

螺旋对称磁场的计算*

顧 永 年

提 要

本文对于分布在无限长圆柱周界上的螺旋电流产生的磁场用标势方法得出了普遍解,并且给出了导线在圆柱周界上平均分布时的磁场公式。同时,用矢势方法计算了导线为非无限长时的磁场公式。以上结果,在螺距趋于零的极限下得到了波紋磁场。

一、引 言

在受控热核反应研究中,为了约束高温等离子体,常常使用各种形态的磁场,例如,磁镜装置^[1]、磁面装置(仿星器)^[2],以及磁网装置等^[3]。一个理想的约束磁场应该不仅能使等离子体存在平衡态,而且能存在稳定平衡态。如所周知,在均匀磁场中等离子体的约束是不完全的,沿着磁场方向的运动是自由的。又如在简单环形磁场中不存在等离子体的平衡态,因而,为了满足平衡与稳定的要求,所用的约束磁场往往形式特殊^[2,3],而且这些形态的磁场分布也常常没有现成的结果可以利用,需要从理论上另行计算和从实验上模拟测定。本文对磁面装置中所用的螺旋对称磁场作了计算,对于分布在无限长圆柱周界上的螺旋电流得到了精确的解,并且给出了导线在圆柱周界上平均分布时的磁场公式和用矢势方法计算的、导线为非无限长时的磁场公式。利用这些结果,在螺距趋于零的极限下得到了波紋磁场的表示式。

二、螺旋对称磁场的精确解

(1) 基本方程和边界条件

依照处理磁场问题的通常方法,在定态条件下,磁场由下面的麦克斯韦方程组和边界条件来描写:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}; \quad (2.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \langle \mathbf{B} \rangle = 0; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{n} \times \langle \mathbf{B} \rangle = 4\pi \mathbf{j}^*; \quad (2.3)$$

或

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi I, \quad (2.4)$$

其中 $\mathbf{B}$ 为磁场强度, $\mathbf{j}$ 为电流密度, $\mathbf{n}$ 为边界面的单位法向矢量, $\mathbf{j}^*$ 为面电流密度, I 为回路 c 中的电流强度, 尖角括号 $\langle \rangle$ 表示物理量沿法线方向通过边界面的突变。这里已

* 1962年6月18日收到。

$$\frac{d^2\Phi}{d\theta^2} = -\lambda^2\Phi(\theta), \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} R(r) - \left[\frac{\lambda^2}{r^2} + \mu^2 \right] R(r) = 0, \quad (2.15)$$

其中 μ, λ 为分离常数. 方程(2.13)和(2.14)的解分别为

$$Z = e^{\pm i\mu z}, \quad (2.16)$$

$$\Phi = e^{\pm i\lambda\theta}, \quad (2.17)$$

这里将积分常数统一归并在方程(2.15)的积分常数上. 由条件(i), μ 必须是实数, 且满足

$$\mu = m2\pi/P = m\alpha, \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.18)$$

同样, λ 也必须是实整数. 如果选取右旋系统, 则 Z 和 Φ 的合解为

$$Z \cdot \Phi = e^{\pm i(\lambda\theta - m\alpha z)}. \quad (2.19)$$

由螺旋不变性条件得

$$\lambda = m. \quad (2.20)$$

于是, 方程(2.15)是 m 阶修正贝塞尔方程, 其解为^[4]

$$\begin{aligned} R^{(i)} &= A_m^{(i)} I_m(m\alpha r), \quad (r < a), \\ R^{(e)} &= B_m^{(e)} K_m(m\alpha r), \quad (r > a), \end{aligned} \quad (2.21)$$

其中 A_m, B_m 为积分常数, I_m 为修正贝塞尔函数, K_m 为麦克唐纳函数. 因此, ϕ 的周期解为:

$$\phi^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} [A_m^{(i)} I_m(m\alpha r) e^{im(\theta - \alpha z)} + A_{-m}^{(i)} I_m e^{-im(\theta - \alpha z)}], \quad (r \leq a) \quad (2.22)$$

$$\phi^{(e)} = \sum_{m=1}^{\infty} [B_m^{(e)} K_m(m\alpha r) e^{im(\theta - \alpha z)} + B_{-m}^{(e)} K_m e^{-im(\theta - \alpha z)}], \quad (r \geq a) \quad (2.23)$$

(电流区域除外)

或用三角函数表示为

$$\phi^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m^{(i)} I_m(m\alpha r) \cos mu + \alpha_{-m}^{(i)} I_m \sin mu], \quad (r \leq a) \quad (2.24)$$

$$\phi^{(e)} = \sum_{m=1}^{\infty} [\alpha_m^{(e)} K_m(m\alpha r) \cos mu + \alpha_{-m}^{(e)} K_m \sin mu], \quad (r \geq a) \quad (2.25)$$

(电流区域除外)

其中, $u = (\theta - \alpha z)$, α_m 为积分常数. 所以, ϕ 仅为 r, u 的函数, 即沿着螺旋线方向移动时为一常量, 现在只剩下常数 α_m 需要确定.

(3) 常数 α_m 的确定

常数 α_m 由磁场的边界条件来确定¹⁾. 根据式(2.2), 磁场的法向分量在边界上为连续(法线方向为 $\mathbf{r}_0$).

$$B_r^{(i)}(a) = B_r^{(e)}(a),$$

详细写出上式后,

1) 值得指出二点:(i)当电流有更进一步的对称分布时, 利用围绕电流的积分可以更直接定出常数 α_m , 见 577 页;
(ii) 常数 α_m 也能由给定的 B_n 的边值来确定, 见 582 页.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} m \alpha I'_m(m \alpha a) [\alpha_m^{(i)} \cos mu + \alpha_{-m}^{(i)} \sin mu] = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} m \alpha K'_m(m \alpha a) [\alpha_m^{(e)} \cos mu + \alpha_{-m}^{(e)} \sin mu], \end{aligned} \quad (2.26)$$

上式两边各乘 $\cos mu$, 并对 u 积分, 由三角函数的正交性, 得

$$\alpha_m^{(i)} I'_m(m \alpha a) = \alpha_m^{(e)} K'_m(m \alpha a). \quad (2.27)$$

同样, 式(2.26)两边乘以 $\sin mu$ 后, 可得

$$\alpha_{-m}^{(i)} I'_m(m \alpha a) = \alpha_{-m}^{(e)} K'_m(m \alpha a), \quad (2.28)$$

或上两式改写为

$$\begin{aligned} \alpha_m^{(i)} &= C_m K'_m(m \alpha a), & \alpha_m^{(e)} &= C_m I'_m(m \alpha a), \\ \alpha_{-m}^{(i)} &= C_{-m} K'_m(m \alpha a), & \alpha_{-m}^{(e)} &= C_{-m} I'_m(m \alpha a), \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中 C_m 和 C_{-m} 为常数, 撇“'”表示对宗量的微分。

由式(2.3), 磁场的切向分量在面电流处有一突变,

$$\frac{\partial \phi^{(e)}}{\partial u} - \frac{\partial \phi^{(i)}}{\partial u} = 4\pi j^* H_u, \quad (2.30)$$

其中 $H_u = a/\sqrt{1 + \alpha^2 a^2}$, $j^* = j_z^* \sqrt{1 + \alpha^2 a^2} = j_\theta^* \sqrt{1 + \alpha^2 a^2}/\alpha a$ (图2)。详细写出上式后,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{m}{H_u} C_m (I'_m K_m - K'_m I_m) \sin mu + \right. \\ & \left. + \frac{m}{H_u} C_{-m} (I'_m K_m - K'_m I_m) \cos mu \right] = 4\pi j^*, \end{aligned} \quad (2.31)$$

并利用修正贝塞尔方程解的朗斯基行列式^[4]

$$I_m(x) K'_m(x) - K_m(x) I'_m(x) = -\frac{1}{x}, \quad (2.32)$$

和三角函数的正交性, 得

$$\begin{aligned} C_{-m} &= 4\pi \alpha a H_u(a) j_{1m}^*, \\ C_m &= -4\pi \alpha a H_u(a) j_{2m}^*, \end{aligned} \quad (2.33)$$

其中

$$j_{1m}^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j^* \cos mudu, \quad (2.34)$$

$$j_{2m}^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j^* \sin mudu, \quad (2.35)$$

为 j^* 的福里叶系数。

于是, 总的标势 ϕ_z 为

$$\phi_z^{(i)} = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{1m}^{(i)} + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{2m}^{(i)} + \phi_0^{(i)}, \quad r \leq a; \quad (2.36)$$

$$\phi_z^{(e)} = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{1m}^{(e)} + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{2m}^{(e)} + \phi_0^{(e)}, \quad r \geq a, \quad (2.37)$$

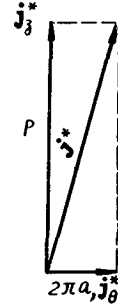


图 2

其中

$$\phi_{1m}^{(i)} = 4\pi\alpha a H_u j_{1m}^* K'_m(\alpha a) I_m(m\alpha r) \sin mu, \quad (2.38)$$

$$\phi_{2m}^{(i)} = -4\pi\alpha a H_u j_{2m}^* K'_m(m\alpha a) I_m(m\alpha r) \cos mu, \quad (2.39)$$

$$\phi_{1m}^{(e)} = 4\pi\alpha a H_u j_{1m}^* I'_m(m\alpha a) K_m(m\alpha r) \sin mu, \quad (2.40)$$

$$\phi_{2m}^{(e)} = -4\pi\alpha a H_u j_{2m}^* I'_m(m\alpha a) K_m(m\alpha r) \cos mu, \quad (2.41)$$

以及

$$\phi_0^{(i)} = 4\pi j_{0\theta}^* z, \quad \phi_0^{(e)} = 4\pi a j_{0z}^* \theta, \quad (2.42)$$

其中均匀电流密度 j_0^* 可以用福氏均匀分量来表示:

$$j_{0\theta}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j_{\theta}^* d\theta, \quad j_{0z}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j_z^* d(\alpha z). \quad (2.43)$$

总的磁場为

$$\mathbf{B} = \nabla\phi_{\Sigma} = \mathbf{B}_0 + \sum_m \mathbf{B}_{1m} + \sum_m \mathbf{B}_{2m}.$$

上述結果清楚表明,一任意分布的螺旋电流的磁場为电流的福氏分量磁場之和,每一福氏电流的磁場由式(2.38—2.42)来决定。当电流有更进一步的对称分布时,結果能够大为简化,例如, j^* 为 u 的奇函数时,

$$j^*(u) = -j^*(-u),$$

則

$$j_{1m}^* = 0, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

ϕ_{Σ} 仅为余弦項, j^* 为 u 的偶函数时,

$$j^*(u) = j^*(-u),$$

則

$$j_{2m}^* = 0, \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

又如 $j_0^* = 0$, 則 ϕ_{Σ} 仅为正弦項,在更具体的电流分布下,能够得到更直观的磁場形态。

三、螺旋对称磁場的几个实例

(1) 余弦型电流分布的磁場

电流分布为余弦或正弦形式时¹⁾,磁場形态最为简单。設

$$j^* = J \cos lu, \quad (3.1)$$

其中 l 为整倍数, J 为面电流密度的幅值,則标势为

$$\begin{aligned} \phi_{\Sigma}^{(i)} &= 4\pi\alpha a H_u J K'_l(l\alpha a) I_l(l\alpha r) \sin lu, \quad r < a; \\ \phi_{\Sigma}^{(e)} &= 4\pi\alpha a H_u J I'_l(l\alpha a) K_l(l\alpha r) \sin lu, \quad r > a. \end{aligned} \quad (3.2)$$

磁場为²⁾

$$\begin{aligned} B_r^{(i)} &= 4\pi\alpha^2 l a H_u J K'_l(l\alpha a) I'_l(l\alpha r) \sin lu, \\ B_{\theta}^{(i)} &= 4\pi\alpha^2 l a H_u J K'_l(l\alpha a) I_l(l\alpha r) \cos lu / r a, \\ B_z^{(i)} &= -4\pi\alpha^2 l a H_u J K'_l(l\alpha a) I_l(l\alpha r) \cos lu. \end{aligned} \quad (3.3)$$

1) 正弦型电流分布磁場可以由坐标极軸的旋轉来得到(例如,轉 $\pi/2l$)。

2) 在圓柱外,磁場可以类似地給出,但通常感兴趣的是圓柱內的磁場,因而,在圓柱外的情況,这里和以后都不具体給出了。

在大螺距情况 ($l\alpha \ll 1$) 下, 利用函数 I_l 和 K_l 的级数展开式^[4], 仅保留 ($l\alpha$) 的头二项, 磁场能简化为

$$\left. \begin{aligned} B_r^{(i)} &= -G_1 2\pi J \left(\frac{r}{a}\right)^{l-1} \sin lu, \\ B_\theta^{(i)} &= -G_2 2\pi J \left(\frac{r}{a}\right)^{l-1} \cos lu, \quad (r < a) \\ B_z^{(i)} &= G_2 2\pi J (\alpha r) \left(\frac{r}{a}\right)^{l-1} \cos lu, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中

$$G_1 = \left[1 - \frac{l}{4} \alpha^2 a^2 \left(\frac{l-2}{l-1} - \frac{l+2}{l+1} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right) + O(\alpha^4 a^4) \right],$$

$$G_2 = \left[1 - \frac{l}{4} \alpha^2 a^2 \left(\frac{l-2}{l-1} - \frac{l}{l+1} \left(\frac{r}{a}\right) \right) + O(\alpha^4 a^4) \right].$$

由此看出, (i) 磁场主要在 r, θ 方向 ($B_z: B_r = \alpha r \ll 1$), 即为横向螺旋对称磁场; (ii) 磁场正比于 $\left(\frac{r}{a}\right)^{l-1}$, 当 l 甚大时, 例如 $l \geq 4$, 在 $\left(\frac{r}{a}\right)$ 小的区域内, 磁场很小; (iii) 当螺距减小 (α 增大) 时, 纵向磁场增大, 横向磁场稍受变化。

(2) $2l$ 根导线电流的磁场

电流分布为三角函数形式往往是理想的, 实际上, 磁场由导线电流产生的。设 $2l$ 根导线均匀分布在无限长的圆柱周界上 (图1), 其螺距为 P , 在相邻导线中通以方向相反、强度相同的电流 I 。当导线足够细时, 电流分布可借用狄拉克 δ 函数^[5]来表示:

$$j^* = I \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \delta(H_u u, H_u u_n), \quad (3.5)$$

其中 $u_n = \left(\frac{n\pi}{l} + u_0\right)$ 为第 $(n+1)$ 根导线

所在的位置 ($r = a$), u_0 为第一根导线所在的位置。当导线有一定宽度 τ 时, 电流分布如图 3, 或解析式为:

$$j^* = \begin{cases} (-1)^n I / \tau, & u \text{ 在区间 } \left[u_n - \frac{\kappa\pi}{2l}; u_n + \frac{\kappa\pi}{2l} \right] \text{ 上,} \\ 0, & u \text{ 在其他区域内,} \end{cases} \quad (3.6)$$

其中 κ 为一定宽度的导线的张角与 $\frac{\pi}{l}$ 之比,

κ 与宽度 τ 的关系为:

$$\tau = H_u \Delta u = H_u \frac{\kappa\pi}{l}.$$

利用式 (2.34), (2.35) 能直接求得 j_{1m}^*, j_{2m}^* (附录 II), 在线电流分布下,

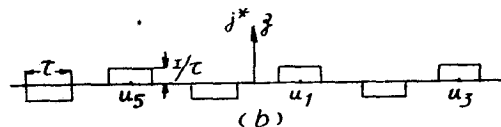
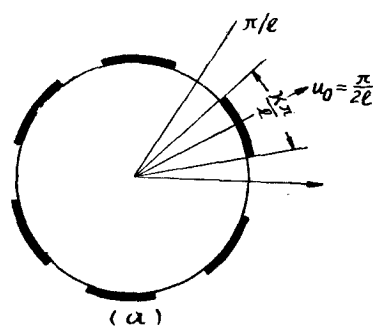


图 3

a. 一定宽度的导线分布,
b. 电流密度分布图。

$$\begin{aligned} j_{1m}^* &= 0, \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \\ j_{2m}^* &= (2I/\pi H_u) \sin q\pi/2, \quad (m = ql, q \text{ 为奇数}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

在导线宽度为 τ 时,

$$\begin{aligned} j_{1m}^* &= 0, \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \\ j_{2m}^* &= (2I/\pi H_u) E_q \sin q\pi/2, \quad (m = ql, q \text{ 为奇数}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 $E_q = \frac{2}{\kappa\pi q} \sin \frac{\kappa\pi}{2} q$, 并已选取坐标极轴通过二相邻导线的中央, 这样, 由式(2.38),

(2.39) 就能写出磁场的公式, 然而, 在目前导线均匀分布情况下, 我们还给出一个利用围绕电流的环积分定常数的方法.

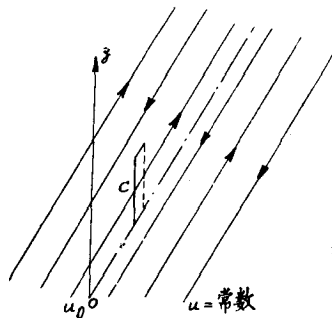


图 4 积分回路图

在目前导线的分布下, 一个螺距内有 l 个周期, m 应为 l 的整倍数, 同时, 可以只考察 $\Delta u = \pi/l$ 的区域(如图 4), 因而式(2.4)的环积分为

$$\oint_c \mathbf{B} ds = \int_0^\pi \frac{(B_z^{(i)} - B_z^{(e)})}{\alpha l} d(\alpha l z) = 4\pi I, \quad (3.9)$$

现在作下面的环积分:

$$\oint_c \mathbf{B} \sin qlu ds, \quad (3.10)$$

详细写出上式后, 并利用式(2.32)和三角函数的正交性,

得

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sum_{m=1}^\infty \left[\frac{m}{l} C_m (K'_m I_m - I'_m K_m) \sin mu - \frac{m}{l} C_{-m} (K'_m I_m - K_m I'_m) \times \cos mu \right] \times \\ \times \sin qlu d(\alpha l z) = C_{ql} (\pi/2 l \alpha a). \end{aligned} \quad (3.11)$$

但另一方面, $(B_z^{(i)} - B_z^{(e)})$ 仅在导线上不为零, 在其位置时, 处处为零, 因而, 式(3.10)又可写为

$$\oint_c \mathbf{B} \sin qlu ds = \int_0^\pi \frac{(B_z^{(i)} - B_z^{(e)})}{\alpha l} \sin qlu d(\alpha l z) = 4\pi I \times \sin qlu_0, \quad (3.12)$$

其中, u_0 为导线所在的位置, 取 $u_0 = \pi/2l$. 式(3.11)和式(3.12)相等后, 得

$$C_{ql} = 8Il\alpha a \sin q\pi/2, \quad (3.13)$$

q 为偶数时, $C_{ql} = 0$.

同样, 作 $\oint_c \mathbf{B} \cos qlu ds$ 的环积分, 得 $C_{-m} = 0$, 结果与式(3.7)完全一致, 于是 $2l$ 根相邻导线通以反向电流所产生的磁场公式为:

$$\phi_z^{(i)} = 8Il\alpha a \sum_{q=1,3,5,\dots} E_q K'_{ql} I_{ql} (ql\alpha r) \sin q \left(lu - \frac{\pi}{2} \right), \quad (3.14)$$

$$B_r^{(i)} = 8Il^2\alpha^2 a \sum_q E_q q K'_{ql} I'_{ql} (ql\alpha r) \sin q \left(lu - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$B_\theta^{(i)} = 8Il^2\alpha^2 a \sum_q E_q q K'_{ql} I_{ql} (ql\alpha r) \cos q(lu - \pi/2)/(r\alpha), \quad (3.15)$$

$$B_z^{(e)} = -8Il^2\alpha^2 a \sum_q E_q q K'_{ql} I_{ql} (ql\alpha r) \cos q(lu - \pi/2). \quad (q \text{ 为奇数})$$

其中 $E_q = \frac{2}{\kappa\pi q} \sin \frac{\kappa\pi}{2} q$, 在线电流时, $E_q = 1$. 在大螺距情况下, 磁场简化为

$$\left. \begin{aligned} B_r^{(j)} &= - \sum_q \frac{2I}{a} 2lE_q \left(\frac{r}{a}\right)^{q-1} \sin ql(u - \pi/2l), \\ B_\theta^{(j)} &= - \sum_q \frac{2I}{a} 2lE_q \left(\frac{r}{a}\right)^{q-1} \cos ql(u - \pi/2l), \\ B_z^{(j)} &= \sum_q \frac{2I}{a} 2l\alpha a E_q \left(\frac{r}{a}\right)^{q-1} \cos ql(u - \pi/2l), \quad (r < a) \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

q 为奇数. 对于线电流的情况, 在 r 较小的区域内 (如 $r < \frac{2}{3}a$), q 为 1 的磁场为主要的. 在圆柱边界附近, 磁场有多种谐波和量. 对于一定宽度的导线, 在相同的电流强度下, 磁场比线电流时要小, 而且由于存在因子 E_q , 磁场的高级谐波和量随着 q 的增大而很快地减小 (图 5). 如果 $\kappa = \frac{2}{3}$ ($E_1 = 0.83$), 则 $q = 3$

的项为零, 磁场主要是由第一项来贡献的, 这可以认为三角函数形式的电流分布的磁场.

对于相邻导线中电流方向相同的情况, 则仅需在式 (3.15) 中以 q' 为偶数代替奇数的 q , 以及在 z 方向上加一均匀磁场 $B_0 = 4laI$ 后, 便是所需要的磁场公式.

式 (3.15) 与文献 [2, 6] 中直接给出的结果相类似, 但我们的结果更为详尽普遍.

(3) 退化的螺旋电流的磁场——波紋磁场

在另一个极限情况下, 电流仅在 θ 方向. 此时, 螺旋对称磁场退化为波紋磁场. 磁场公式不难由 $l \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$, 而 $la \rightarrow k$ (k 为波数) 的极限情况而得到, 式 (2.34), (2.35) 和式 (2.38—2.41) 变为

$$\phi_{1q}^{(j)} = 4\pi a j_{1q}^* K'_0(qka) I_0(qkr) \sin qkz, \quad \left. \begin{aligned} \phi_{2q}^{(j)} &= 4\pi a j_{2q}^* K'_0(qka) I_0(qkr) \cos qkz, \\ \phi_{1q}^{(e)} &= 4\pi a j_{1q}^* I'_0(qka) K_0(qkr) \sin qkz, \\ \phi_{2q}^{(e)} &= 4\pi a j_{2q}^* I'_0(qka) K_0(qkr) \cos qkz, \end{aligned} \right\} \quad r < a, \quad (3.17)$$

$$\quad \quad \quad (3.18)$$

$$\quad \quad \quad (3.19)$$

$$\quad \quad \quad (3.20)$$

$$j_{1q}^* = j_{1m}^* = \frac{-1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j_\theta^* \cos qkz d(kz), \quad (3.21)$$

$$j_{2q}^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j_\theta^* \sin qkz d(kz). \quad (3.22)$$

当线圈在等间隙分布下, 且相邻线圈中电流方向相反时, 磁场公式为

$$\phi_1^{(j)} = -8Iak \sum_{q=1,3,5,\dots} E_q K'_0(qka) I_0(qkr) \sin qkz, \quad (3.23)$$

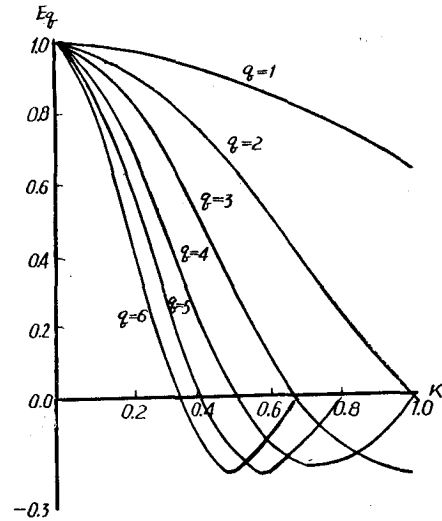


图 5

因子 $E_q = \frac{2}{\kappa\pi q} \sin \frac{\kappa\pi}{2} q$ 与 κ, q 的关系

$$B_{r1}^{(i)} = -8Iak^2 \sum_{q=1,3,5,\dots} q E_q K_0'(qka) I_0'(qkr) \sin qkz, \quad (3.24)$$

$$B_{z1}^{(i)} = -8Iak^2 \sum_{q=1,3,5,\dots} q E_q K_0'(qka) I_0(qkr) \cos qkz, \quad (3.25)$$

(q 为奇数)

当相邻线圈中电流方向都相同时, 磁场还有均匀分量, 即,

$$\phi_2^i = 4kIz - 8Ika \sum_{q'=2,4,6,\dots} E_{q'} K_0'(q'ka) I_0(q'kr) \sin q'kz, \quad (3.26)$$

$$B_{r2}^{(i)} = -8Iak^2 \sum_{q'=2,4,6,\dots} q' E_{q'} K_0'(q'ka) I_0'(q'kr) \sin q'kz, \quad (3.27)$$

$$B_{z2}^{(i)} = 4kI - 8Iak^2 \sum_{q'=2,4,6,\dots} q' E_{q'} K_0'(q'ka) I_0(q'kr) \cos q'kz, \quad (3.28)$$

(q' 为偶数)

其中 $E_q = \frac{2}{\kappa\pi q} \sin \frac{k\pi}{2} q$ (q 为奇数或偶数), $k = \pi/L$, L 为相邻线圈的中心距离, $\kappa = \tau/L$,

坐标原点取在通过某一正电流线圈中央的 Z 平面上.

当 κ 很小时, 与前一一样, 磁场为许多谐和量之和, 但选取一定的 κ 值后, 磁场可以主要是 $q = 1$ 的谐和量 ($\kappa = \frac{2}{3}$) (图 6) 或者, 在电流方向相同情况下, $\kappa = \frac{1}{2}$ 时, 磁场主要是

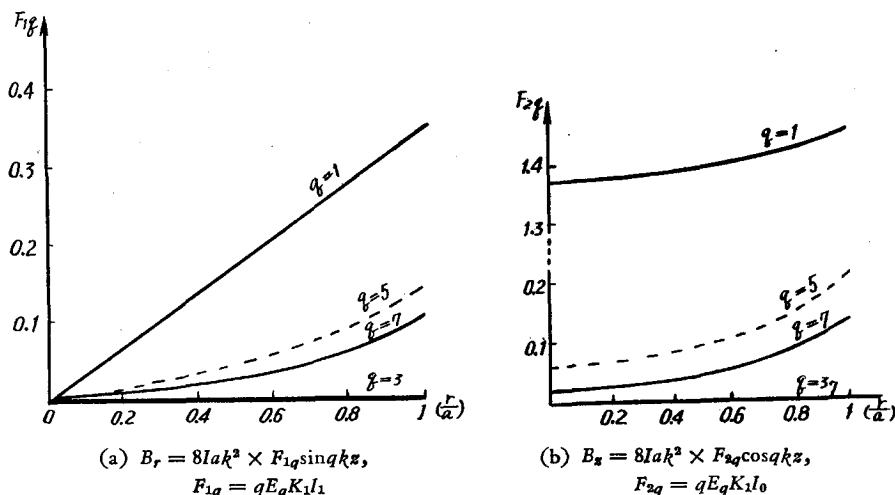
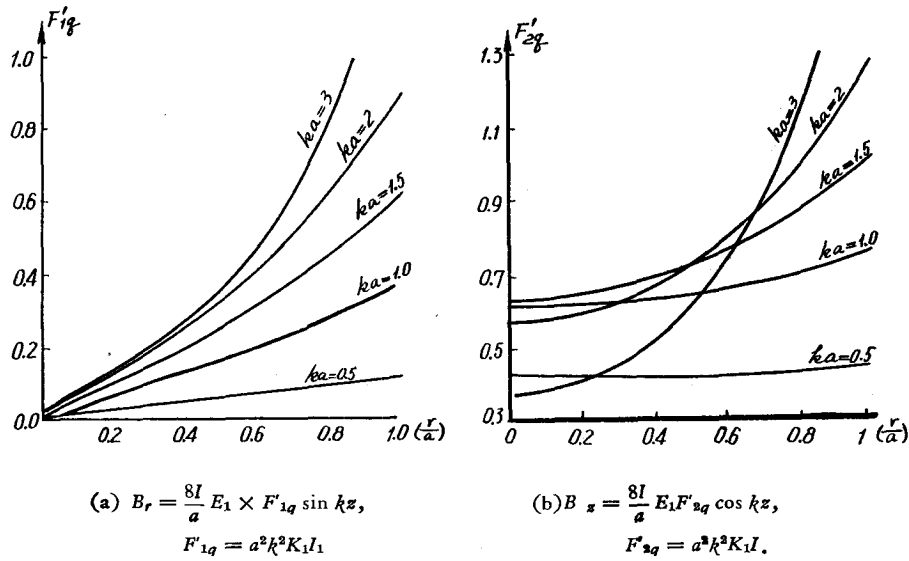


图 6 各谐和磁场的大小之比(虚线表示负值)

是 $q = 2$ 的谐和量和均匀分量, 当 $\kappa = 1$ 时, 磁场只有均匀分量, 这是所预期的结果, 对于磁场分布与线圈间的距离的关系如图 7 所示.

在转向另一问题时, 还值得指出一点, 当导线在径向有一定厚度时(或者, 有意地给出某一径向分布电流时), 只要将磁场公式中的 I 看作某一薄层中的元电流, 然后对圆柱半径 a_i 积分, 就得到一定厚度的电流产生的磁场公式. 例如, 在最简单的情况下, 电流在导线中为均匀分布, 并且导线厚度比圆柱半径小很多时, 在磁场公式中可以近似地用平均半径 $\bar{a}$ 来代替 a .

图7 磁场分布与 ka 的关系

四、从矢势积分求磁场的問題

以上计算了无限长的螺线电流的磁场,当螺线电流为有限长时,尤其在实用使用大螺距螺线电流时,往往只有一至二个螺距左右,则前述的螺旋不变性就不能直接应用了.为了考虑螺线电流为有限长时的磁场,这里用矢势积分来求磁场.一般说,矢势积分比较复杂,现在先考虑在圆柱中心附近的磁场.

对于 $2l$ 根导线,如图1所示,在 a 点 $(r_1; \theta_1; z_1)$ 的矢势为

$$A_z = I \int_{-l}^l \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \frac{dz}{R_n}, \quad (4.1)$$

$$A_\theta = I \int_{-2\pi/p}^{2\pi/p} \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \frac{a \cos \Theta_n}{R_n} d\theta, \quad (4.2)$$

$$A_r = -I \int_{-2\pi/p}^{2\pi/p} \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \frac{a \sin \Theta_n}{R_n} d\theta. \quad (4.3)$$

其中 $\Theta_n = \left(\theta - \theta_1 + \frac{\pi}{l} n \right)$, $R_n^2 = [a^2 + r_1^2 - 2ar_1 \cos \Theta_n + (z - z_1)^2] \equiv [E^2 - F \cos \Theta_n]$,

$E \equiv a^2 + r_1^2 + (z - z_1)^2$, $F \equiv 2ar_1 E^2 > F$.

现在先计算 A_z , 用级数把 $1/R_n$ 展开为

$$1/R_n = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)!}{2^{2\gamma} \gamma! \gamma!} \frac{F^\gamma}{E^{2\gamma+1}} \cos^\gamma \Theta_n, \quad (4.4)$$

并利用关系式(附录1):

$$\sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \cos^\gamma \Theta_n = 2l \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{\gamma!}{j! (\gamma-j)!} e^{i(\gamma-2j)(\theta-\theta_1)} \times \delta_{(\gamma-2j), q l}, \quad (q \text{ 为奇数}) \quad (4.5)$$

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ 为正交 δ 函数, 则 A_z 为

$$A_z = I \int_{-s}^s dz \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \frac{1}{R_n} = I \int_{-s}^s dz \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)!}{2^{2\gamma} \gamma! \gamma!} \frac{F^\gamma}{E^{2\gamma+1}} \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \cos^n \theta_n =$$

$$= I \int_{-s}^s dz \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(2\gamma)!}{2^{2\gamma} \gamma! \gamma!} \frac{F^\gamma}{E^{2\gamma+1}} \left[2l \left(\frac{1}{2} \right)^\gamma \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{\gamma!}{j! (\gamma-j)!} e^{i(\gamma-2j)(\theta-\theta_1)} \delta_{\gamma-2j, ql} \right]. \quad (4.6)$$

对于 r_1 趋近于零的情况, 只需保留 $(\gamma - 2j) = ql$ 的系数的 r_1 最低次幂, 则式(4.6)为

$$A_z = 4Il \sum_q \int_{-s}^s dz \frac{(2ql)!}{2^{3ql} [(ql)!]^2} (2a\gamma_1)^{ql} \frac{\cos ql(\alpha z - \theta_1)}{[a^2 + (z - z_1)^2]^{ql+1/2}} =$$

$$= 8Il \sum_q \frac{1}{(ql)!} \left[\frac{1}{2} qlar_1 \right]^{ql} K_{ql}(qlaa) \cos ql(\theta_1 - \alpha z_1), \quad (q \text{ 为奇数}) \quad (4.7)$$

在最后的积分中, 已令 $s \rightarrow \infty$, 并作了变数变换 $(z - z_1 = z')$ 和利用了下面的积分¹⁾:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(zh)}{(a^2 + z^2)^{q+1/2}} dz = \pi^{1/2} \left[\Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1} \left(\frac{h}{2a} \right)^q K_q(ah).$$

同理可得

$$A_\theta = 4I(laa) \sum_q \frac{1}{(ql-1)!} \left(\frac{qlar_1}{2} \right)^{ql-1} K_{ql-1}(qlaa) \cos ql(\theta_1 - \alpha z_1), \quad (q \text{ 为奇数}) \quad (4.8)$$

由式(4.7)和(4.8)可以得 B_r 为

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_\theta = -8Il \sum_q \left[\left(\frac{qla}{2} \right)^{ql} \frac{r^{ql-1}}{(ql-1)!} \sin ql(\theta - \alpha z) \right] \times$$

$$\times [K_{ql}(qlaa) + aaK_{ql-1}(qlaa)], \quad (4.9)$$

利用函数 K_{ql} 的微分关系式^[4], 上式改写为

$$B_r = 8Il^2 a^2 \sum_q \frac{q}{2} K'_{ql} \frac{1}{(ql-1)!} \left(\frac{qlar}{2} \right)^{ql-1} \sin ql(\theta - \alpha z), \quad (4.10)$$

式(4.10)与标势方法求得的磁场相一致。当导线有限长时, 在矢势的积分中仅以

$$\int_{-(s-z_1)}^{s+z_1} \frac{\cos(laz)}{[a^2 + z^2]^{ql+1/2}} dz \quad (4.11)$$

代替

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(laz)}{(a^2 + z^2)^{ql+1/2}} dz.$$

式(4.11)进行变数变换后 $(z = az_1)$, 得

$$\frac{1}{a^{2ql}} \int_{-(s-z_1)/a}^{(s+z_1)/a} \frac{\cos laaz}{[1 + z^2]^{ql+1/2}} dz. \quad (4.12)$$

式(4.11)或(4.12)都没有解析表示式, 但从被积函数的性质看出, 在 $l \geq 2$ 时, 式(4.12)的积分值主要贡献是 z 在 $[-1, 1]$ 之间, 因此, 当不考虑圆柱两端附近的区域 (即 $\frac{s+z_1}{a} > 1, \frac{s-z_1}{a} > 1$) 时, 积分值几乎与上限积到无限远时一样, 并且几乎与 z_1 无关。

因而, 除圆柱两端数量级为 a 的距离内, 磁场 B_r 可以仍由式(4.10)来描写, 即为螺旋对称

1) 查积分表: Bierens de Haan, Nouvelles Tables d'integrales définies; Layden (1867) 或文献[4].

磁场, 当考虑在 $\left(\frac{r}{a}\right)$ 不小的区域内的磁场时, 我们再利用标势 ϕ 来求磁场, 此时, 由

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (4.13)$$

和给定边值

$$\begin{aligned} B_r \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow 0} &= 8I l^2 \alpha^2 a \sum K'_{ql}(qlaa) \frac{q}{2} \times \\ &\times \frac{1}{(ql-1)!} \left(\frac{qlar}{2}\right)^{ql-1} \sin ql(\theta - \alpha z) \end{aligned} \quad (4.14)$$

来决定标势, 这样, 可以重新得到(除圆柱两端数量级为 a 的距离外)如式(3.14), (3.15)的标势和磁场.

五、结 束 语

由以上计算, 我们得到了螺旋对称磁场和波紋磁场的普遍解, 并且借式(2.34—2.43)和式(3.17—3.22)把求磁场的問題仅归结为计算电流的福氏系数, 这些磁场公式无疑在考虑这种类型的磁场来约束等离子体时是有用的. 这里可以指出一点, 虽然当圆柱体弯成环形时, 磁场公式需要修正, 但修正项为 a/R (R 为环的大半径)数量级. 一般 a/R 是个小量, 同时, 由于用于克服环状漂移所引起的困难的螺旋对称磁场和波紋磁场要远比约束主磁场小, 因而, 在精确到一级近似时, 还可以不考虑其修正项.

最后, 借此机会对王承书先生和李正武先生的关心和指导表示感谢.

附 录

(I) 计算 $S_{\gamma, m} = \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \cos^{\gamma} m \Theta_n$, 其中, m 为整数, $\Theta_n = \left(\theta - \theta_1 + \frac{\pi}{l} n\right)$.

$$\begin{aligned} S_{\gamma, m} &= \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \cos^{\gamma} \Theta_n = \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} (e^{im\Theta_n} + e^{-im\Theta_n})^{\gamma} = \\ &= \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{\gamma!}{j!(\gamma-j)!} e^{i(\gamma-2j)m\Theta_n} = \\ &= \sum_{j=0}^{\gamma} \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} \frac{\gamma!}{j!(\gamma-j)!} e^{i(\gamma-2j)m(\theta-\theta_1)} \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n e^{i(\gamma-2j)m n \pi / l}, \end{aligned} \quad (I-1)$$

利用

$$\sum_{n=0}^{2l-1} a^n = \frac{(1-a^{2l})}{1-a}, \quad (I-2)$$

于是,

$$S_{\gamma, m} = \sum_{j=0}^{\gamma} \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} \frac{\gamma!}{j!(\gamma-j)!} e^{i(\gamma-2j)m(\theta-\theta_1)} \times \frac{1 - e^{i2m(\gamma-2j)\pi}}{1 + e^{i(\gamma-2j)m\pi/l}}, \quad (I-3)$$

因为 $e^{i2m(\gamma-2j)\pi} = 1$, 上式分子总为零, 因而, 除 $(\gamma-2j)m = ql$ (q 为奇数) 外, 分母不为零, 则 $S_{\gamma, m} = 0$, 当 $(\gamma-2j)m = ql$ 时, 分母也为零, 即成不定式, 确定不定式后, 得

$$S_{\gamma, m} = 2l \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{\gamma!}{j!(\gamma-j)!} e^{i(\gamma-2j)m(\theta-\theta_1)} \cdot \delta_{(\gamma-2j)m, ql}, \quad (I-4)$$

令 $m = 1$, 便是式(4.5):

$$S_\gamma = 2l \left(\frac{1}{2}\right)^\gamma \sum_{j=0}^{\gamma} \frac{\gamma!}{j!(\gamma-j)!} e^{i(\gamma-2j)(\theta-\theta_1)} \delta_{(\gamma-2j),ql}, \quad (\text{I-5})$$

令 $\gamma = 1$, 得

$$S_m = \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \cos m\theta_n = 2l \cos(\theta - \theta_1) \delta_{m,ql}, \quad (\text{I-6})$$

同理还可给出:

$$\sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \sin m\theta_n = 2l \sin(\theta - \theta_1) \delta_{m,ql}, \quad (q \text{ 为奇数}) \quad (\text{I-7})$$

(II) 电流的福氏分析

(i) 线电流分布时, $j^* = I \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \delta(H_u u; H_u u_n)$, 其中 $u_n = \left(\frac{n\pi}{l} + \pi/2l\right)$ 为导线

所在的位置. 电流的福氏分量为

$$j_{2m}^* = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j^* \sin mudu = \frac{I}{\pi H_u} \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \sin mu_n = \frac{2lI}{\pi H_u} \sin q \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (q \text{ 为奇数}) \quad (\text{II-1})$$

其中利用了(I-7). 同样,得

$$j_{1m}^* = \frac{2lI}{\pi H_u} \cos q \cdot \frac{\pi}{2} = 0 \quad (\text{II-2})$$

(ii) 导线电流宽度为 τ 时,

$$\begin{aligned} j_{2m}^* &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} j^* \sin mudu = \frac{I}{\pi H_u} \sum_{n=0}^{2l-1} (-1)^n \int_{u_n - \frac{\kappa\pi}{2l}}^{u_n + \frac{\kappa\pi}{2l}} \sin mudu = \\ &= \frac{2lI}{\pi H_u} \cdot \left(\frac{2}{\kappa\pi q} \sin \frac{\kappa\pi}{2} q \right) \cdot \sin \frac{q}{2} \pi. \end{aligned} \quad (\text{II-3})$$

其中利用了式(I-7)和 $\tau = H_u \frac{\kappa\pi}{l}$, 同样可得

$$j_{1m}^* = \frac{2lI}{\pi H_u} \left(\frac{2}{q\kappa\pi} \sin \frac{\kappa\pi}{2} q \right) \cos \frac{q}{2} \pi = 0. \quad (\text{II-4})$$

参 考 文 献

- [1] 布德凯尔 Г. И., 等离子体物理学与受控热核反应的问题(第三卷), 1 (科学出版社, 1962).
- [2] Spitzer, L., Proc. 2nd U. N. Conf. (Geneva), Vol. 32, (1958), 171.
- [3] 菲尔索夫 О. Б., 等离子体物理学与受控热核反应的问题(第三卷), 323 (科学出版社, 1962); 和 Berkowitz, J. et. al., Proc. 2nd U. N. Conf. (Geneva), Vol. 31, (1958), 171.
- [4] 列别捷夫 Н. Н., 特殊函数及其应用(高等教育出版社, 1958) 或 E. Whittaker and G. Watson, Modern Analysis.
- [5] 伊凡宁柯 Л. Л. 和索科洛夫 А. А., 经典场论(科学出版社, 1958).
- [6] Spitzer, L., U.S.A. A.E.C. NYO-7899.

К РАСЧЕТУ ВИНТОВОГО СИММЕТРИЧНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Гу Юн-Нянь

Резюме

В работе получено с помощью скалярного потенциала общее выражение для магнитного поля, созданного расположенными на бесконечной цилиндрической поверхности винтовыми токами. Выведены и формулы поля для проводов, равномерно и симметрично распределенных по цилиндрической поверхности, также—для проводов с конечной длиной методом векторного потенциала. Полученные результаты сведены к гофрированному магнитному полю, если винтовой шаг приближен к нулю.