

关于耦合波理論中的不連續性問題^{*1)}

黃 宏 嘉

提 要

在前兩篇論文^[1,2]中,作者提出了一種求解緩變系數一階常微分方程組的數學方法——“緩變系數法”,從而建立了多波型波導本地簡正波的廣義理論。但是,該文所提的理論沒有考慮到波導參數突然變化的情形,而這在任何實際的傳輸系統中是不可避免的。本文的目的是從耦合簡正波理論的觀點來研究波導特性的突變。這樣,就使本地簡正波的概念能夠用來描述更多的波導傳輸問題。

§ 1

作為第一個簡單的例子,我們來研究一段均勻彎波導,或一段起始曲率不等于零的非均勻彎波導,它和一段長直波導相接;這樣,在兩段波導相接處就出現了曲率的跳躍。對這個簡單問題,彎波導輸入端的本地簡正波可以直接從入射波得到

$$\mathbf{W} = \mathbf{O}^T \mathbf{E}, \quad (1)$$

這裡, $\mathbf{W}$ 是彎波導輸入端本地簡正波的列矩陣; $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$, $\mathbf{O}$ 是普通耦合波方程 $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{K} \mathbf{E}$ 中矩陣 $\mathbf{K}$ 的模矩陣。

顯然,公式(1)相當於論文[1]中的公式(7)。在[1]中已經證明:對於一段起始曲率是零的彎波導, $\mathbf{O}^T$ 和 $\mathbf{O}$ 一樣,變為單位矩陣,²⁾ 它表明在彎波導的起始位置本地簡正波和入射波具有“一與一”對應。

§ 2

曲率跳躍的形式也可以是曲率符號的突然改變;在有意 S 形彎曲,垂度彎曲以及遠距離傳輸線的散亂偏移等情形中,就可能發生這種形式的曲率跳躍。正如論文[1,2]所說明的,本地簡正波方法的基本概念就是將一組普通耦合波方程變換為另一組耦合減弱了的耦合波方程。如果在接近一個 S 彎的拐點時,曲率不趨於零,那麼,在這個拐點就發生曲率符號的突然改變;這樣,本地簡正波在拐點的“微分耦合系數”將變為無窮大,而論文[1]中計算本地簡正波的公式(10),也就不能直接被應用了。

但是,對於上述問題,如果我們是在傳輸線相鄰拐點之間作分段積分,那麼,本地簡正波方法也還是可以適用的。這時,論文[1]公式(10)中的 $\mathbf{W}_i(0)$ 代表每一段波導入端的本地簡正波,這些波可以很容易地從上一段終端的本地簡正波求出。因為 $\mathbf{E} = \mathbf{O} \cdot \mathbf{W} =$

* 1961年9月2日收到。

1) 本文同時在“中國科學”1962年第1期上用外文發表。

2) 關於兩個簡并波的特殊情形,在下面第4節中還要討論。

$= \mathbf{O}_+ \mathbf{W}_+$ (这里注脚标“-”代表上一段波导的终端, “+”代表我們所考虑的一段波导的入端), 所以, 为了从 $\mathbf{W}_-$ 算出 $\mathbf{W}_+$, 可以应用下面的关系式:

$$\mathbf{W}_+ = \mathbf{S} \mathbf{W}_-, \quad (2)$$

式中 $\mathbf{S} = \mathbf{O}_+^\dagger \mathbf{O}_-$ 是一个表明曲率符号突变特性的矩阵.

和上节指出过的情形相似, 如果在拐点邻近曲率趋于零, 那么, 公式(2)中的 $\mathbf{S}$ 矩阵就变为一个单位矩阵, 而 $\mathbf{W}_+$ 和 $\mathbf{W}_-$ 也就相等.

§ 3

在两个耦合波的简单特殊情形下, 我們容易对公式(1)和(2)作出物理解释(更确切地说, 作出几何的解释).

我們考虑和一长直波导相接的一段弯波导; 弯波导的矩阵 $\mathbf{K}$ 以及 $\mathbf{K}$ 的模矩阵 $\mathbf{O}$ 分别可以表示为下列形式:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & jc \\ jc & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (4)$$

式中

$$\varphi = (1/2) \operatorname{arctg} (j2c/\Delta\gamma), \quad \Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2. \quad (5)$$

很明显, 接头处曲率的突变 (或者相应的, 耦合系数的突变), 其作用是使代表列矩阵 $\mathbf{E}$ 的二维矢轉一个 φ 角 (在直波导中, 列矩阵 $\mathbf{E}$ 和本地简正波的列矩阵 $\mathbf{W}$ 相等).

对于曲率符号突变的情形, 如果刚刚在拐点之后的位置, 有关的矩阵仍用(3)和(4)来表示, 但现在写成 $\mathbf{K}_-$ 和 $\mathbf{O}_-$, 那么, 刚刚在拐点之前的位置, 相应的矩阵就应该表示为下列形式:

$$\mathbf{K}_- = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & -jc \\ -jc & -\gamma_2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{O}_- = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (7)$$

其中 φ 仍由(5)来表示 (这里, 我們假定拐点邻近两边的曲率幅度相等).

这样, 因为从公式(4)和(7)知道 $\mathbf{O}_+^\dagger = \mathbf{O}_-$, 我們就得到

$$\mathbf{S} = \mathbf{O}_- \mathbf{O}_- = \mathbf{O}_+^\dagger \mathbf{O}_+, \quad (8)$$

由此可见, 曲率符号突变的作用是使二维矢 $\mathbf{W}$ 轉一角度, 其值等于曲率跳跃情形的一倍¹⁾. 这个结果看来是自然的, 因为曲率符号的突变在效果上相当于曲率的值跳跃了一倍.

§ 4

如果在耦合波理论中我們只考虑两个向前的波, 并且它們是简并的, 那么, 能否仍旧

1) 这种解释仅仅适用于两个波型的情形. 在一般情形下, 公式(8)所根据的关系式 $\mathbf{O}_+^\dagger = \mathbf{O}_-$ 并不永远成立.

用本地簡正波来描述波导中的場呢?

根据論文[1]中(15)式,两个本地簡正波之間的耦合系数是 ϕ ; 由(5),我們得到

$$\phi = \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\frac{2}{\Delta\beta} c}{1 + \left(\frac{2c}{\Delta\beta}\right)^2} = 0. \quad (9)$$

因此,在仅仅考虑两个簡并波的特殊情形下,每一个本地簡正波 W_1 和 W_2 都变为“簡正”的(在耦合系数等于零的意义下“簡正”). 在这样一个特殊的系統中,沿波导軸的曲率变化并不引起本地簡正波之間的耦合,而只影响本地簡正波传播常数的值. 根据論文[1]中(14)式,传播常数分别为 $-(\beta \mp c)$.

这里,可能提出这样的問題:既然在两个簡并的普通波之間发生最強的耦合,那么,在相对应的两个本地簡正波之間,耦合又怎样会消失呢? 为了回答这个問題,讓我們更仔細地来看看等式(9).

等式(9)趋于零是基于下面的假定,即 $c(=dc/dz)$ 是有限的,并且 $c \neq 0$. 当 c 变为无穷大或 c 等于零时,这个关系式需要特殊的考虑.

我們首先来研究一个包含两个簡并波的波导系統,它的曲率或耦合系数 c 处处不等于零,但在波导軸上的某一点, c 变为无穷大. 一个簡單的例子就是本文第1节所討論的問題. 这时,公式(1)中的 $\mathbf{O}$ 是一个二阶模矩陣,它的元决定于两个簡并波的特性. 从公式(5)看出,不論 c 的值为何,只要 $c \neq 0$, 那么,当 $\Delta\gamma$ 趋于零时, ϕ 永远等于一常数角 $\pi/4$. 因此,在几何意义上,对于两个簡并波來說,公式(1)中 $\mathbf{O}$ 的作用是使 $\mathbf{E}$ 的二維矢轉一常数角 $\pi/4$. 对于一个 S 弯,因为拐点的曲率突然改变了符号,所以从公式(8)看出,表明拐点特性的 $\mathbf{S}$ 矩陣是使 $\mathbf{W}_-$ 的二維矢轉一个 $\pi/2$ 角. 因此,对于两个簡并波的特殊系統,我們得到下面的表明 S 弯拐点两边本地簡正波之間关系的簡單关系式:

$$\begin{aligned} W_{1+} &= W_{2-}, \\ W_{2+} &= -W_{1-}. \end{aligned} \quad (10)$$

其次,我們考虑一长直波导与一弯波导相接的情形,在接头处弯波导的起始曲率或耦合系数等于零,但曲率沿着波导軸逐渐增大. 从公式(9)看出,对于有限的 c , 当 $\Delta\beta$ 和 c 都等于零时,本地簡正波之間的耦合系数 ϕ 变为无穷大;因此,我們很自然地問,在这样的接头处,本地簡正波的幅度是否会发生突然的改变? 对于两个非簡并波,在論文[1]中已經証明,在直波导和具有零起始曲率的弯波导的接头处,弯波导入端的本地簡正波和入射波具有“一与一”对应. 因为在直波导中本地簡正波和普通波相同,所以,对于两个非簡并波,当它們通过上述形式的接头时,幅度不发生突然的改变. 但是,对于两个簡并波,情况就两样. 現在,在接头邻近的两边,本地和普通波有着不同的关系:在直波导一边,这个关系是 $\mathbf{E}_- = \mathbf{W}_-$, 但在弯波导一边,接近于但不恰好在接头的位置,这个关系变为 $\mathbf{E}_+ = \mathbf{O}_+ \mathbf{W}_+$, $\mathbf{O}_+$ 是一模矩陣,它使 $\mathbf{W}_+$ 轉 $\pi/4$ 后得到 $\mathbf{E}_+$ (和上段討論的非零值 c 的情形一样). 因此,我們得到关系式 $\mathbf{W}_+ = \mathbf{O}_+^\dagger \mathbf{W}_-$, 它表明:在一个波导系統中,如果仅仅考虑两个簡并波,那么,在直波导和弯波导的接头处,即便是弯波导起始曲率等于零,并且曲率是連續的,本地簡正波的幅度也会发生突变.

根据上面的分析, 我們將能够得到一些关于本地簡正波“耦合分布”和普通耦合波相位常数差之間关系的概念。当普通波的相位常数或速度逐漸接近时, 在波导結構的主要部分(曲率緩变部分), 相应的本地簡正波之間的耦合將減弱, 但在朝着 $c \rightarrow \infty$ 和 $c \rightarrow 0$ 的端点, 它們之間的耦合却將加強(这些点是 S 弯的拐点, 或弯波导和直波导的接头)。两个完全簡并的波是一个理想情形; 在这种情形下, 本地簡正波之間的耦合在弯曲波导的整个緩变部分都趋于零, 但在上述的端点, 它們之間的耦合將表現为集中的“冲量”形式¹⁾。

§ 5

一般的, 我們自然想到引用冲量函数或 Dirac δ 函数来描述波导特性的任何突然改变。从物理意义方面看, 这是因为, 波导某种特性的突变, 可以看成是这种特性逐漸改变的极限情形(当变化范围縮小到零)。

让我们仍旧用长直波导和均匀弯波导相接的簡單例子來說明上面的观点。想象直波导和弯波导間的接头为一段具有緩变曲率的弯波导所代替。这样, 整个傳輸綫就成为一个具有緩变参数的系統, 因此本地簡正波方法也就能夠适用。当一个本地簡正波 W_r 通过緩变弯波导的一小段距离 Δz 时, 將发生从 W_r 到 $W_s (s \neq r)$ 的微小的部分变换, 它比例于 W_r 的幅度。从本地簡正波的耦合傳輸綫方程可以知道, 上述的微小的部分变换等于 $\Delta W_{sr} = N_{sr} W_r \Delta z$; 因此, 沿着波导从波型 r 到波型 s 的部分变换可以表示为

$$W_{sr} = \int N_{sr} W_r dz, \quad (11)$$

这里, N_{sr} 是波型 r 和波型 s 之間的耦合系数。

现在, 在分析过程中, 我們再让上述的緩变弯波导縮短到零, 这样, 就仍旧得到在一个直波导和弯波导之間存在着曲率跳跃的实际結構。可以很明显地看出, 耦合系数 N_{sr} 在数学上具有 δ 函数的性質; 除了在直波导和弯波导的连接点, N_{sr} 在两段波导的所有其它部分都处处等于零。因为由公式(1), $W_{sr} = O_{rs} W_r$, 这里 O_{rs} 是 $\mathbf{O}$ 矩陣的第 r 行和第 s 列的元, 所以我們得到下面的关系式:

$$\int N_{sr} dz = \int O_{rs} \delta(z) dz, \quad (12)$$

从上面的公式, $N_{sr} = O_{rs} \delta(z)$; 因此, 对于我們所考虑的簡單例子, O_{rs} 可以看作是描述曲率跳跃的 δ 函数的系数。

很明显的, 用 δ 函数来描述波导的不連續性, 不仅适用于耦合本地簡正波, 也同时适用于普通耦合波。但是, 同样的波导特性的突变对本地簡正波和普通耦合波起着不同的

1) 从純粹的数学观点来看, 当参量 $\Delta\gamma (=i\Delta\beta)$ 趋于极限零时, (5) 式將直接代表一阶梯函数, 而它的微分則代表一冲量函数:

$$\lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & c > 0 \\ -\frac{\pi}{4}, & c < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \dot{\varphi} = \begin{cases} 0, & c \neq 0 \quad (c \neq \infty) \\ \infty, & c = 0 \end{cases}$$

作用。例如,波导接头的錯开,无论对于本地簡正波或普通耦合波都表现为不連續性;但是,單純的曲率跳跃仅仅对于本地簡正波表现为不連續性。

§ 6

現在,讓我們从本地簡正波的观点来分析关于有意弯曲的一个重要的实际問題。

首先研究一个均匀弯波导和一个长直波导相接的問題。为了求出它的近似解,我們只考虑两个簡并波 E_1 和 E_2 , 即 H_{01} 和 E_{11} 。如前所述,当通过直波导和弯波导的接头时,本地簡正波的幅度发生突然的改变,并且,这种突变可以用(1)中的 O^T 矩陣来描述,它使 E 或 W_- 的二維矢轉 $-\pi/4$ 后得到 W_+ 。在弯波导的末端接上另一个长直波导,这里,本地簡正波的幅度发生第二次突然的改变。一般的,由于波型变换,弯波导末端的波型 E 和弯波导始端的入射波是不相同的。我們現在来研究 H_{01} 完全变换为 E_{11} 的条件。

因为在弯波导和直波导的第二个接头处,我們有下面的关系, $W'_+ = E'_+ = E'_- = O'_- W'_-$ (这里撇号代表在第二个接头的量),所以,在这个接头,曲率不連續性的作用可以用 O'_- 来描述,它使 W'_- 轉 $\pi/4$ 后得到 W'_+ 或 E'_+ 。为了使 $E'_{1+} = 0$ 并且 $E'_{2+} = 1$, W'_- 的二維矢应落后于 E'_+ 或 W'_+ 的二維矢一个 $\pi/4$ 角。因为 W_+ 落后 W_- 或 E 一个 $\pi/4$ 角,并且 E_- 落后 E'_+ 一个 $\pi/2$ 角,所以 W'_- 必須导前 W_+ 一个 $\pi/2$ 角。如前所述,当仅仅考虑两个簡并波时,两个本地簡正波(它們也就是均匀弯波导中的簡正波)的传播常数分别为 $-(\beta \mp c)$ 。因此,为了使 W'_- 导前 W_+ 一个 $\pi/2$ 角,两个波必須通过这样一段距离,使得“快波”(相位系数为 $-\beta + c$)的相位是 $-2n\pi$, 而“慢波”(相位系数为 $-\beta - c$)的相位是 $-(2n+1)\pi$ 。这样,因为 $-(\beta + c)z - [-(\beta - c)z] = -\pi$, 对于 $n = 0$, 所以,对应于 H_{01} 完全变换为 E_{11} 的均匀弯波导的极限长度(或轉換长度)是 $z_c = \pi/2c$ 。用 θ_c 来代表相当的均匀弯波导的极限角 ($\theta_c = z_c/R$, R 是曲率半径), 并且应用关系式 $c = c_0/R$, 就得到下面的基本公式:

$$\theta_c = \frac{\pi}{2c_0}. \quad (13)$$

我們看到,这个結果和 Jouguet^[4] 采用微扰法所得的結果是符合的,同时,它也和 Morgan 直接从普通耦合波得到的結果相符合。^[5]

采用本地簡正波方法,我們不仅能够从一个新的角度来証明已經得到过的重要結果,同时,还能够进一步将上面的分析推广到非均匀曲率的情形。根据前面的分析,对于两个簡并波的系統,当 c 被看作是变量时,只要 c 是有限的,并且 c 不等于零,本地簡正波間的耦合系数 ϕ 就等于零;因而,上面对于均匀弯波导得到的关系式,仍旧适用于非均匀弯波导。这时,在非均匀弯波导中从 H_{01} 完全变换为 E_{11} 的条件变为

$$\int_0^{z_c} c dz = \frac{\pi}{2}. \quad (14)$$

将 $c = c_0(d\theta/dz)$ 代入(14),就得到

$$\theta_c = \int_0^{\theta_c} d\theta = \frac{\pi}{2c_0}. \quad (15)$$

在均匀曲率的情形下,文献中已經証明,在低衰减全金属波导管中,从 H_{01} 到 E_{11} 的每单位轉角的变换不能依靠减小曲率来避免。这里,引用本地簡正波的概念,上面的結論可以推广到更加一般的非均匀曲率的情形。从以上几节的分析我們知道,对于一个包含两个簡并波的系統,不論弯波导是均匀的,或者弯波导曲率在給定的或散乱的方式下变化,从 H_{01} 到 E_{11} 的完全变换都是发生在极限角的奇数倍处。因而,在这样的系統中,每单位轉角的波型变换不仅不能单纯依靠减小曲率来避免,同时,也不能依靠使曲率变化得足够緩慢来避免。

§ 7

在以上各节中,我們主要是討論了波导的弯曲問題。但是,本地簡正波的場描述显然不仅适用于包含曲率突然改变的問題,同时也适用于其它形式的波导不連續性。在任何制造的或敷設的不規則点的两边,普通耦合波和本地正規波之間的关系都可以分別表示为 $\mathbf{E}_- = \mathbf{O}_- \mathbf{W}_-$ 和 $\mathbf{E}_+ = \mathbf{O}_+ \mathbf{W}_+$; 因此,如果将 $\mathbf{E}_+$ 和 $\mathbf{E}_-$ 之間的关系表示为 $\mathbf{E}_+ = \mathbf{T} \mathbf{E}_-$, 我們就有

$$\mathbf{W}_+ = \mathbf{O}_+^{\dagger} \mathbf{T} \mathbf{O}_- \mathbf{W}_-. \quad (16)$$

对于一些具体問題,例如不良的波导接头或全金属波导管和螺旋管的接头等, $\mathbf{T}$ 矩陣能够从文献中的結果直接得到^[6,7]。

参 考 文 献

- [1] 黃宏嘉, Generalized Theory of Coupled Local Normal Modes in Multi-wave Guides, *Scientia Sinica*, (1960) (Jan.), 142—154.
- [2] 黃宏嘉, 級变系数法, 数学学报, **11**, 3 (1960), 238—247.
- [3] Иваненко Д. и Соколов А., Классическая теория поля (новые проблемы), Издание Второе, Гостехиздат, (1951).
- [4] Jouguet M., Effects de la courbure un guide a section circulaires, *Cables & Trans.*, **1**, No. 2, (1947) (July), 133—153.
- [5] Morgan S. P., Theory of Curved Circular Waveguide Containing an Inhomogeneous Dielectric, *B.S.T.J.* (1957) (Sept.), 1269—1251.
- [6] Каценеленбаум Б. З., Сочленение Двух Волноводов с Близкими Сечениями, *ЖТФ*, **10**, **24** (1954).
- [7] Unger H. G., Helix Waveguide Theory and application. *B. S. T. J.* (1958) (Nov.) 1599—1647.

NOTES ON DISCONTINUITY PROBLEMS IN COUPLED WAVE THEORY

HUANG HUNG-CHIA

ABSTRACT

In two previous papers^[1, 2] the author presented a generalized theory of local normal modes by introducing the method of slowly varying coefficients—a mathematical method to solve systems of first order linear differential equations with slowly varying coefficients, which are associated with problems of multi-coupled modes in irregular waveguides. However, the theory presented therein was not in a form to adapt itself to problems involving abrupt changes of the waveguide parameters, which are inevitable in any practical transmission system. The purpose of the present paper is to consider such abrupt changes in the light of the above theory, so that the concept of local normal modes may be used to describe a broader class of problems.