条件等价。

2) 因为此时 $\frac{d\delta}{d\theta} = 0$, 恰恰又与 $\frac{\partial \Delta n}{\partial \theta} \Big|_{\beta, \delta} = 0$ 的条件等价。

討論.

四、在大半径区域的最合适的螺旋綫形式

在大半径区域,我們往往要求粒子运行在某一 $\mu_z = \text{const}$ 的工作路綫上,此时理論上所要求的 ϵ_T 亦比較中心区来得大. 尽管如此,在一定条件下, ϵ_n 能够滿足甚至可超过理論上所要求的 ϵ_T , 此时往往由于机械技术上的考虑来选择应有的 θ 值,使在該 θ 时,一方面滿足 $\epsilon_n = \epsilon_T$, 而且使磁間隙有极大值,即 δ 有极大值.

根据电子計算机計算的結果,我們可以知道,在极好的精确度下,可以利用一拋物綫方程 $a = cq^2 + b$ 来描写等 μ_z 綫,其中 c 及 b 是常数,由所取的等 μ_z 綫决定,即在 Матве 工作图中在所用的工作路綫上选择任意二点来求得,在一定条件下所选择的 b, c , 可以保証此拋物綫所引起的誤差 $\Delta a \ll 10^{-5}$, 因此可以利用此方程来求得最合适的条件.

再度利用(14)式,可求得

$$-n + \frac{\epsilon_T^2}{2 \left[1 - \frac{1+n}{N^2} \right]} + \frac{\epsilon_T^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{2 \left[1 - \frac{1+n}{N^2} \right]} = -c \epsilon_T^2 \operatorname{tg}^2 \theta + \frac{N^2}{4} b, \quad (24)$$

如果由于磁铁的間隙 δ 用得太大,以致于上式不能成立时,則必須采用一相应的“ Δn ”来达到上述的要求:

$$\Delta n = -n + A^2 e^{-\frac{2\delta}{\beta \cos \theta}} \left[\frac{\sec \theta}{2 \left[1 - \frac{1+n}{N^2} \right]} + c \operatorname{tg}^2 \theta \right] - \frac{N^2}{4} b. \quad (25)$$

在实际情况下,要求 $\Delta n = 0$, 并且使在某一个給定的半径时, δ 尽可能的具有最大值,此

即要求 $\frac{d\delta}{d\theta} = 0$, 很明显,后者是与 $\frac{\partial \Delta n}{\partial \theta} \Big|_{\beta, \delta} = 0$ 的条件完全等价的,即

$$\frac{\delta}{\beta \cos \theta} = \left[c + \frac{1}{2 \left[1 - \frac{1+n}{N^2} \right]} \right] \Bigg/ \left[c \sin^2 \theta + \frac{1}{2 \left[1 - \frac{1+n}{N^2} \right]} \right]. \quad (26)$$

令(25)式 $\Delta n = 0$, 与(26)式可以解得在某一半径 R (即 β) 上所能給之最大 δ 值和相应的 θ 值, 利用此数据可求得相应的 ϵ, a, q 值,即可推知該能量所相应的工作点. 当然此工作点是位于我們所期望的工作路綫上的. 而且利用此法求得之最大可利用的磁間隙是半径之函数.

若在技术上希望磁間隙在各半径上保持常数,則上面的(26)式为 $\delta = \delta_0$ 之条件所代替,其中 δ_0 为某一常数,因为計算方法基本不变,故不再重复.

五、过渡区域所要求的最合适曲綫形式

到目前为止,尚存在着一个过渡区域,即凡是 β 略大于 β_2 的地区. 在此区域内,实验上 ϵ_n 还不能使工作点到达所期望的 $\mu_z = \text{const}$ 綫,因此在这一段所謂最合适曲綫,即指

在一定磁間隙下,該曲綫應使工作點以更快的速度到達所期望的工作路綫上去。換言之,即希望儘快地離開穩定區的邊界(當然在此段過程中,工作路綫 $\mu_x \neq \text{const}$)。

在數學上要求,相應的(18)式為

$$\begin{cases} \Delta n \geq 0, \\ \frac{\partial \Delta n}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \text{ 當 } \beta \geq \beta_2, \quad (27)$$

後者相應具有極大值,即所謂有最大的聚焦力,(27)式一直用到與所希望的工作路綫 ($\mu_x = \text{const}$) 相交為止。

六、最合適曲綫的作圖法

由上列方法我們可以得到一系列的數據,這些曲綫給出了最合適曲綫的 θ 為 r 的函數,因此如何由這些數據來求得所求之曲綫亦是一個關鍵問題,我們採用作圖法,為此第一步應把 θ 與 r 的函數關係轉化為 r 與 φ 的關係,因

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\tan \theta}, \quad (28)$$

利用普通的梯形積分法,由下積分

$$\int_0^r \frac{\tan \theta}{r} dr = \varphi \quad (29)$$

求得 r 為 φ 之函數,然後可由作圖求得曲綫的具體形狀,當然所取的點數應保證曲綫所要求的精密度。

所求得之曲綫具有形如圖 2 之形式。

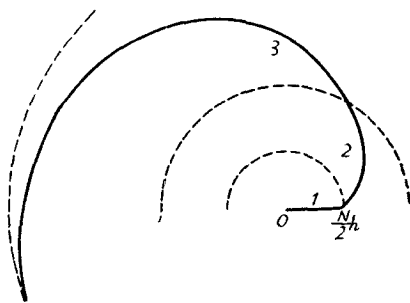


圖 2

1. 中心區域; 2. 過渡區域; 3. 大半徑區域。

參 考 文 獻

- [1] Дмитриевский, В. П., Кольга, В. В., И. Т. П., *Атомная энергия*, 8, вып. 3, (1960), 198.
- [2] Martin, J. A., *International Conference on High-Energy Accelerators and Instrumentation*, (1959) p. 205.
- [3] King, N. M., Walkinshaw, W. *Illus Ref*, GP/R 2050, (1956).
- [4] Данилов, В. И., Заплатин, Н. Л., Лю Нэ-Чуань, И. Т. П., *Отчет ЛЯП ОИЯИ СССР*, (1960).
- [5] Фан Шоу-сянь, *Препринт ЛЯП ОИЯИ СССР*, (1960).

МЕТОДИКА О ВЫБОРЕ ФОРМЫ СПИРАЛИ В ЦИКЛОТРОНЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МАГНИТНОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Фан Шоу-сянь

Резюме

В данной работе проводилось исследование циклотрона с пространственной вариацией, имеющей форму $f = s \sin (\Phi(r) - N\varphi)$ и обсуждение о способе выбора формы вариационной кривой $\Phi(r)$. Таким образом и нашли форму самой подходящей кривой, удовлетворяющей определённым условиям. В центральной области циклотрона эта кривая принимает форму Томаса, а в области большого радиуса — форму плавно соединённых друг с другом спиралей Архимеда с разными параметрами. Применение таких кривых обладает целым рядом преимуществ. Так например, уменьшение дефокусирующей силы до минимума в центральной области циклотрона, ослабление также нелинейного резонанса. Кроме того при заданном сдвиге фазы из-за компенсации дефокусирующей силы в центральной области необходимое напряжение на дуантах сильно снижается. Причём ещё добывается самый большой зазор между магнитными спиральными шиммами в области большого радиуса.