

任 朗

(唐山铁道学院)

提 要

在本文中,作者提出了与綫形天綫陣輻射图形中零点相对应的复量多項式的根在复数面单位圓上的一个分布函数,它比作者在前一篇論文中所提出的分布函数有更普遍的意义. 普遍函数是:

$$\psi_K = \psi_0 \left\{ 1 + \xi K \frac{\ln \left(\frac{\psi}{\psi_0} - 1 \right) - \ln \xi}{\ln m} \right\}.$$

当 ψ_0 和 ξ 被适当地选择时,这个普遍函数所代表的天綫陣将包括以下各式天綫陣作为特例:(1)均匀横射式天綫陣;(2)均匀端射式天綫陣;(3)謝昆諾夫天綫陣;(4)道尔夫-捷比謝夫天綫陣当陣中单元数不超过7时。但是,应用所提出的分布函数并当合理地选择 ψ_0 和 ξ 却可以改善以上各式天綫陣,尤其在压小主瓣附近的旁瓣方面。这一情况是具有重大实用意义的。此外,因为天綫陣中各单元的場强或其方向图中的旁瓣一般都随着离开主瓣的角距增加而下降的,所以为了使天綫陣的总方向图有均等或接近均等的小的旁瓣(这是具有实用意义的),就必须設計一个由均匀輻射器所組成的天綫陣,它有随着离开主瓣的角距的增加而下降的小的旁瓣。利用謝昆諾夫的分布或道尔夫-捷比謝夫的分布都不能达到此目的,但是应用所提出的分布函数却可以办到。計算結果証实了上述各点。

在本文中,作者还将代表各式天綫陣的多項式的乘积形式加以展开,从而将其中的系数化簡式以便于陣中各单元上相对电流的計算。

一、新分布函数的提出及其一般討論

我們知道,当单位圓上零点位置被确定了以后,天綫陣的方向图和电流分布都可以計算^[1]。因此設計一个天綫陣的問題就化为确定单位圓上零点分布的問題。因为天綫一方向的場强可以用由圓上与之对应的一点与各零点之間的距离的相乘积来表示,相邻零点之間的角距愈小,其間的最大場强也就愈小,就是說,这二点間的瓣也就因此,将两个相邻零点移近就会压低其間的瓣。因为主瓣必須是最大的瓣(其最大),与其对应的二零点間的角距也必須是最大。主瓣寬度有时是設計者的一个預先所以在所提出的零点分布函数的普遍式中,代表主瓣寬度的 ψ_0 被定为一个由設計

62年5月11日收到。

文曾在全国电子学会成立大会(1962年4月,北京)学术分組会上作过报告。

文同时用外文发表在“中国科学”(Scientia Sinica, vol. XI, No. 9, 1962)上。

$\psi_0 + \xi \psi_0 K^\eta$, $K = 0, 1, 2, 3, \dots, m$, 其中 η 是一个由最末一个零点所决定 ψ_0 被选定了之后, 无论选 ξ 为何值, 所有的零点总会自动地按指数律分布在 . 选择指数律有这样的优点, 即当 $\xi = 1$ 时所提出的分布就化为均匀陣的 $\xi < 1$ 时零点就按指数律向主瓣方向愈靠愈近, 因而可以压低主瓣附近的旁瓣由 ξ 的值来控制。鉴于均匀陣的旁瓣是随着离开主瓣的角距的增加而下降其旁瓣均等或接近均等, 只要适当地选取 $\xi < 1$ 就可以办到。不仅如此, 如 ξ , 就可再进一步压低主瓣附近的旁瓣而以抬高远离主瓣的旁瓣为代价。如 ξ 点就会按指数律向最末一个旁瓣靠攏, 因而可以压低远离主瓣的旁瓣而以 ξ 的旁瓣为代价。分布函数中的 η 由 ψ_0 , ξ 和 m 确定之如下:

$$\psi_m = \psi_0(1 + \xi m^\eta), \quad (1)$$

$$\eta = \frac{\ln \left(\frac{\psi_m}{\psi_0} - 1 \right) - \ln \xi}{\ln m}. \quad (2)$$

内分布函数的另一普遍形式是

$$\psi_K = \psi_0 \left\{ 1 + \xi K \frac{\ln \left(\frac{\psi_m}{\psi_0} - 1 \right) - \ln \xi}{\ln m} \right\}, \quad (3)$$

$1, 2, 3, \dots, m$.

們来系統地討論一下所提出的函数的各种特殊形式。当选择 ψ_0 与端射式一样, 即 $\psi_0 = \frac{4Bl}{n}$, 則所提出的函数化为

$$\psi_K = -\frac{4Bl}{n} \left\{ 1 + \xi K^{1 - \frac{\ln \xi}{\ln(n-1)}} \right\}, \quad (4)$$

$1, 2, 3, \dots, n-2$. 在上式中 l 为相邻二单元間的距离, n 为陣中的单元, 其中 λ 为波长。当选择 $\xi = 1$ 时, 則公式(2)就化为均匀端射式天綫陣的。是当选择 $\xi < 1$ 时, 就可以压低旁瓣, 愈靠近主瓣的旁瓣被压低的愈甚。当时, 有可能使所有的旁瓣接近均等, 或甚至于使主瓣附近的旁瓣低于远离主瓣。当选择 $\xi > 1$, 則远离主瓣的旁瓣被压低而以抬高主瓣附近的旁瓣为代价。择 ψ_0 与謝昆諾夫分布的相同时, 所提出的分布函数就化为作者在前一篇論函数^[2], 因而这里就不再重复了。

数为双数的橫射式天綫陣, 所提出的函数化为

$$\psi_K = \psi_0 \left\{ 1 + \xi K \frac{\ln \left(-\frac{Bl}{\psi_0} - 1 \right) - \ln \xi}{\ln \left(\frac{n}{2} - 1 \right)} \right\}, \quad (5)$$

$$\phi_K = -\frac{2\beta l}{n} \left\{ 1 + \xi K^{1 - \frac{\ln \xi}{\ln(\frac{n}{2}-1)}} \right\}. \quad (6)$$

情况下,当选择 $\xi = 1$ 时,公式(6)就是一个均匀横射式天线阵的分布。但是,当选 $\xi < 1$ 时,则主瓣附近的旁瓣将被压缩,而远离主瓣的旁瓣将被抬高。当适当地选择 ξ 以使所有的旁瓣均等或接近均等。本文作者发现,当我们选择(DT 代表道尔夫-捷比的意思)^[3]

$$\xi = \xi_{DT} = \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{3\pi}{2(n-1)} \right]}{\beta l/n} - 1 \quad (7)$$

所提出的分布函数化为

$$\phi_K = -\frac{2\beta l}{n} \left\{ 1 + \xi_{DT} K^{1 - \frac{\ln \xi_{DT}}{\ln(\frac{n}{2}-1)}} \right\}, \quad (8)$$

单元数不超过 6 时正好是道尔夫-捷比谢夫分布。在以上二式中, $x_0 = x / \cos \frac{\psi}{2}$,

$l \cos \theta$, θ 是所研究的方向与天线阵的连线之间的夹角, x_0 可由下式求得:

$$-\frac{2\beta l}{n} = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]. \quad (9)$$

上,这一情况就相当于先规定了主瓣宽度(与均匀横射阵的相等),根据捷比谢夫多卜特性,这时主瓣与旁瓣之比 R 将为最大,而 R 则可由 $T_{n-1}(x_0) = R$ 求得。

阵中单元数大于 6 时,公式(8)很接近道尔夫-捷比谢夫分布。但当单元数远大于公式(8)所给出的辐射图将有随着离开主瓣的角距的增加而递升的旁瓣。显然,当 $\xi < \xi_{DT}$ 时,对于 $n \leq 6$ 的阵将有随着离开主瓣的角距的增加而升高的旁瓣,而对的阵上述情况更加显著。

先规定了 R 时,天线阵的设计可如下进行:从

$$x_0 = \frac{1}{2} \left[(R + \sqrt{R^2 - 1})^{\frac{1}{n-1}} + (R - \sqrt{R^2 - 1})^{\frac{1}{n-1}} \right] \quad (10)$$

,并选

$$\phi_{0DT} = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right], \quad \xi = \xi_{DT} = \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{3\pi}{2(n-1)} \right]}{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]}, \quad (11)$$

所提出的函数变为

$$\phi_K = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right] \{ 1 + \xi_{DT} K^{\eta_{DT}} \}, \quad (12)$$

$K = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$, 而

1, 当 $n \leq 6$ 时, 公式(12)恰好是道尔夫-捷比謝夫分布, 当 $n > 6$ 时, 公式(12)的辐射图将有随着离开主瓣的角距的增加而逐渐升高的旁瓣; 但是, 当选择 $n \leq 6$ 来说, 所提出的分布压低了主瓣附近的旁瓣 (与均等旁瓣的情况作了比较), 而对 $n > 6$ 来说, 则更加如此。

2. 对于 n 为单数的横射式天线阵, 所提出的分布函数化为

$$\psi_K = \psi_0 \left\{ 1 + \xi K^{\frac{\ln \left[\frac{\beta l(1-n)}{n\psi_0} - 1 \right] - \ln \xi}{\ln \frac{n-3}{2}}} \right\}, \quad (14)$$

$1, 2, 3, \dots, \frac{n-3}{2}$. 当选择 $\psi_0 = -\frac{2\beta l}{n}$, 公式(14)变为

$$\psi_K = -\frac{2\beta l}{n} \left\{ 1 + \xi K^{1 - \frac{\ln \xi}{\ln \left(\frac{n-3}{2} \right)}} \right\}, \quad (15)$$

$1, 2, 3, \dots, \frac{n-3}{2}$. 在这种情况下, 如选 $\xi = 1$, 公式(15)就化为均匀横射分布。但是, 当选 $\xi < 1$ 时, 则主瓣附近的旁瓣被压低而远离主瓣的旁瓣被抬高, 与 n 为双数的情况相似, 当适当地选取 ξ 的值时, 就可以使旁瓣均等或接近均等。发现, 当选择

$$\xi = \xi_{DT} = \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{3\pi}{2(n-1)} \right] - 1}{\beta l/n} \quad (16)$$

函数就化为

$$\psi_K = -\frac{2\beta l}{n} \{ 1 + \xi_{DT} K^{\eta_{DT}} \}, \quad (17)$$

$1, 2, 3, \dots, \frac{n-3}{2}$, 而

$$\eta_{DT} = \frac{\ln \left\{ \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(n-2)\pi}{2(n-1)} \right] - 1}{\beta l/n} \right\} - \ln \xi_{DT}}{\ln \frac{n-3}{2}}; \quad (18)$$

时所提出的分布恰好是道尔夫-捷比謝夫分布。以下的讨论基本上与 n 为偶数时相同, 所以这里不再重复。

3. 先规定后, 天线阵的设计可按下述步骤进行: 从(10)先计算 x_0 , 从(11)计算 ξ , 所提出的分布函数变为

$$\eta_{DT} = \frac{\ln \left\{ \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(n-2)\pi}{2(n-1)} \right]}{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]} - 1 \right\} - \ln \xi_{DT}}{\ln \frac{n-3}{2}}. \quad (20)$$

设计中,当 $n \leq 7$, 公式(20)恰好是道尔夫-捷比谢夫分布;当 $n > 7$ 时,讨论与 n 时的相似,因而这里不再重复。

二、应用所提出的函数设计端射式天线阵

们知道,均匀线形天线阵的场可以表示为

$$E = \left| \sum_{m=1}^{n-1} z^m \right| = \left| \frac{z^n - 1}{z - 1} \right| = \left| \prod_{m=1}^{n-1} (z - t_m) \right|, \quad (21)$$

$= e^{j\psi}$, $\psi = \beta l \cos \theta - \delta$, δ 为各相邻单元间的均匀相位移,而

$$t_m = e^{-j \frac{2m\pi}{n}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, n-1. \quad (22)$$

均匀阵的零点和最大点在单位圆上的位置将单位圆分成等分(图1)。均匀阵有较瓣,尤其主瓣附近的旁瓣更大。为了减小旁瓣,尤其压低主瓣附近的旁瓣,利用所分布就可以办到。对端射式天线阵而言,令 $l = \lambda/4$, $\delta = \pi/2$,在所提出的普遍分中,选择 $\psi_0 = -4\beta l/n$,则

$$\psi_K = -\frac{4\beta l}{n} \{1 + \xi K^n\}, \quad (23)$$

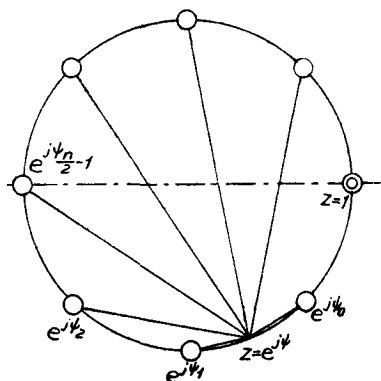


图 1

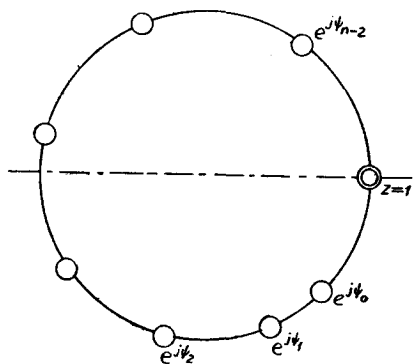


图 2

$$\eta = 1 - \frac{\ln \xi}{\ln(n-1)}. \quad (25)$$

为

$$\psi_K = -\frac{4\beta I}{n} \{1 + \xi K^{1-\frac{\ln \xi}{\ln(n-1)}}\}, \quad (26)$$

1, 2, 3, ..., n-2. 相应的零点分布有如图 2 所示.

零点分布就可由公式(26)计算出来. 相应的辐射图就可从

$$\frac{E}{E_m} = \left| \frac{\prod_{K=0}^{n-2} (z - e^{i\psi_K})}{\prod_{K=0}^{n-2} (1 - e^{i\psi_K})} \right| \quad (27)$$

得, 或从

$$\frac{E}{E_m} = \left| \frac{\prod_{K=0}^{n-2} \sin \frac{1}{2}(\psi - \psi_K)}{\prod_{K=0}^{n-2} \sin \frac{1}{2} \psi_K} \right| \quad (28)$$

半作图法, 即用从 z 点(图 1)到各零点的弦的长度的相乘积来求与 z 相对应的方法, 较为便利, 因为这样作比较简便, 同时三位数的准确度已经足够了.

间的相对电流分布就是 $\prod_{K=0}^{n-2} (z - e^{i\psi_K})$ 的展开式(多项式)中的系数. 本

加以展开, 并将所得的多项式中的系数表示为便于计算电流分布的显式如

$$\begin{aligned} z - e^{i\psi} &= z^{n-1} - \left(\sum_{k_1=0}^{n-2} e^{i\psi_{k_1}} \right) z^{n-2} + \left(\sum_{\substack{k_1=0, k_2=0 \\ k_1 \neq k_2}}^{n-2} e^{i(\psi_{k_1} + \psi_{k_2})} \right) z^{n-3} - \\ &- \left(\sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, k_3=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq k_3}}^{n-2} e^{i(\psi_{k_1} + \psi_{k_2} + \psi_{k_3})} \right) z^{n-4} + \dots + \\ &+ \left((-1)^{n-1} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_n=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n}}^{n-2} e^{i \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{k_i}} \right) z^{n-n} = \\ \sum_{m=1}^n &\left[(-1)^{m-1} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_m=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_m}}^{n-2} e^{i \sum_{i=1}^{m-1} \psi_{k_i}} z^{n-m} \right], \quad m = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (29) \end{aligned}$$

图示于图 3 中。为了比较起见，均匀阵 ($n=6, \psi_0=-60^\circ, \xi=1$) 的方向图
 该图中。图 4 中绘出端射阵 ($n=6, \psi_0=-60^\circ, \xi=0.750$) 与相应的均匀阵
 ($\psi_0=-60^\circ, \xi=1$) 的方向图。图 5 中绘出端射阵 ($n=8, \psi_0=-45^\circ, \xi=0.500$)
 的均匀阵 ($n=8, \psi_0=-45^\circ, \xi=1$) 的方向图。图 6 中绘出端射阵 ($n=8,$
 $-45^\circ, \xi=0.750$) 与相应的均匀阵 ($n=8, \psi_0=-45^\circ, \xi=1$) 的方向图。以上
 算结果证实了在第 I 节中所作的有关的结论。

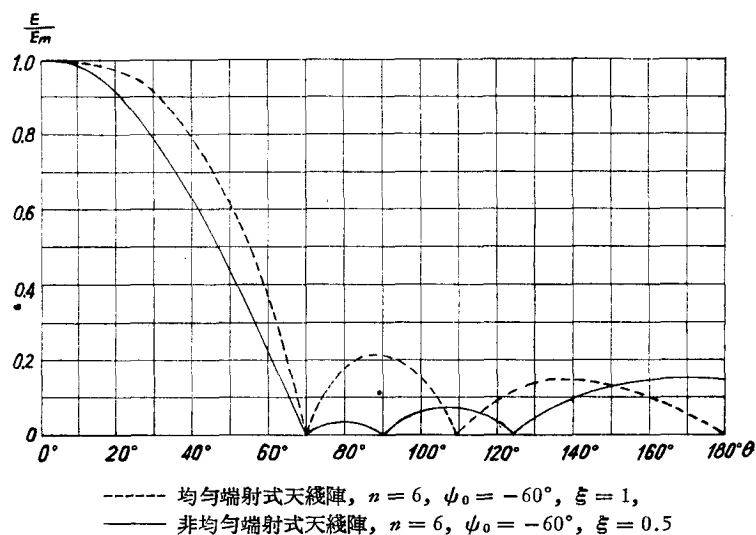


图 3

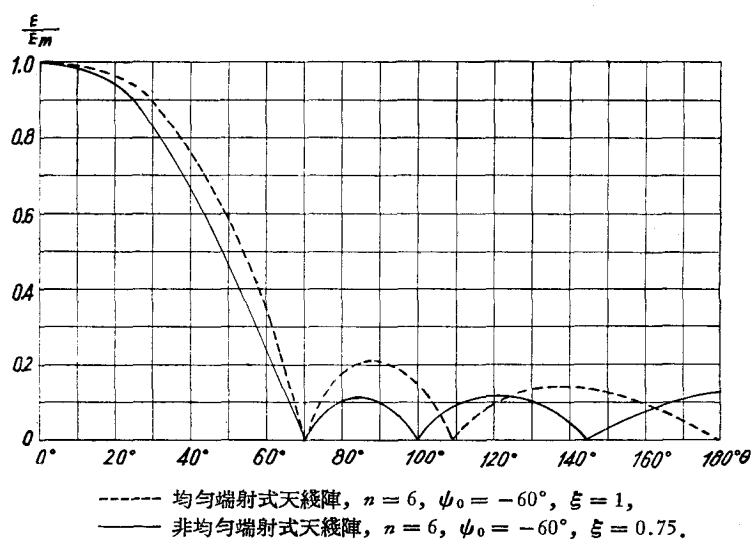
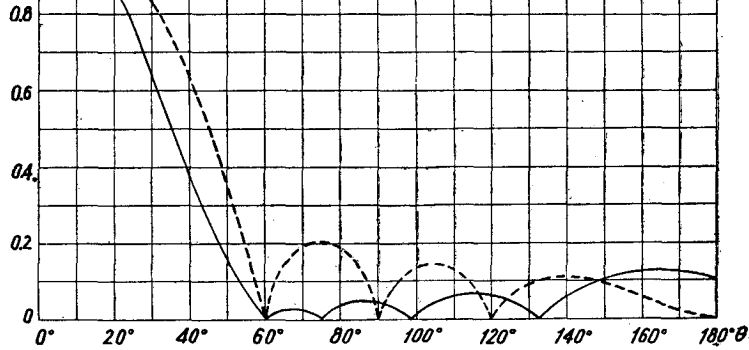
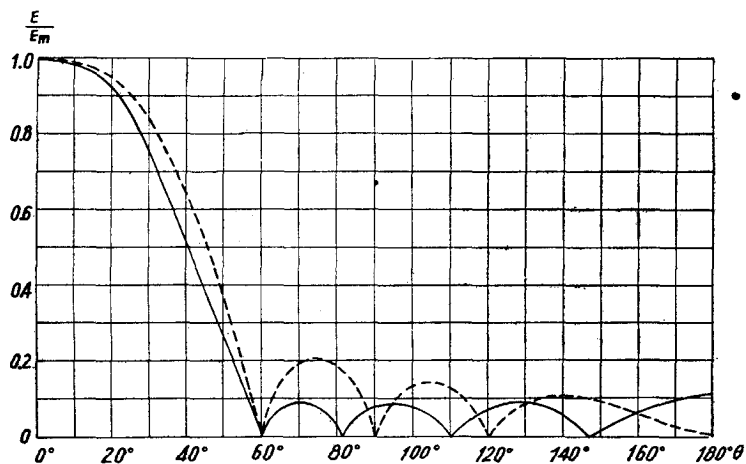


图 4



----- 均匀端射式天线阵, $n = 8$, $\psi_0 = -45^\circ$, $\xi = 1$.
 ———— 非均匀端射式天线阵, $n = 8$, $\psi_0 = -45^\circ$, $\xi = 0.5$.

图 5



----- 均匀端射式天线阵, $n = 8$, $\psi_0 = -45^\circ$, $\xi = 1$.
 ———— 非均匀端射式天线阵, $n = 8$, $\psi_0 = -45^\circ$, $\xi = 0.75$.

图 6

三、应用所提出的分布函数设计横射式天线阵

单元数为双数的横射式天线阵的设计

情况下,所用的符号都与在端射式天线阵的情况下所用的符号一样,只不过在

$l = \frac{\lambda}{2}$. 当单元数为双数时,一个零点位于 $\psi = -\pi$, 其他零点则对称地

在 $\psi = 1$ 的连线的两侧如图 7 所示. 因此,作者将零点数目的一半再加上

一个零点按所提出的函数分布在半个圆周上,其余的零点的位置可按对称关

系中的 η 可从最末一个零点的位置来决定,于是

$$\eta = \frac{\ln\left(-\frac{\beta l}{\psi_0} - 1\right) - \ln \xi}{\ln\left(\frac{n}{2} - 1\right)}. \quad (31)$$

来所提出的函数变为

$$\psi_K = \psi_0 \left\{ 1 + \xi K \frac{\ln\left(-\frac{\beta l}{\psi_0} - 1\right) - \ln \xi}{\ln\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \right\}, \quad (32)$$

$$K = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1.$$

选择 $\psi_0 = -2\beta l/n$ 时, 公式(32)变为

$$\psi_K = -\frac{2\beta l}{n} \left\{ 1 + \xi K^{1 - \frac{\ln \xi}{\ln\left(\frac{n}{2} - 1\right)}} \right\}, \quad (33)$$

$K = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1$. 在上式中, 如选 $\xi = 1$, 则它就代表一个横射式均匀分布。但当选 $\xi < 1$ 时, 则以均匀阵为参考主瓣附近的旁瓣将被压缩, 而远离主瓣的将被抬高, 也就是说, 起了平衡旁瓣的作用。当适当地选择 ξ 的值时, 并且当单元数 $n \geq 6$ 时, 作者发现利用所提出的函数可以使旁瓣均等。为了证明这一点, 我们先将捷比谢夫多项式的零点分布化为相应的在单位圆上的分布。捷比谢夫多项式可以写成

$$T_{n-1}(x) = \cos[(n-1)\cos^{-1}x] = \cos(n-1)u, \quad (34)$$

$(n-1)u = 0$, 得

$$u_K = \frac{(2K+1)\pi}{2(n-1)}, \quad K = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2. \quad (35)$$

$x_K = \cos u_K = x_0 \cos \frac{\psi_K}{2}$, 所以零点在单位圆上的捷比谢夫分布可以表示如下:

$$\psi_K = 2\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(2K+1)\pi}{2(n-1)} \right], \quad K = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2. \quad (36)$$

分布是对 $z = 1$ 和 $z = -1$ 的连线对称的, 因此, 对 n 为双数来说, K 只要取到 $\frac{n}{2} - 1$ 就行了, 而对 n 为单数来说, K 只要取到 $\frac{n-3}{2}$ 就行了。因为在本文中零点是从处沿顺时针方向计算的, 所以将捷比谢夫的分布写在下半个圆上(图7)可以表示

$$\psi_K = -2\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(2K+1)\pi}{2(n-1)} \right], \quad K = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1. \quad (37)$$

从

$$-\frac{2\beta l}{n} = -2\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right] \quad (38)$$

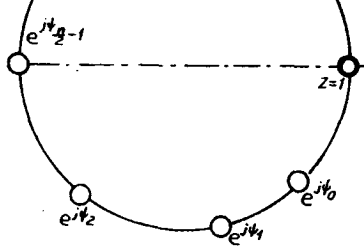


图 7

$$\xi = \xi_{DT} = \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{3\pi}{2(n-1)} \right]}{\beta l/n} - 1. \quad (39)$$

的 ξ_{DT} 用于(33)式中,实际上我們已經使第二个零点与道尔夫-捷比謝夫的一个零点重合了。我們還記得在导出(33)式时,已經使最末一个零点与道尔夫-捷比謝夫分布的最末一个零点重合了,也就是說 η 被选取为

$$\eta_{DT} = 1 - \frac{\ln \xi_{DT}}{\ln \left(\frac{n}{2} - 1 \right)}. \quad (40)$$

若 $n \leq 6$, 所有的零点都与道尔夫-捷比謝夫分布重合了,因而所提出的分布-捷比謝夫分布了。但是,应用所提出的分布,并选择 $\xi < \xi_{DT}$, 就可以进附近的旁瓣而以抬高远离主瓣的旁瓣为代价。当单元数大于6但大的不多8, 利用以上的設計方法, 只有一个零点不与道尔夫-捷比謝夫分布的重合, 接近。在图8中繪出三条曲线以作比較。从图中可見,如选 ψ_0 与均匀陣的

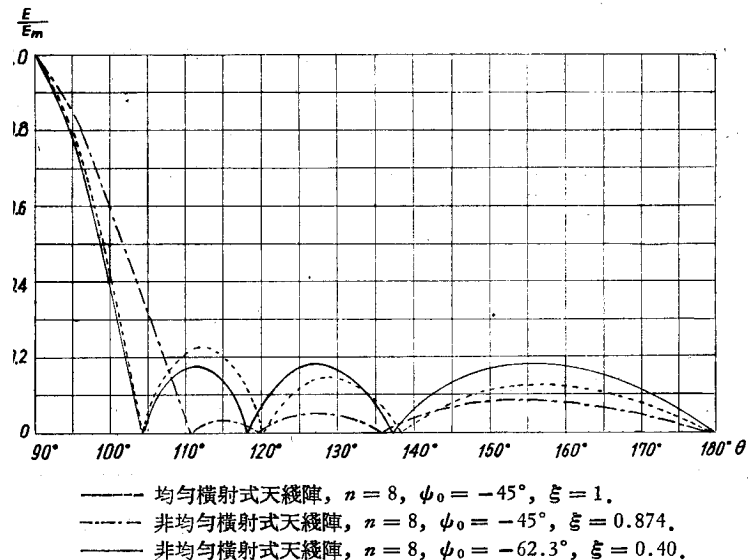


图 8

尔夫-捷比謝夫分布(近似地用 $n=8$, $\psi_0 = -45^\circ$, $\xi = \xi_{DT} = 0.874$ 的曲线显著的压低旁瓣但选择 ψ_0 大于均匀陣的 ψ_0 时,就可以显著地压低旁瓣, $\psi_0 = -62.3^\circ$, $\xi = 0.400$ 的曲线所示。后一天綫的设计步骤如下。首先瓣的比值,例如 $R = 19.5$ (旁瓣低于主瓣 25.8 分貝), $n=8$, 从(10)式計算 4, 从 $\psi_0 = -2\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]$ 計算 ψ_0 , 得 $\psi_0 = -62.3^\circ$, ξ 和 η

$$\eta = \eta_{DT} = \frac{\ln\left(-\frac{\beta l}{\phi_0} - 1\right) - \ln \xi_{DT}}{\ln\left(\frac{n}{2} - 1\right)} = 1.21.$$

所提出的分布化为

$$\phi_K = -62.3^\circ \{1 + 0.500K^{1.21}\}, \quad K = 0, 1, 2, 3.$$

目的分布,相应的准确的道尔夫-捷比謝夫分布和 θ_K 列如表 1.

表 1 8 单元的横射陣

K	0	1	2	3
I. $\phi_K = -62.3^\circ (1 + 0.500K^{1.21})$	-62.3°	-93.5°	-134.8°	-180°
II. $\phi_K = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(2K+1)\pi}{2(n-1)} \right]$	-62.3°	-93.5°	-135.0°	-180°
$\theta_K = \cos^{-1}(\phi_K/\beta l)$, I.	110.4°	121.3°	138.6°	180°

注意,在以上設計中,規定 $R = 19.5$ 只能有近似的意义,因为旁瓣对 $n > 6$ 的陣來說接近均等。虽然如此,这种作法对于設計天綫陣來說,却有很大的实用价值。
E 单位圓上各零点的位置被确定了以后,天綫陣的方向图就可以从

$$\frac{E}{E_m} = \left| \frac{\prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-1} (z - e^{j\psi_K}) \prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-2} (z - e^{-j\psi_K})}{\prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-1} (1 - e^{j\psi_K}) \prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-2} (1 - e^{-j\psi_K})} \right| \quad (41)$$

解法求得,或从

$$\frac{E}{E_m} = \left| \frac{\prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin \frac{1}{2}(\psi - \psi_K) \prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-2} \sin(\psi + \psi_K)}{\prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin \frac{1}{2} \psi_K \prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-2} \sin\left(-\frac{1}{2} \psi_K\right)} \right| \quad (42)$$

出来。陣中各单元上的电流分布,可用下式的展开式的系数求得:

$$\begin{aligned} \prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-1} (z - e^{j\psi_K}) \prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-2} (z - e^{-j\psi_K}) &= \\ &= (z + 1) \prod_{K=0}^{\frac{n}{2}-2} (z^2 - 2 \cos \psi_K \cdot z + 1). \end{aligned} \quad (43)$$

作者将上式加以展开,并将所得多項式的系数化为便于計算的显式如下:

$$= \sum_{l=0}^{n-2} \{A'_l(z^{n-(2l+1)} + z^{2l}) + B'_l(z^{n-(2l+2)} + z^{2l+1})\}$$

$$= \sum_{l=0}^{\frac{1}{2}(\frac{n-2}{2})} \{A'_l(z^{n-(2l+1)} + z^{2l}) + B'_l(z^{n-(2l+2)} + z^{2l+1})\} \quad (44)$$

其中

$$\sum_{m=1}^{l+1} \left\{ \binom{\frac{n}{2} - (2m-1)}{l - (m-1)} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_{2m-2}=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2m-2}}}^{\frac{n}{2}-2} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{2m-2}} \right\} -$$

$$- \sum_{m=1}^l \left\{ \binom{\frac{n}{2} - 2m}{l - m} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_{2m-1}=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2m-1}}}^{\frac{n}{2}-2} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{2m-1}} \right\}, \quad (45)$$

$$\sum_{m=1}^{l+1} \left\{ \binom{\frac{n}{2} - (2m-1)}{l - (m-1)} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_{2m-2}=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2m-2}}}^{\frac{n}{2}-2} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{2m-2}} \right\} -$$

$$- \left\{ \binom{\frac{n}{2} - 2m}{l - (m-1)} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_{2m-1}=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2m-1}}}^{\frac{n}{2}-2} a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_{2m-1}} \right\}, \quad (46)$$

is ψ_K .

8, $\phi_0 = -62.3^\circ$, $\xi = 0.400$, 从(44)式计算出的电流分布为

1, 1.223, 2.034, 2.179, 2.179, 2.034, 1.223, 1.

= 8, $\phi_0 = -62.3^\circ$, $\xi = 0.400$ 和 $n = 8$, $\phi_0 = -62.3^\circ$, $\xi = \xi_{DT} = 0.500$

向图。比较图中二曲线可见,当选择 $\xi (= 0.400) < \xi_{DT}$ 时可以进一步压低瓣而以抬高远离主瓣的旁瓣为代价。

们来设计一个 $n = 12$, $R = 30$ 的横射式天线阵:

$$x_0 = \frac{1}{2} [(R + \sqrt{R^2 - 1})^{\frac{1}{n-1}} + (R - \sqrt{R^2 - 1})^{\frac{1}{n-1}}] = 1.07,$$

$$\phi_0 = -2\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right] = -44.7^\circ,$$

$$\xi = \xi_{DT} = \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{3\pi}{2(n-1)} \right]}{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]} = 0.420,$$

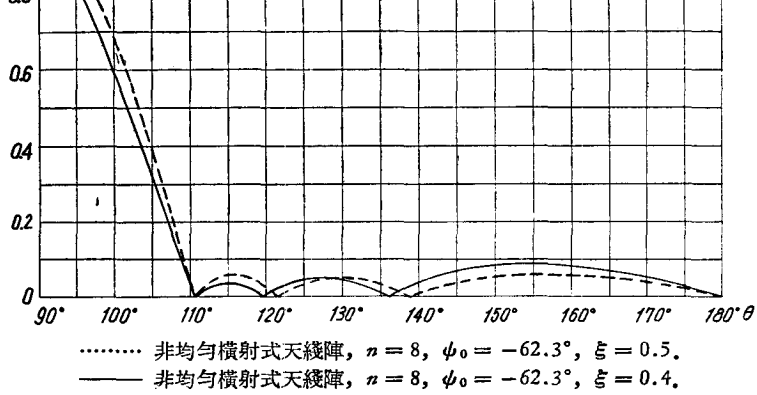


图 9

$$\eta = \eta_{DT} = \frac{\ln\left(-\frac{\beta l}{\psi_0} - 1\right) - \ln \xi_{DT}}{\ln\left(\frac{n}{2} - 1\right)} = 1.226,$$

$$\psi_K = -44.7^\circ(1 + 0.420K^{1.226}),$$

$K=1, 2, 3, 4, 5$. 所提出的分布(I)和相应的道尔夫-捷比谢夫分布(II)列于表 2.

表 2 12 单元的横射阵

K	0	1	2	3	4	5
I. $\psi_K = -44.7^\circ(1 + 0.420K^{1.226})$	-44.7°	-63.5°	-88.6°	-117°	-147°	-180°
II. $\psi_K = -2 \cos^{-1}\left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(2K+1)\pi}{2(n-1)}\right]$	-44.7°	-63.5°	-90.0°	-119°	-149.4°	-180°
I 的 $\theta_K = \cos^{-1}(\psi_K/\beta l)$	104.4°	110.7°	119.5°	130.6°	144.9°	180°

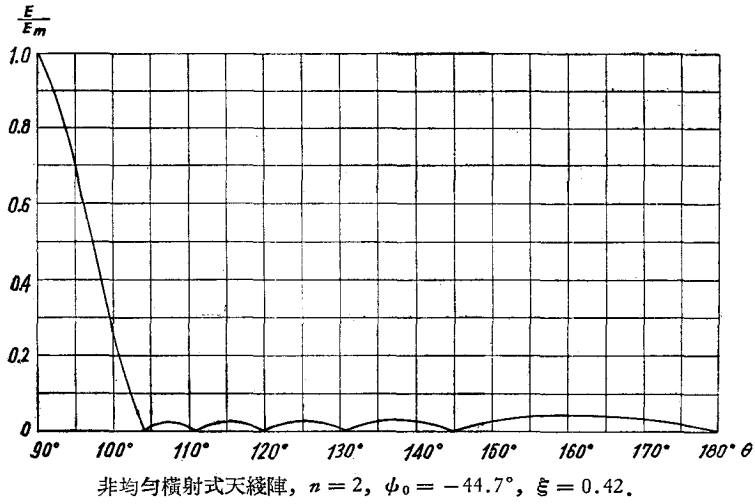


图 10

去,就可以得到一个天线阵,其方向图中的旁瓣将随着离开主瓣的角距的增加而增加,其上升率可由 ξ 的值来控制;这一点在天线阵的历史上还从未办单元用半波振子时,上述特性就非常有用,因为它可以平衡半波振子的方的总方向图有均等或接近均等的旁瓣。

定了 ϕ_0 , 设计步骤与上类同,只不过需要从 $\phi_0 = -2\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]$

从 $T_{n-1}(x_0) = R$ 计算 R 。

二、 n 为单数的横射式天线阵的设计

n 为单数时, 零点在单位圆上的分布对 $z = 1$ 和 $z = -1$ 的连线是对称的。因为 η 决定于最末一个零点的位置,可以分为两种情况来讨论。在第 1 种情况下,最末一个零点与均匀阵的最末一个零点重合,则

$$-\frac{2\beta l}{n} \frac{n-1}{2} = \phi_0 \left\{ 1 + \xi \left(\frac{n-3}{2} \right)^\eta \right\}, \quad (47)$$

$$\eta = \frac{\ln \left[\frac{\beta l(1-n)}{n\phi_0} - 1 \right] - \ln \xi}{\ln \frac{n-3}{2}}. \quad (48)$$

函数化为

$$\phi_K = \phi_0 \left\{ 1 + \xi K^{\frac{\ln \left[\frac{\beta l(1-n)}{n\phi_0} - 1 \right] - \ln \xi}{\ln \frac{n-3}{2}}} \right\}, \quad (49)$$

其中 $K = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n-3}{2}$ 。

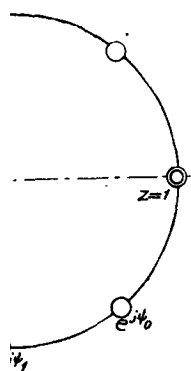
当选 $\phi_0 = -\frac{2\beta l}{n}$ 时, 公式(49)化为

$$\phi_K = -\frac{2\beta l}{n} \left\{ 1 + \xi K^{1 - \frac{\ln \xi}{\ln \frac{n-3}{2}}} \right\}, \quad (50)$$

其中 $K = 0, 1, 2, 3, \dots, \frac{n-3}{2}$ 。如再选 $\xi = 1$, 公

式(50)就化为均匀阵的分布了。当选 $\xi < 1$ 时, 就可以压低主瓣附近的旁瓣而抬高远离主瓣的旁瓣。

在第二种情况下, 将最末一个零点固定在道尔夫-捷比谢夫分布的最末一个零点上, 则



$$\eta = \frac{\ln \left\{ \frac{-2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(n-2)\pi}{2(n-1)} \right]}{\psi_0} - 1 \right\} - \ln \xi}{\ln \frac{n-3}{2}}. \quad (52)$$

选 $\psi_0 = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]$ 时, 公式(52)就化为

$$\eta = \eta_{DT} = \frac{\ln \left\{ \frac{-2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{(n-2)\pi}{2(n-1)} \right]}{-2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]} - 1 \right\} - \ln \xi}{\ln \frac{n-3}{2}}. \quad (53)$$

, 所提出的函数化为

$$\psi_K = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right] \{1 + \xi K^{\eta_{DT}}\}. \quad (54)$$

使第二个零点($K=1$)也与道尔夫-捷比谢夫的第二个零点重合, 则

$$-2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{3\pi}{2(n-1)} \right] = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right] \{1 + \xi\}, \quad (55)$$

得

$$\xi = \xi_{DT} = \frac{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{3\pi}{2(n-1)} \right]}{\cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right]} - 1. \quad (56)$$

一来, 所提出的函数化为

$$\psi_K = -2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{x_0} \cos \frac{\pi}{2(n-1)} \right] \{1 + \xi_{DT} K^{\eta_{DT}}\}. \quad (57)$$

在公式(57)中已有3个零点与道尔夫-捷比谢夫分布的3个零点重合了, 对于 $n \leq 7$ 射式天线阵来说, 公式(57)恰好是道尔夫-捷比谢夫分布。以下的讨论与 n 为双数时, 所以这里不再重复了。

当单位圆上零点位置被确定了以后, 辐射图可从下式求得:

$$= \left| \frac{\prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} (z - e^{i\psi_K}) \prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} (z - e^{-i\psi_K})}{\prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} (1 - e^{i\psi_K}) \prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} (1 - e^{-i\psi_K})} \right| = \left| \frac{\prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} \sin \frac{1}{2} (\psi - \psi_K) \prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} \sin \frac{1}{2} (\psi + \psi_K)}{\prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} \sin \frac{1}{2} \psi_K \prod_{K=0}^{\frac{n-3}{2}} \sin \left(-\frac{1}{2} \psi_K \right)} \right|. \quad (58)$$

各单元上的相对电流分布可从下式的展开式的系数求得:

$$\begin{aligned}
z^2 - a_k z + 1) &= \sum_{l=0}^{\frac{n-5}{4}} \{A_l(z^{n-(2l+1)} + z^{2l}) - B_l(z^{n-(2l+2)} + z^{2l+1})\} + \\
&\quad + A_{\frac{n-1}{4}} z^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{当 } \frac{n-1}{2} \text{ 为偶数,} \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{n-7}{4}} \{A_l(z^{n-(2l+1)} + z^{2l}) - B_l(z^{n-(2l+2)} + z^{2l+1})\} - \\
&\quad - B_{\frac{n-3}{4}} z^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{当 } \frac{n-1}{2} \text{ 为奇数,} \quad (60)
\end{aligned}$$

$$l = \sum_{m=1}^{l+1} \left\{ \binom{n-(4m-3)}{l-(m-1)} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_{2m-2}=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2m-2}}}^{\frac{n-3}{2}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_{2m-2}} \right\}, \quad (61)$$

$$l = \sum_{m=1}^{l+1} \left\{ \binom{n-(4m-1)}{l-(m-1)} \sum_{\substack{k_1=0, k_2=0, \dots, k_{2m-1}=0 \\ k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_{2m-1}}}^{\frac{n-3}{2}} a_{k_1} a_{k_2} \cdots a_{k_{2m-1}} \right\}. \quad (62)$$

出了三条曲线,一条是均匀阵的方向图($n=7$, $\psi_0 = -51.4^\circ$, $\xi = 1$), 一的方向图($n=7$, $\psi_0 = -51.4^\circ$, $\xi = \xi_{DT} = 0.896$), 另一条也是一个非均匀阵的方向图($n=7$, $\psi_0 = -75.5^\circ$, $\xi = \xi_{DT} = 0.446$). 后一天线阵的设计步骤如下:

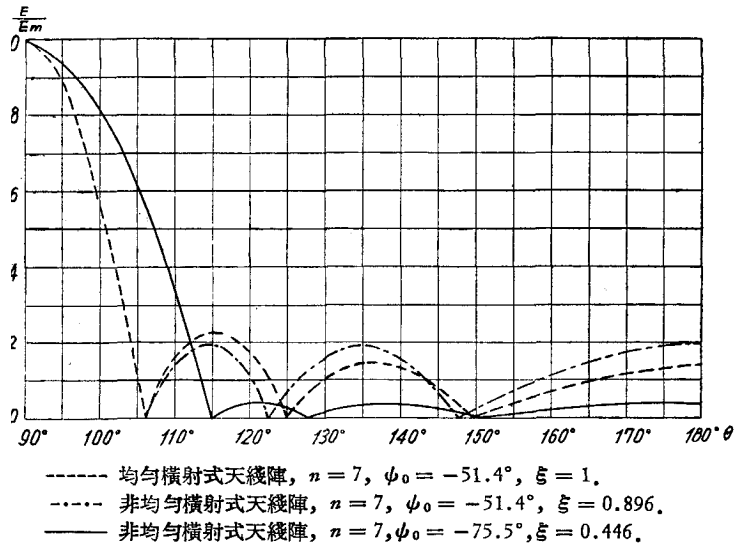


图 12

1, 1.98, 2.95, 3.36, 2.95, 1.98, 1.

由图 12 可见, 当选 ψ_0 与均匀阵的 ψ_0 一样时, 利用道尔夫-捷比谢夫分布 ($n = 7$, -51.4° , $\xi = \xi_{DT} = 0.896$) 不可能显著地减小旁瓣. 为了显著地减小旁瓣, 主瓣宽必须加大如图 12 中 $n = 7$, $\psi_0 = -75.5^\circ$, $\xi = \xi_{DT} = 0.446$ 的曲线所示 (或者先规定比均匀阵的大或者先规定 R 比均匀阵的大). 当选择 $\xi < \xi_{DT}$ 时, 就可以得到一个 β , 其旁瓣有随着离开主瓣的角距的增而逐渐升高的特性. 当 $n > 7$ 时, 设计步骤与 n 数时的情况相似, 这里就不再重复了.

四、总 结

在这里我们用了一个表格 (表 3) 来总结所提出的函数在设计各式天线阵时的应用.

在表 3 中, 所谓“旁瓣递升”乃指旁瓣有随着离开主瓣的角距的增加而逐渐上升的特性. 所谓“旁瓣递降”乃指旁瓣有随着离开主瓣的角距的增加而逐渐下降的特性.

参 考 文 献

- Michelsonoff, S. A. A mathematical theory of linear arrays, *B.S.T.J.* **22** (1943), 80—107.
王 朗, 卢明儒, 线形天线阵辐射图形中旁瓣的减小, *物理学报*, **17** (1961), 592—599.
Dolph, C. L. A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beam width and side-lobe level, *Proc. I.R.E.*, **34** (1946), 335—348.
Riblet, H. J. “Discussion on ‘A current distribution for broadside arrays which optimizes the relationship between beam width and side-lobe level’, by C. L. Dolph”, *Proc. I.R.E.*, **35** (1947), 489.

JEN LANG

ABSTRACT

ent author suggests a new distribution function for the roots of the com-
al corresponding to the nulls of the radiation pattern of a linear antenna
unit circle in a complex plane which is more general than the one sug-
same author in a previous paper^[2]. The new distribution function is of

$$\psi_K = \psi_0 \left\{ 1 + \xi K \frac{\ln \left(\frac{\psi_m - 1}{\psi_0} \right) - \ln \xi}{\ln m} \right\}.$$

and ξ are chosen properly, the suggested distribution includes the follow-
ns or arrays as special cases: (1) the uniform end-fire arrays; (2) the
side arrays; (3) the Schelkunoff's distribution in the range of ψ ; (4) the
cheff's distribution for number of elements not greater than seven. But
distribution has the advantage of improving all of them, especially for the
side-lobes near-by the main beam which is very important in certain prac-
ns.

, since the primary patterns of many types of radiating elements fall off
angle from the main maximum so that the wide-angle lobes would be at
than those close to the main beam, it is necessary to design an array pat-
way so that the side-lobes should increase in magnetude with increase in
e position of the main beam in order to achieve an over-all pattern with
equal or approximately equal in magnitude which is useful in many prac-
ns. Neither Schelkunoff's distribution in the range of ψ nor Dolph-
distribution meets this requirement but the suggested distribution does.
aper, explicit expressions for the relative antenna currents have been put
is convenient for calculation and semigraphical method has been used for
1 calculations.