

多波型波导耦合本地正规波型的 广义理论^{*1)}

黄 宏 嘉

在本文中作者提出了耦合本地正规波型的广义理论；它建立在作者在另一篇论文中提出的数学方法——“缓变系数法”的基础上。为了说明这种方法的应用，依次解出了考虑两个及三个耦合波型的缓变曲率波导弯曲问题。在两个耦合波型的情形下，所得结果与 Louisell 及 Unger 已得结果相符合。三个耦合波型的问题在以前的文献中尚未讨论过。本文讨论了所提出的理论及数学方法在其它方面的应用。

引 言

从数学的观点来看，最早关于“波型分析”的概念始于 Fourier。在电磁波理论中，Schelkunoff^[1]指出：对于非理想波导，采用适当的波型分析常可得出有用的结果。与此同时，Каценеленбаум^[2]在他的关于波导传输的一系列论文中发展了波型分析。

在电磁波理论中尤其是在波导传输中，Schelkunoff 的“电报员方程”有着各种不同的应用，特别是，Miller^[3]曾应用这些方程提出耦合波理论。

Miller 的理论并不是普遍的。这可以从两个方面看出：第一，它假定每次可仅考虑两个波型之间的耦合；第二，它只研究了常参数波导系统的特殊情形。

在小口加藤^[4]的一篇关于弯曲问题的论文中，考虑了多于两个耦合波型的问题，发展了耦合波理论。另一篇 Brown^[5]的论文研究了多组传输线系统。但是，这些论文仍只处理了常参数问题，而没有进一步研究更普遍的变耦合情形。

Louisell^[6]首先解决了缓变参数波导系统中两个耦合波型的问题；在他的数学分析中，引进了一对本地正规波型，它们的物理概念在 Cook^[7]和 Fox^[8]的两篇论文中作了清楚的说明。但是，Louisell 仅仅写出了他在解决两个耦合波型问题时所用的数学变换，而没有提出任何系统的数学方法。同时，Louisell 的结果也不是普遍的，它只适用于两个波型的情形。继 Louisell 之后，Unger^[9]发表了一系列的论文，Andreassen^[10]也发表了一篇论文，他们成功地将 Louisell 的数学结果应用于波导元件的设计。但是，他们也都没有进一步考虑多于两个波型的缓变耦合问题。

在本文中，作者提出了多波型波导耦合本地正规波型的广义理论，所解决的问题较上述许多工作均为普遍。本文将应用“缓变系数法”^[11]一文中已证的关于变元矩阵的定理将

* 1960年11月24日收到。

1) 本文的主要内容曾在中国科学 (SCIENTIA SINICA) (1960年1月) 上用英文发表；在 Реферативный Журнал Физика, Сводный том (1961, 8月) 上发表了该文的俄文文摘，其后，文中的数学部分在数学学报上发表 (1961, 9月)。但论文的物理部分迄未在中文杂志上发表过；这里发表的是经过了部分改写的论文，其中精简了某些数学证明，补充了应用实例。

$n(\geq 2)$ 个緩变耦合波型的联立方程变换为耦合本地正規波型的方程組,进而应用迭代近似法得出后一方程組的解。在进入詳細的数学分析之前,讓我們闡明耦合本地正規波型的普遍的物理概念。

一、物理概念

在多波型波导中,电磁波一般說既向前也同时向后传播。但是,在大多数实际情况下,向后传播的波常很弱,因而在分析中可以忽略。

向前波在实际波导中是互相耦合的,耦合强度决定于波导結構中不規則性出現的形式及其幅度。如果不規則性是均匀的(例如橫截面形状及弯曲曲率均不改变),那么,原来是用一組耦合的(但对一較簡單結構是正規的)波型来描述的电磁場,就能換用一組不耦合的或实际結構的正規波型来描述。

对于更普遍的具有非均匀不規則性的波导,理論上仍然可能用一組不耦合的或实际結構的正規波型来描述波导中的場。但是,除了极少数簡單情形,数学上这些正規波型一般很难求出。

讓我們研究一种重要的实际情形,即具有緩变不規則性的波导系統。对于这样的系統,很自然地会問:是否存在这样的場結構或波型,当它們在波导中前进时,每一波型的传播常数都連續地变化着,并且在任何橫截面上,波型的传播常数仅仅决定于該橫截面位置的“本地特性”,而与这些特性沿波导軸的变率无关(这里,波导某一橫截面的“本地特性”不仅是指該橫截面的几何形状,也同时包括該橫截面位置的耦合机构,例如轉弯的曲率)。对于上述問題,我們的回答是:这样的波型是存在的。但我們必須立刻补充一句:这样的波型并不独立地存在。这是因为,虽然上面所描述的波型在以后的分析中将被称为本地正規波型,但从“正規”这个詞的严格意义讲,这些波型并不是正規的;实际上,它們是互相耦合的。但是,和处理多波型波导問題时通常用的耦合波型不同,本地正規波型之間的耦合强度比例于波导不規則性的变率,而不决定于不規則性的幅度本身(这个結論在下面的数学分析中将要得到証明)。因此,当不規則性的变率逐漸消失时,本地正規波型将化为一个相对应的均匀不規則波导的正規波型。Cook 及 Fox 描述了两个波型的情形。本文将本地正規波型的概念推广到多个波型的普遍情形。下面將証明:在緩变参数的多波型波导中,原来的 $n(\geq 2)$ 个耦合波型总是能够用另一組 n 个耦合本地正規波型来代替;本地正規波型的传播常数改变了,它們之間的耦合也減弱了。換句話說,緩变参数多波型波导的本地正規波型是“准正規的”。

二、数学分析

广义的緩变耦合波型方程組可表为下列矩陣方程:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{K}\mathbf{E}, \quad (1)$$

这里 $\mathbf{E}$ 是一个列矩陣,其元代表向前波的幅度,并且已被归一化,因而 $|E_k|^2 (k=1,2,\dots,n)$ 直接代表向前流动的功率; $\dot{\mathbf{E}}$ 是 $\mathbf{E}$ 的导数,即 $\dot{\mathbf{E}}$ 中諸元是 $\mathbf{E}$ 中对应元的导数。 $\mathbf{K}$ 是一变元方陣:它的对角綫元是耦合波型的传播常数,它們是一較簡單結構中非耦合波型的传播常数加上由于实际結構中波型耦合而产生的微扰項(微扰項常很小,可以忽略);它的对角

綫外諸元代表耦合波型之間的耦合係數, 這些係數在耦合機構是無耗的情況下一般是純虛數。

為了從迭代方法得出有用的結果, 必須將(1)變換為另一組耦合強度減弱了的耦合波型方程, 這樣, 級數解才收斂得快。為此, 我們進行下列變換:

$$\mathbf{E} = \mathbf{O}\mathbf{W} \quad (2)$$

這裡, $\mathbf{O}$ 是 $\mathbf{K}$ 的模態矩陣, $\mathbf{W}$ 是一個列矩陣, 其元數與 $\mathbf{E}$ 之元數相同。我們選擇歸一化的 w_k , 從而有 $\sum |w_k|^2 = \sum |E_k|^2$ 。由(1)及(2), 得

$$\dot{\mathbf{W}} = (\mathbf{O}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{O} - \mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{O}})\mathbf{W} = \mathbf{N}\mathbf{W} \quad (3)$$

這裡, $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{K}$ 的變元相似矩陣。

從“緩變係數法”^[13]一文中證明過的定理可知, 矩陣 $\mathbf{N}$ 具有這樣的形式(特性), 即它的對角綫元是 $\mathbf{K}$ 的本征值, 而它的對角綫外諸元比例於 $\mathbf{O}$ 或 $\mathbf{K}$ 中諸元的導函數 ($N_{kk} = \lambda_k$; $N_{rs} = \sum O_{ir} \dot{O}_{is} = -N_{sr}$, $s \neq r$)。由此可見, 列矩陣 $\mathbf{W}$ 的元代表本地正規波型, 它們之間的耦合在 $\mathbf{K}$ 中諸元是緩變函數的情況下是大大減弱了。

這樣, 通過(2)就能應用迭代近似法得出(3)的解。首先從(3)得出下列本地正規波型的關係式:

$$w_k(z) = e^{\rho_k(z)} \left\{ w_k(0) - \sum_{r \neq k} w_r(0) \int_0^z N_{kr}(z') e^{\rho_r(z') - \rho_k(z')} dz' + \right. \\ \left. + \sum_{r \neq k} \int_0^z e^{\rho_r(z') - \rho_k(z')} N_{kr}(z') \int_0^{z'} e^{-\rho_r(z'')} \left[\sum_{s \neq r} N_{rs}(z'') w_s(z'') \right] dz'' dz' \right\}, \quad (4)$$

這裡, 和以前一樣, $N_{rs} = -N_{sr}$ ($s \neq r$)。當 $\mathbf{K}$ 中諸元是緩變函數時, N_{rs} ($s \neq r$) 很小, 這時, 我們能夠略去迭代過程中 N_{rs} 的高階項, 從而得出(3)的近似解:

$$w_k(z) \approx e^{\rho_k(z)} \left\{ w_k(0) - \sum_{r \neq k} w_r(0) \int_0^z N_{kr}(z') e^{\rho_r(z') - \rho_k(z')} dz' + \right. \\ \left. + \sum_{r \neq k} \int_0^z e^{\rho_r(z') - \rho_k(z')} N_{kr}(z') \sum_{s \neq r} w_s(0) \int_0^z e^{\rho_r(z'') - \rho_r(z''')} N_{rs}(z'') dz'' dz' \right\}. \quad (5)$$

在以上式子中, 為簡單起見, 採用了下列符號:

$$\rho_k(z) = \int_0^z \lambda_k(z) dz, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

本地正規波型解的起始條件 $w_k(0)$, 決定於原來的耦合波型的起始條件 $E_k(0)$, 以及多波型波導在 $z = 0$ 處的本地特性(傳播常數及耦合強度)。(2)式規定了本地正規波型起始條件和原來的耦合波型的起始條件之間的關係。

實際上, 常常遇到這樣的起始條件, 即 $K_{rs}(0) = 0$, $s \neq r$ 。具有這樣起始條件的多波型波導, 其波型耦合強度的起始值是零, 然後緩慢地增大。在這種情況下, 可以證明: 在起始位置, $\mathbf{K}$ 的模態矩陣 $\mathbf{O}$ 變為單位矩陣。因而, 在起始位置, 本地正規波型和投入波型具有“一與一”對應, 即

$$w_k(0) = E_k(0). \quad (7)$$

從上面提出的耦合本地正規波型的廣義理論, 可以得出結論: 對於一緩變參數多波型波導, 原來用一組 n (≥ 2) 個耦合波型來描述的电磁場, 在一定條件下, 總是能夠用另一組 n (≥ 2) 個耦合本地正規波型來描述, 而本地正規波型之間的耦合強度是大大減弱了。

在將上述耦合本地正規波型的廣義理論應用到多波型波導之前, 這裡稍微討論一下

关于本地正规波型解的唯一性和完全性问题。

在“缓变系数法”一文中已经说明了解的唯一性。关于解的完全性问题是这样提出的：如果投入一个多波型波导的波型数是 n ，那么，用相等数目的本地正规波型来代替原来的波型，是否必要和充分？或者说，可不可能换用另外一些组多于或少于 n 个耦合波型来代替？从前面联系耦合波型和本地正规波型的关系统式，可以知道，已得的本地正规波型解是完全的；显然，由(2)，如果电磁场能够用 $\mathbf{E}$ 来完全地描述，它也同样能够用 $\mathbf{W}$ 来完全地描述，反之亦然。

三、应用举例

现在我们应用前面提出的方法来解决波导传输中的一个重要问题，即缓变参数弯曲问题。我们首先考虑双耦合波型，进而处理三个耦合波型的问题。

3.1 缓变参数弯曲波导中的双耦合波型

对于双耦合波型的情形，(1)中矩阵都是 2 价。矩阵 $\mathbf{K}$ 可写成下列形式：

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & jc \\ jc & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\gamma_{1,2} = j\beta_{1,2} + \alpha_{1,2}$ 各代表波型 1 和 2 (即 H_{01} 和 E_{11}) 的传播常数 (这里忽略因波型耦合而产生的附加微扰项)； $c(z) = c_0(d\theta/dz)$ 是缓变曲率弯波导中 H_{01} 和 E_{11} 之间的耦合系数， θ 代表波导轴的方向。 c_0 是相对应的定曲率弯波导中 H_{01} 和 E_{11} 的耦合系数 (在很多文献中^[12]都已给出 c_0 的值，同时给出定曲率弯波导中其它波型之间耦合系数的值)。

矩阵 $\mathbf{O}$ 化 $\mathbf{O}^{-1}\mathbf{KO}$ 为对角线型，其对角线元 λ_1 和 λ_2 是 $\mathbf{K}$ 的两个相异的本征值，它们是特征方程 $(\gamma_1 + \lambda)(\gamma_2 + \lambda) + c^2 = 0$ 的根，即

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \Gamma, \quad (9)$$

其中 $\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$ ， $\Gamma = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta\gamma^2 - 4c^2}$ ， $\Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ 。从上面给出的本征值，即能求出模态矩阵 $\mathbf{O}$ 的元。但在求模态矩阵之前，这里我们不妨先研究一下二阶方阵的特性。如前所述，模态矩阵对应于 Hilbert 空间的正交单位矢量集；对于我们所研究的二维情形， $\mathbf{O}$ 中二矢量化为两个互相垂直的单位平面矢量。由此可见， O_{11} 和 O_{22} 相等；同时，当它们都写成 $\cos \varphi$ 时，对角线外的二元 O_{12} 和 O_{21} 各为 $-\sin \varphi$ 和 $\sin \varphi$ 。因此，对于两个耦合波型的情形，模态矩阵可写成下列形式：

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中 φ 可用矩阵论中求模态矩阵的一般方法来决定。经过简单的数学推导，即得

$$\varphi = \text{arctg}(j2c/\Delta\gamma).$$

从(10)，很容易得出 $\mathbf{O}^{-1}\mathbf{O}$ ，从而得出下式：

$$\mathbf{N} = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{KO} - \mathbf{O}^{-1}\dot{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} -\gamma + \Gamma & \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & -\gamma - \Gamma \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中 $\dot{\varphi} = d\varphi/dz$ 。因此，由(3)，二本地正规波型满足下列弱耦合方程组：

$$\begin{aligned}\dot{w}_1 &= -(\gamma - \Gamma)w_1 + \dot{\phi}w_2, \\ \dot{w}_2 &= -\dot{\phi}w_1 - (\gamma + \Gamma)w_2.\end{aligned}\quad (12)$$

从(11)及(12), 显而易见, 二本地正規波型通过 $\dot{\phi}$ 項发生耦合; 由于 $\dot{\phi}$ 是比例于 $c/\Delta\gamma$ 的变率, 因而对于緩变曲率弯波导, 本地正規波型之間的耦合强度 $\dot{\phi}$ 甚小于 E_1 和 E_2 之間的耦合强度。

其余的结果都能从公式(5)直接得出 ($k = 1, 2$); w_1 和 w_2 的起始条件由(2)来决定。为简单起见, 我们不重复写出(5)及(2)对于双耦合波型的特殊形式。

現在應該比較一下我們得到的結果和 Louisell 及 Unger 已得的結果。(12)中的 $\dot{\phi}$ 显然相当于 Louisell 及 Unger 方程中的 $\frac{1}{2} \frac{d\xi}{dz}$ 。但是, (12)中的 $-\gamma$ 項在 Louisell 及

Unger 的方程中未出現。从本文和以前引过的有关文献可以很清楚地看出, 所以有这个差别, 是因为我們所下的本地正規波型 w_1 和 w_2 的定义和 Louisell 及 Unger 下过的定义稍微有些不同(差一个乘数 $\exp(-\gamma z)$)。但是, 这个差别并不影响最后的结果; 当最后写出 E_1 和 E_2 的表达式时, 我們的结果和 Louisell 及 Unger 的结果完全相同。

我們所以采用自己的关于本地正規波型的定义, 是根据下述的理由。如前面討論过的, 本地正規波型很自然的应该定义为这样的波型: 它們在波导任一横截面上的传播特性仅决定于該横截面的本地特性, 而通过比例于波导特性变率的項发生耦合, 并且当波导特性的变率趋于无限小时, 本地正規波型应变为相对应的具有均匀特性的波导系統中的不耦合正規波型(这里, 和以前一样, 均匀特性是指传播常数和耦合强度均不变)。很明显的, 我們所下的本地正規波型的定义是和上述概念完全符合的, 而 Louisell 及 Unger 下过的“本地正規波型”的定义只是在乘以 $\exp(-\gamma z)$ 之后才完全地符合了“本地正規”的含义。数学上, 对于只考虑两个耦合波型的弯曲問題, 如果我們愿意, 我們也能以一共同乘数 $\exp(-\gamma z)$ 加在二阶模态矩陣(10)的每一元上, 并且下出和 Louisell 及 Unger 相同的关于本地正規波型的定义; 在这样的定义下, 从简单的数学推导可知, $\mathbf{N}$ 的对角綫元变为 $\pm\Gamma$, 而其对角綫外的元仍然不变。但是, 对模态矩陣所有的元都引入一共同乘数在数学推导上会增加很多麻煩, 特别是在处理多于两个耦合波型的时候。因此, 为了在物理概念上更清楚, 同时也为了在数学推导上比較簡單, 我們采用了自己的关于本地規波型的定义(即便对于两个耦合波型, 也采用同一定义)。

3.2 緩变参数波导中的三个耦合波型

現在我們研究緩变参数弯波导中的三个耦合波型問題。为了說明多考虑一个耦合波型的实际意义, 只要指出这样的事实就够了: 这就是, 在实际的波导传输系統中, 有效地抑制 H_{12} 波型仍然是一个沒有完全解決的問題。这种 H_{12} 波型几乎发生在波导传输系統中的所有缺陷部分, 例如: 軸心偏移、接头傾斜或波导的任何弯曲等等。在非圓电场波型中, H_{01} 具有最低的衰減; 在一般波导系統中, 它的衰減常数并不比 H_{01} 的衰減常数大太多倍。事实上, H_{12} 是仅次于 E_{11} 的最討厭的杂波。同时, 更討厭的是这种杂波比实际波导传输系統中所有其它杂波都更难以消除; 这是因为, 已設計出的大多数寬頻带自滤波波导和波型滤波器都是靠它們的特殊波导內壁来产生滤波效果的, 而 H_{12} 波的場集中在波导中心, 因

而在波导内壁上只产生很小的纵向电流。由于上述原因,在很多波导传输问题中,应该在 H_{01} 和 E_{11} 之外,多考虑这个 H_{12} 波型,并且在分析中同时处理 H_{01} 、 E_{11} 和 H_{12} 这三个互相耦合的波型,而不是每一次只考虑两个波型之间的耦合。

在数学演算上,三个波型问题很自然的要比两个波型的问题麻烦得多。但是,就演算步骤而论,如果采用本文所提出的系统的数学方法,那么两个和三个波型问题的求解就没有任何区别。

为了将我们以前得出的公式应用于三个耦合波型的问题,我们引入下列形式的 $\mathbf{K}$ 矩阵:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -j\beta_1 & jC_{12} & jC_{13} \\ jC_{21} & -j\beta_2 & 0 \\ jC_{31} & 0 & -j\beta_3 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中, β_1, β_2 和 β_3 代表 H_{01} , E_{11} 和 H_{12} 这三个耦合波型的相位常数¹⁾; C 代表耦合系数, C_{23} 和 C_{32} 等于零是因为杂波 E_{11} 和 H_{12} 之间的相互作用和它们与传输的 H_{01} 波之间的耦合相比是很小的。

虽然这里处理的非均匀耦合波型的 $\mathbf{K}$ 矩阵和小口加藤处理过的均匀耦合波型的矩阵在形式上是相同的,但是,应该注意到矩阵(13)是更加普遍的,因为它的每一元都是波导轴向坐标的函数,而不象均匀耦合波型的情形那样,是与波导轴向坐标无关的常数。

和两个波型的问题相同,在三个波型的问题中,我们也是首先去解特征方程 $\text{Det}(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{U}) = 0$, 从而求出(13)的三个本征值。这三个本征值可以表为

$$\lambda_k = -j\beta + \Gamma_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (14)$$

这里, $\beta = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)/3$; $\Gamma_k (k = 1, 2, 3)$ 是 $\Gamma^3 + p\Gamma + q = 0$ 的三个根, 后者是以 $-j\beta + \Gamma$ 代替 λ 后 $\text{Det}(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{U}) = 0$ 变成的形式。从(14)所表的三个本征值(对于实际的波导传输系统,可假定它们是相异的),即可决定 $\mathbf{K}$ 的模态矩阵 $\mathbf{O}$, 其元可表为 $O_{rk} = A_{ir}/\sqrt{A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2}$, 其中 $A_{ir} (r = 1, 2, 3)$ 是对应于 $\lambda = \lambda_k$ 的 $\text{Det}(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{U})$ 的余式, 标数 i 是任意的。

从求出的 λ_k 和 O_{rk} , 即可导出 $\mathbf{N}$ 矩阵。然后在给定起始条件下求本地正规波型。在我们的问题中,假定入射波是单位幅度的纯 H_{01} 型波,即 $E_1(0) = 1$, $E_2(0) = E_3(0) = 0$ 。同时假定 $C_{rs}(0) = 0$, $s \neq r$ 。这样,由(7)即得 $w_1(0) = 1$, $w_2(0) = w_3(0) = 0$ 。

为了节省篇幅,我们略去以后的数学推导,而直接根据(5)写出下列三个耦合本地正规波型的表达式:

$$\left. \begin{aligned} w_1(z) &\approx e^{\rho_1(z)} \left\{ 1 - \int_0^z N_{12}(z') e^{\rho_2(z') - \rho_1(z')} \int_0^{z'} N_{12}(z'') e^{\rho_1(z'') - \rho_2(z'')} dz'' dz' \right. \\ &\quad \left. - \int_0^z N_{13}(z') e^{\rho_3(z') - \rho_1(z')} \int_0^{z'} N_{13}(z'') e^{\rho_1(z'') - \rho_3(z'')} dz'' dz' \right\}, \\ w_2(z) &\approx e^{\rho_2(z)} \left\{ \int_0^z N_{12}(z') e^{\rho_1(z') - \rho_2(z')} dz' \right. \\ &\quad \left. - \int_0^z N_{23}(z') e^{\rho_3(z') - \rho_2(z')} \int_0^{z'} N_{13}(z'') e^{\rho_1(z'') - \rho_3(z'')} dz'' dz' \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

1) 显然,将(19)中的 $-j\beta_1, -j\beta_2$ 及 $-j\beta_3$ 各用传播常数 $-\gamma_1, -\gamma_2$ 及 $-\gamma_3$ 来代替,下向的演算仍然适用。

$$w_3(z) \approx e^{\rho_3(z)} \left\{ \int_0^z N_{13}(z') e^{\rho_1(z') - \rho_3(z')} dz' + \int_0^z N_{23}(z') e^{\rho_2(z') - \rho_3(z')} \int_0^{z'} N_{12}(z'') e^{\rho_1(z'') - \rho_2(z'')} dz'' dz' \right\}.$$

3.3 S形彎波導中的波型變換¹⁾

為了避免地面上的障礙物,或越過河流、坡地等,在遠程波導傳輸綫中常常必須採用許多S形彎波導。在波導傳輸的研究中,波導的彎曲問題很早以來就引起了人們的注意,在這方面發表的論文已經很多。但是,關於變曲率S形彎波導中的波型變換問題,仍然是一個研究得不多的新問題。在僅僅考慮兩個純粹簡并波型(H_{01} 和 E_{11})的近似情形下,如果S彎是由全金屬管構成的(假定電導率為無窮大),我們知道,由於波導曲率在S彎拐點兩邊的符號相反,而總轉角等於零,所以當 H_{01} 波通過S彎時,在 H_{01} 波和 E_{11} 波之間將發生趨勢相反的两个方向的變換,而總變換將等於零。因而,儘管我們估計全金屬管將不是遠程波導傳輸綫的主要形式,但是它卻有希望用於傳輸綫中的S彎部分。

上面的分析當然是十分近似的。為了比較精確地估計全金屬管用於S彎的可能性,讓我們來計算在接近實際的條件下當 H_{01} 波通過S彎時,在波導輸出端雜波(首先是 H_{12} 波)的幅度。換句話說,我們希望知道波導橫截面不可避免的小變形以及第三個波 H_{12} 的存在究竟對 H_{01} 和 E_{11} 波之間的變換與再變換起着多大的影響。

為了進行數字計算,我們假定波長為8毫米;圓波導橫截面有橢圓小變形,長短軸分別為 25 ± 0.5 毫米。從這些數據,可以算出三個波(H_{01} , E_{11} , H_{12})的相位常數:

$$\beta_1 = 0.70224, \beta_2 = 0.70357, \beta_3 = 0.63653.$$

我們再假定S彎是由兩段相同的彎波導接成的,每段彎波導的曲率都按上升余弦函數變化。於是, H_{01} 波和 E_{11} 波之間以及 H_{01} 波和 H_{12} 波之間的耦合系數可以表示為

$$C_{12} = \pm \frac{1.7}{R_0} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi z}{L} \right),$$

$$C_{13} = \pm \frac{2.5}{R_0} \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{4\pi z}{L} \right),$$

式中(+)號對應於 $0 \leq z \leq L/2$,(-)號對應於 $L/2 \leq z \leq L$, L 是S彎的全長, R_0 是最小曲率半徑。設 $R_0 = 3000$ 毫米, $L = 15000$ 毫米,並將上面的式子代入3.2節中的有關公式。假定投入S彎輸入端的是單位幅度的純 H_{01} 波;從電子數字計算機得到下面的結果:

$$\begin{cases} E_1(L) = w_1(L) = (1 - 0.0003878) + j0.0081, \\ E_2(L) = w_2(L) = 0.0445 + j0.0127, \\ E_3(L) = w_3(L) = 0.00144 + j0.00023. \end{cases}$$

於是,在S彎輸出端, H_{01} 、 E_{11} 和 H_{12} 三個波的輸出功率分別為

$$|E_1|^2 = 0.99930, |E_2|^2 = 0.00216, |E_3|^2 = 0.000002.$$

計算的結果表明,在給定的條件下, H_{01} 波通過S彎時所產生的雜波是不大的。換句

1) 本節是和錢景仁同志合作的工作;數字計算是在電子數字計算機上完成的,得到了中國科學院計算技術研究所有關計算小組的協助。

話說, H_{12} 波对 H_{01} 和 E_{11} 波之間的变换-再变换只起着很小的影响。

結 束 語

本文提出的耦合波理論較文献中已提出的关于耦合波的理論均更普遍。Miller 的耦合波理論以及小口加藤对 Miller 理論的发展, Louisell 和 Unger 关于两个本地正規波型的分析, 等等, 均可視為本文所提出的广义理論的特殊情形。

本文提出的耦合本地正規波型的广义理論可用于一系列的波导传输問題。文中所举緩变参数弯曲問題仅仅是所提出的系統的数学方法的一个应用实例。

在 H_{01} 型波远距离波导传输中, 上述理論之所以适用是由于下述原因。如我們所預期的, 远距离波导系統應該是一个綜合的結構, 包括不同形式的和一部分不同直径的自滤波导, 以及各种波导元件例如弯波导和滤波器。为了減除实际波导系統中不可避免的不規則性所产生的波型变换和再变换的影响, 在波导系統中任何两个具有不同特性(参数)的部分之間都应有一尽量緩慢的过渡。这就需要設計出各种“过渡器”。过渡器不仅包括一般常用的“直径过渡器”, 还包括曲率过渡器, 全金属壁波导和螺旋波导之間的过渡器, 等等。換句話說, 我們預期, 一个远距离波导传输系統應該是一个緩变参数的系統。非常明显, 对于这样的系統, 本文提出的耦合本地正規波型的广义理論描述了最普遍的耦合波問題; 并且, 应用本文提出的系統的数学方法, 可以得出問題的完全解答。

耦合本地正規波型的广义理論不仅适用于单一的多波型波导, 也同时适用于多个波导构成的系統, 例如具有緩变耦合強度和緩变传播常数的波导耦合器。

显然, 上述数学方法的应用范围不限于波导传输。在低頻电气工程中, n 对具有緩变传播常数和緩变耦合強度的耦合传输綫(例如, 因綫間距离变化而引起参数变化), 也能应用上述数学方法来分析。在应用科学的其它分支中, 当涉及緩变耦合強度的耦合振蕩問題时, 本文提出的数学方法也能适用。

参 考 文 献

- [1] Schelkunoff S. A.: Generalized telegraphist's equations for waveguides, *B.S.T. J.*, pp. 784—801, July (1952); Conversion of Maxwell's equations into generalized telegraphist's equations, *B. S. T. J.*, pp. 995—1043, Sept., (1955).
- [2] Кацаеленбаум Б. З.: Нерегулярные волноводы с медленно меняющимися параметрами, *ДАН СССР*, **102**, 711 (1955); Изогнутые волноводы постоянного сечения, *Р.И.Э.* № 2, 172 (1956).
- [3] Miller S. E.: Coupled wave theory and waveguide applications, *B.S.T.J.* pp. 661—719, May (1954).
- [4] 小口加藤: TE_{1m} 波对弯曲波导中 TE_{01} 圆电波传输的影响, 日本电气通信学会杂志, vol. 41, No. 1, 35 (1958).
- [5] Brown J.: Propagation in coupled transmission line system, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. XI, Part 2, May (1958).
- [6] Louisell W. H.: Analysis of the single tapered mode coupler, *B.S.T.J.*, pp. 853—870, July (1955).
- [7] Cook J. S.: Tapered velocity couplers *B.S.T.J.*, pp. 807—822, July (1955).
- [8] Fox A. G.: Wave coupling by warped normal modes, *B.S.T.J.*, pp. 823—852, July (1955).
- [9] Unger H. G.: Normal mode bends for circular electric waves, *B.S.T.J.*, 1292—1307, Sept., (1957); Circular waveguide taper of improved design, *B.S.T.J.*, pp. 899—912, July (1958).
- [10] Andreasen M. G.: Synthese eines gebogenen Hohlleiters mit stetigem Verlauf der Krümmung, 463—471, *Archiv. der elektrischen Übertragung*, Okt. (1958).
- [11] Loewy A.: *Math Ann.* Vol. 78 (1918); *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen* (1917).

- [12] Morgan S. P.: Theory of curved circular waveguide containing an inhomogeneous dielectric, *B.S.T.J.*, pp. 1209—1251, Sept., (1957).
- [13] 黃宏嘉: Generalized Theory of Coupled Local Normal Modes in Multi-wave Guides, *Scientia Sinica*, 9 (1960), 142—154; 緩變系數法, 數學學報, 11 卷 3 期, 238—247.

GENERALIZED THEORY OF COUPLED LOCAL NORMAL MODES IN MULTI-WAVE GUIDES

HUANG HUNG-CHIA

ABSTRACT

In this paper a generalized theory of coupled local normal modes is developed, which is based on the mathematical method—"method of slowly varying coefficients", introduced by the author in a previous paper. By this method, the set of ordinary coupled wave equations is transformed into a new set of equations for the local normal modes with much reduced couplings. To illustrate the applicability of the method, the all-important problem of bend with slowly varying curvature is solved by considering two and three coupled modes successively. For the two coupled-modes case, our results agree with those by Louisell and Unger. Solution for the three coupled-modes problem has not been appeared in literatures heretofore. A numerical evaluation of the spurious modes in an S-shaped bend is given. Further applications are discussed.