

关于求各向异性介质中电磁场的 格林张量函数的一个方法*

顧 福 年
(江 西 大 学)

提 要

本文提出一个方法,来推求在(3)式中所定义的、在全空间中的格林张量函数。它有时亦称为对应微分方程的基本解。这个方法是富氏变换为基础。由于问题的复杂性,我们不得不作某些近似。首先,把各向异性介质分为两类,一类是磁迴旋介质,另一类是电迴旋介质。对于磁迴旋介质,如铁氧体,取 $\vec{\mu}$ 为张量而 ϵ 为标量。而对电迴旋介质,如等离子体,取 ϵ 为张量而 μ 为标量。其次,由于矩阵 $\vec{\mu}_p$ 非常小(在(15)式中定义),我们可以把解展为 μ_p 的幂级数,并计算出一级近似。具体结果在式(23)、(25)、(28)、(32)和(33)中表示。最后对 Γ 函数的物理意义和它的渐近展开式的有效范围作了讨论。

在现代科学技术中应用各向异性介质的范围逐渐扩大,如铁氧体在无线微波技术中已经广泛地应用,而等离子体的研究范围正在不断发展中,由于上面这些各向异性介质的介电系数和导磁率不是一个标量,而是一个张量,就大大地增加了问题的复杂性。在许多关于这方面的论文中都引入了不同的近似方法来简化它,以便得到结果。

关于波动现象的基本理论的研究,格林函数是起着首要的作用。本文就是想在某些条件下,用数学方法来近似地研究格林函数的某些性质。希望能够在這個基础上逐步地来建立一些有关各向异性介质的理论探讨。

关于格林函数,通常有两个不同的理解,第一是指在无限区域中的格林函数,人们要求它在无限远处满足索末菲放射条件。有时这个格林函数亦称为对应微分方程的一个基本解。第二是要求在某一有界曲面上电磁场要满足一定的边值条件。第一种情况在某些天线和电磁波传播中常用到,而后一种情况在波导管和谐振腔中常用到,而在一些研究中,当研究第二种格林函数时,要以第一种格林函数为基础。下面就专门注意求无限空间中第一种格林函数。

我们知道在某一固定频率下(不考虑色散性质)可以把麦克斯韦方程写成下面的形式^[1]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \vec{\epsilon}^{-1} \nabla \times \\ \vec{\mu}^{-1} \nabla \times & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ i\mathbf{H} \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ i\mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\vec{\epsilon}^{-1} \mathbf{J} \\ -\vec{\mu}^{-1} \mathbf{J}' \end{pmatrix}, \quad (1)$$

* 1962年3月26日收到。

这里 $\mathbf{0}$ 是三行三列元素均为 0 的矩阵, 而微分算符矩阵 ∇_x 在直角坐标系中是

$$\nabla_x \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

所谓在无限空间中的格林张量函数 Γ 是一个六行六列的矩阵满足下面的方程

$$\begin{bmatrix} -\omega I_3 & \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1} \nabla_x \\ \overleftrightarrow{\mu}^{-1} \nabla_x & -\omega I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) I_6, \quad (3)$$

这里 Γ_{11} 、 Γ_{12} 、 Γ_{21} 、 Γ_{22} 都是三行三列的矩阵, 而

$$\Gamma \equiv \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix},$$

I_k 是 k 行 k 列的单位矩阵(只有对角线元素为 1, 其他元素都是零). $\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ 是在 $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ 有奇点的 Delta 函数. Γ 中各项在无限远处满足索末菲放射条件:

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right).$$

如果我们求出 Γ 矩阵, 则由电流密度 $\mathbf{J}$ 和磁流密度 $\mathbf{J}'$ 所产生的电磁场可以这样来表示:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ i\mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \begin{pmatrix} i\overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \\ -\overleftrightarrow{\mu}^{-1}\mathbf{J}'(\mathbf{r}_0) \end{pmatrix} d\nu_{r_0}. \quad (4)$$

现在我们要推导由 (3) 式所定义的 Γ_{11} 、 Γ_{12} 、 Γ_{21} 、 Γ_{22} 的表达式, 我们先求 Γ_{11} 和 Γ_{21} , 有下列方程:

$$\begin{aligned} -\omega \Gamma_{11} + \overleftrightarrow{\varepsilon}^{-1} \nabla_x \Gamma_{21} &= I_3 \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \\ -\omega \Gamma_{21} + \overleftrightarrow{\mu}^{-1} \nabla_x \Gamma_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

I_3 为三行三列的单位矩阵. 为了解决上面的方程, 我们利用富理变换的方法, 即

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f)(s_1, s_2, s_3) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-2\pi i(x s_1 + y s_2 + z s_3)} dx dy dz = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r}) e^{-2\pi i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})} d\nu_r, \end{aligned} \quad (6)$$

这里

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z, \quad \mathbf{s} = \mathbf{i}s_1 + \mathbf{j}s_2 + \mathbf{k}s_3,$$

以后又定

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2,$$

而逆富理变换是

$$(\mathcal{F}^{-1}\phi)(x, y, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{s}) e^{2\pi i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{s})} d\nu_s. \quad (7)$$

設 $P(D)$ 是微分算符矩陣, 即

$$P(D) = \begin{bmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \cdots & P_{1n}(D) \\ P_{21}(D) & P_{22}(D) & & \\ \vdots & & & \\ P_{n1}(D) & \cdots & \cdots & P_{nn}(D) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

这里

$$P_{ij}(D) = \sum_{i_1, i_2, i_3} a_{i_1, i_2, i_3}^{ij} \frac{\partial^{i_1+i_2+i_3}}{\partial x^{i_1} \partial y^{i_2} \partial z^{i_3}}, \quad (9)$$

現在我們假定上面的系数 a_{i_1, i_2, i_3}^{ij} 都是常数, 也就是說对应的介质是均匀的。一般說来, 如果介质不均匀, 应用富理变换就有困难, 只有少数情况例如介质的电磁常数随坐标轴作周期性变化, 或者是坐标轴的代数幂等情况才可以用这种方法。如介质不連續就要分区域来研究。現在有

$$\mathcal{F}[P(D)f(\mathbf{r})](\mathbf{s}) = P(2\pi i \mathbf{s})(\mathcal{F}f)(\mathbf{s}),$$

这里 $P(2\pi i \mathbf{s})$ 也是一个矩陣, 其元素 $P_{ij}(2\pi i \mathbf{s})$ 对应于(9)式有

$$P_{ij}(2\pi i \mathbf{s}) = \sum_{i_1, i_2, i_3} a_{i_1, i_2, i_3}^{ij} (2\pi i s_1)^{i_1} (2\pi i s_2)^{i_2} (2\pi i s_3)^{i_3}.$$

有时为书写方便起見, 我們記

$$\mathcal{F}f \equiv \tilde{f},$$

这里 f 是矢量函数。而对于 f , 一般說来有一定要求, 譬如平方可积等条件。但是在近年来, 由于广义函数的应用, 使得对 f 的条件大大放宽, 可以在某些扩大的意义下仍有其富理变换^[2]。对于算符 ∇x 有对应的富理变换:

$$\tilde{\nabla x} = \begin{bmatrix} 0 & -2\pi i s_3 & 2\pi i s_2 \\ 2\pi i s_3 & 0 & -2\pi i s_1 \\ -2\pi i s_2 & 2\pi i s_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

对(5)式两边作富理变换, 得到

$$\begin{aligned} -\omega \tilde{\Gamma}_{11} + \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}^{-1} \tilde{\nabla x} \tilde{\Gamma}_{21} &= I_3 e^{-2\pi i (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})}, \\ -\omega \tilde{\Gamma}_{21} + \overset{\leftrightarrow}{\mu}^{-1} \tilde{\nabla x} \tilde{\Gamma}_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

这是一个矩陣代数方程, 可以从这里把 $\tilde{\Gamma}_{11}$ 和 $\tilde{\Gamma}_{21}$ 解出, 再求逆富理变换, 得出解来。但是一般說来这个解很复杂, 下面我們要作一些近似。

在多晶体的鉄氧体中, ϵ 是标量, 而张量 $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ 当有沿 z 轴的恆磁化場时,

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & i\mu_a & 0 \\ -\mu_a & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{11} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

而且一般說来, 除了鉄磁体外, μ_a 和 $\mu_{11} - \mu$ 非常小^[3]; 而对于电子等离子体和人工电介质, 則情况相反, 沿 z 轴的恆磁場所引起的介电系数张量

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & i\epsilon_a & 0 \\ -i\epsilon_a & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

而导磁率 μ 是标量¹⁾, 同样 ϵ_a 和 $\epsilon - \epsilon_{11}$ 很小.

现在我们就先研究铁氧体的情况. 对(11)式的第一式乘上矩阵 $\tilde{\nabla}_x$, 得到

$$-\omega \tilde{\nabla}_x \tilde{I}_{11} + \epsilon^{-1} \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_x \tilde{I}_{21} = \tilde{\nabla}_x I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})},$$

用(11)式的第二式代入得到

$$\epsilon^{-1} [A - \omega^2 \epsilon \mu_p] \tilde{I}_{21} = \tilde{\nabla}_x I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})}, \quad (14)$$

这里 $A = \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_x - \omega^2 \epsilon \mu$ 是普通的矢量亥姆霍兹方程算符, 而

$$\mu_p = \mu - \mu I_3 = \begin{bmatrix} 0 & i\mu_a & 0 \\ -i\mu_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{11} - \mu \end{bmatrix} \quad (15)$$

是一个元素为 0 或者数值很小的矩阵. 这样

$$\tilde{I}_{21} = \epsilon [I_3 - A^{-1} \omega^2 \epsilon \mu_p]^{-1} A^{-1} \tilde{\nabla}_x I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})}. \quad (16)$$

因为 μ_p 很小, 这样当 $A^{-1} \omega^2 \epsilon \mu_p$ 的各元素都很小时, 我们可以把 $[I_3 - A^{-1} \omega^2 \epsilon \mu_p]^{-1}$ 展为级数

$$[I_3 - A^{-1} \omega^2 \epsilon \mu_p]^{-1} = I_3 + \omega^2 \epsilon A^{-1} \mu_p + (\omega^2 \epsilon A^{-1} \mu_p)^2 + \dots, \quad (17)$$

这样

$$\tilde{I}_{21} = \epsilon [I_3 + \omega^2 \epsilon A^{-1} \mu_p + \omega^4 \epsilon^2 A^{-1} \mu_p A^{-1} \mu_p + \dots] A^{-1} \tilde{\nabla}_x I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})}. \quad (18)$$

下面我们计算上式各项的值,

$$\begin{aligned} A &= \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_x - \omega^2 \epsilon \mu = \tilde{\nabla}_x \tilde{\nabla}_x - k^2 = \\ &= -4\pi^2 \begin{bmatrix} -s_3^2 - s_2^2 + \frac{k^2}{4\pi^2} & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & -s_1^2 - s_3^2 + \frac{k^2}{4\pi^2} & s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & s_2 s_3 & -s_1^2 - s_2^2 + \frac{k^2}{4\pi^2} \end{bmatrix}, \quad (19) \\ |A| &= -4\pi^2 \left[s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} \right] \frac{k^2}{4\pi^2} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{k^2 \left[s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} \right]} \begin{bmatrix} s_1^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} & s_1 s_2 & s_1 s_3 \\ s_1 s_2 & s_2^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} & s_2 s_3 \\ s_1 s_3 & s_2 s_3 & s_3^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

这样(18)式中的第一项是

$$A^{-1} \tilde{\nabla}_x = \frac{1}{4\pi^2 \left(s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2} \right)} \begin{bmatrix} 0 & -2\pi i s_3 & 2\pi i s_2 \\ 2\pi i s_3 & 0 & -2\pi i s_1 \\ -2\pi i s_2 & 2\pi i s_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

1) 当然不考虑在等离子体中的碰撞损失^[4].

对上式作逆富理变换, 先看

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}}\right](\mathbf{r}) &= \int_0^\infty ds \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \frac{1}{s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}} e^{i2\pi s r \cos\theta \sin\theta s^2} = \\ &= \frac{1}{r} \int_0^\infty \frac{s \sin 2\pi r s}{s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}} ds,\end{aligned}$$

现在假定 $\alpha > \text{Im } k > 0$; $\alpha \ll 1$ 即介质有很小的损耗, 用复变函数求留数的方法可以求得

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}}\right) = \pi \frac{e^{ikr}}{r}.$$

所以 Γ_{21} 的第一项是

$$\mathbf{s} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \frac{e^{ikd}}{4\pi d}, \quad (23)$$

这里

$$d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

再研究(18)式的第二项, 得到

$$\begin{aligned}A^{-1}\mu_p A^{-1}\nabla x &= \frac{-2\pi i}{4\pi^2 k^2 \left[s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right]} \begin{bmatrix} i\mu_a s_3 \left(s_1^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right) - (\mu_{11} - \mu) s_1 s_2 s_3 \\ i\mu_a s_1 s_2 s_3 - (\mu_{11} - \mu) s_2^2 s_3 \\ i\mu_a s_1 s_3^2 - (\mu_{11} - \mu) s_2 \left(s_3^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right) \\ i\mu_a s_1 s_2 s_3 + (\mu_{11} - \mu) s_1^2 s_3 - i\mu_a s_1 s_2^2 - i\mu_a s_1 \left(s_1^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right) \\ i\mu_a s_3 \left(s_2^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right) + (\mu_{11} - \mu) s_1 s_2 s_3 - i\mu_a s_2 \left(s_2^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right) - i\mu_a s_1^2 s_2 \\ i\mu_a s_2 s_3^2 + (\mu_{11} - \mu) s_1 \left(s_3^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right) - i\mu_a s_2^2 s_3 - i\mu_a s_1^2 s_3 \end{bmatrix}. \quad (24)\end{aligned}$$

因为

$$\mathcal{F}^{-1} \frac{1}{\left(s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}\right)^2} = \frac{2\pi i}{k} e^{ikr}$$

1) 这里假定 $\mathbf{r}$ 的方向是 z 轴, 其实 $\mathbf{r}$ 在任意方向都和上述结果相符合, 只要注意到平面波展开式

$$\begin{aligned}e^{ikR \cos \alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kR) \left[P_n(\cos \alpha) P_n(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \alpha) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \beta) \right].\end{aligned}$$

所以得到 Γ_{21} 的第二項為

$$\frac{2\pi i \omega^2 \varepsilon^2}{(4\pi^2)^2 k^3} \left[\begin{aligned} & i\mu_a \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} + k^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) - (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \\ & i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} - (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z} \\ & i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} - (\mu_{11} - \mu) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ & i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} \\ & i\mu_a \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z} + k^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} \\ & i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} + (\mu_{11} - \mu) \left(\frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ & - i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - i\mu_a \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \\ & - i\mu_a \left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} + k^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) - i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ & - i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z} - i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} \end{aligned} \right] e^{ikd}. \quad (25)$$

對於 Γ_{21} 我們就只求到一級近似，對於 $\tilde{\Gamma}_{11}$ 我們可以由(11)式的上面的方程得到

$$\tilde{\Gamma}_{11} = \frac{1}{\omega} [\varepsilon^{-1} \tilde{\nabla}_x \tilde{\Gamma}_{21} - I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})}],$$

而

$$\varepsilon^{-1} \tilde{\nabla}_x \tilde{\Gamma}_{21} = \tilde{\nabla}_x A^{-1} \tilde{\nabla}_x I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})} + \omega^2 \varepsilon \tilde{\nabla}_x A^{-1} \overset{\leftrightarrow}{\mu}_p A + \tilde{\nabla}_x e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})} + \dots, \quad (27)$$

所以

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{\omega} \left[\begin{aligned} & \left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{ikd}}{4\pi d} - \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} \\ & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} & \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{ikd}}{4\pi d} - \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \\ & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} \\ & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} & \\ & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} & \\ & \left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{e^{ikd}}{4\pi d} - \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) & \\ & i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & - i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ & (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} & i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ & - i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & 0 \end{aligned} \right] - \frac{2\pi i \omega \varepsilon}{(4\pi^2)^2 k} \left[\begin{aligned} & (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ & - i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial z^2} - (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ & i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \\ & \end{aligned} \right] e^{ikd} + \dots. \quad (28)$$

在上式中的第一項可以利用下面大家熟知的方程来化簡

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \frac{e^{ikd}}{4\pi d} = -\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

所以(28)式的第一項可以改写为

$$\frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right) & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \end{bmatrix} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} \quad (28_1)$$

再回到(3)式可以得到关于 Γ_{12} 和 Γ_{22} 的方程如下:

$$\begin{aligned} -\omega \Gamma_{22} + \mu^{-1} \nabla_x \Gamma_{12} &= I_3 \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \\ -\omega \Gamma_{12} + \epsilon^{-1} \nabla_x \Gamma_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

对上式作富理变换得到

$$\begin{aligned} -\omega \tilde{\Gamma}_{22} + \mu^{-1} \tilde{\nabla}_x \tilde{\Gamma}_{12} &= I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})}, \\ -\omega \tilde{\Gamma}_{12} + \epsilon^{-1} \tilde{\nabla}_x \tilde{\Gamma}_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

我們有展开式

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{22} &= [I_3 + \omega^2 \epsilon A^{-1} \mu_p + \omega^4 \epsilon^2 A^{-1} \mu_p A^{-1} \mu_p + \dots] [\omega \epsilon \mu A^{-1} + \omega \epsilon A^{-1} \mu_p] I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})} = \\ &= \omega \epsilon \mu A^{-1} I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})} + \omega \epsilon A^{-1} \mu_p I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})} + \\ &\quad + \omega^3 \epsilon^2 \mu A^{-1} \mu_p A^{-1} I_3 e^{-2\pi i(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s})} + \dots, \end{aligned}$$

經過計算得到

$$\begin{aligned} \Gamma_{22} &= \frac{\omega \epsilon \mu}{k^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \end{bmatrix} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} + \\ &\quad + \frac{\omega \epsilon}{k^2} \begin{bmatrix} -i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & i\mu_a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right) & (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \\ -i\mu_a \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) & i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \\ -i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & i\mu_a \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & (\mu_{11} - \mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \end{bmatrix} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} + \\ &\quad + \frac{2\pi i \omega^3 \epsilon^2 \mu}{16\pi^4 k^5} \begin{bmatrix} (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} \\ -i\mu_a k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2\right) + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y \partial z^2} \\ -i\mu_a k^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \end{bmatrix} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i\mu_a k^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y \partial z^2} \\
& \quad (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \\
& i\mu_a k^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \\
& i\mu_a k^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \\
& \quad - i\mu_a k^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \\
& \quad (\mu_{11} - \mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right)^2 \left. \right] e^{ikd} + \dots, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12} = & \mu \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} + \\
& + \begin{bmatrix} i\mu_a \frac{\partial}{\partial z} & 0 & (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\mu_a \frac{\partial}{\partial z} & -(\mu_{11} - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \\ -i\mu_a \frac{\partial}{\partial x} & -i\mu_a \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \frac{e^{ikd}}{4\pi d} - \\
& - \frac{2\pi i \omega^2 \epsilon \mu}{16\pi^4 k^3} \begin{bmatrix} -i\mu_a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) - (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}, \\ -i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}, \\ i\mu_a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right), \\ -i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} - (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial z}, \\ -i\mu_a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}, \\ i\mu_a \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k^2 \right) \\ -i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial x \partial z^2} - (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \\ -i\mu_a \frac{\partial^3}{\partial y \partial z^2} + (\mu_{11} - \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \\ i\mu_a \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \end{bmatrix} e^{ikd} + \dots, \quad (33)
\end{aligned}$$

这样对铁氧体中电磁场的格林张量函数已经全部求得,当介质为各向同性情况时,可以只取 Γ_{ik} 的第一项,由(23)、(28)、(32)和(33)式,我们可以把它们写成下面的形式

$$\left. \begin{aligned}
 E^0(\mathbf{r}) &= \iiint [\Gamma_{11}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot i\epsilon^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) + \Gamma_{12}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot -\mu^{-1}\mathbf{J}'(\mathbf{r}_0)] d\nu_{r_0} \\
 &= \iiint \left\{ i \frac{1}{\omega\epsilon} \nabla_r(\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_r\phi) + i\omega\mu\phi\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) - \nabla_r\phi x\mathbf{J}'(\mathbf{r}_0) \right\} d\nu_{r_0}, \\
 iH^0(\mathbf{r}) &= \iiint [\Gamma_{21}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot i\epsilon^{-1}\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) + \Gamma_{22}^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot -\mu^{-1}\mathbf{J}'(\mathbf{r}_0)] d\nu_{r_0} = \\
 &= \iiint \left\{ i\nabla_r\phi x\mathbf{J}(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{\omega\mu} \nabla_r[\mathbf{J}'(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla_r\phi] - \omega\epsilon\phi\mathbf{J}'(\mathbf{r}_0) \right\} d\nu_{r_0}.
 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

上面各量均标以 $\circ$ 号,表示是各向同性的情况,而

$$\phi = \frac{e^{ikd}}{4\pi d} \quad d = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

在作上述运算时,注意 $\frac{\partial}{\partial x} f(d) = -\frac{\partial}{\partial x_0} f(d)$ 等。(34)式及其詳細討論可以在 C. Müller 等的著作中找到^[5]。

如果所研究的是理想偶极子;若为位于 $\mathbf{r}_0$ 点的电偶极子,则电流密度 $\mathbf{J}$ 有下面的关系式:

$$i\omega\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$$

$\mathbf{p}$ 是这偶极子的电偶极矩。如果是位于 $\mathbf{r}_0$ 点的磁偶极子(环形天线),则磁流密度 $\mathbf{J}'$ 有关系式:

$$\mathbf{J}' = -\mathbf{m}\delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0),$$

$\mathbf{m}$ 是对应的磁偶极矩。所以 Γ_{ij} 除了可能相异一个系数外,是分别代表了电偶极子 ($i=1$) 或磁偶极子 ($i=2$) 的电场 ($j=1$) 或磁场 ($j=2$) 的分布。

从(25)、(28)、(32)、(33)中对应于微小数量 $\mu_a, \mu_{11} - \mu$ 的各项来看,在 Γ_{22} 和 Γ_{12} 中各有 $\frac{e^{ikd}}{4\pi d}$ 及其微商一项,而 Γ_{21} 和 Γ_{11} 中没有这种形式的项。但是 Γ_{ij} 都有 e^{ikd} 及其微商之项,这些项都是由于各向异性而引起的。在对 e^{ikd} 作微商后,出现形如 $\cos \alpha_i e^{ikd}$, $\frac{\cos \alpha_i}{d} e^{ikd}$, $\frac{\cos \alpha_i}{d^2} e^{ikd} \dots$ 等各项(这里 $\cos \alpha_i$ 是矢量 $\mathbf{r}\mathbf{r}_0$ 的方向余弦)。而如果再求关于 μ_p 的高次项,在 $\tilde{\Gamma}_{ik}$ 中就要出现 $\frac{1}{s^2 - \frac{k^2}{4\pi^2}}$ 的高次幂各项,其逆变换是 $d^n e^{ikd}$ 的形式。所以

当距离比较大时,级数可能并不收敛。张量函数 Γ 作为 μ_p 的渐近式,项数多了,可能误差反而大了,所以这些表达式只能在 d 并不太大的情况下才适用。

上面所求的各式是对于铁氧体的情况,如果考虑没有碰撞损失的各向异性的等离子体,则可按照下面的对应关系来得到它的格林张量函数 Γ :

铁氧体 $\longrightarrow$ 等离子体

$$\Gamma_{12} \Longleftrightarrow \Gamma_{21},$$

$$\Gamma_{11} \Longleftrightarrow \Gamma_{22},$$

$$\overset{\longleftrightarrow}{\mu} \longrightarrow \overset{\longleftrightarrow}{\epsilon},$$

$$\mu_{11} - \mu \longrightarrow \epsilon_{11} - \epsilon,$$

$$\mu_a \longrightarrow \epsilon_a,$$

$$\epsilon \longrightarrow \mu,$$

得到的是等离子体 Γ 函数关于 ϵ_p 的渐近表示式。

因为这些公式的适用范围是近距离的,所以在无限远的情况不好考虑,对于索末菲条件,我们可以从所得到的解中,只有一种向外发射的电磁波这点上来肯定它。

最后,作者对吕保维教授对本文所作的帮助表示感谢。

参 考 文 献

- [1] 顧福年,电磁理論中算符的一些性質,物理学报, 18 (1962), 629.
- [2] Гельфанд И. М. и Шиллов Г. Е., Обобщенные функции и действия над НИМИ, Москва (1958).
- [3] Гуревич А. Г., Ферриты на сверхвысоких частотах § 13 (Москва) 1960.
- [4] Силян В. И. и Рахадзе А. А., Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред Гл. III (Москва) 1961.
- [5] Müller C. und Niemeyer H.: Greensche Tensoren und asymptotische Gesetze der elektromagnetischen Hohlraumsschwingungen, *Archive der Rational Mechanics and Analysis*, 7, No. 4 (1961), 305—348.

ABOUT ONE METHOD OF FINDING THE GREEN TENSOR FUNCTIONS OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN ANISOTROPIC MEDIA

KU FU-NIEN
(Kiang Hsi University)

ABSTRACT

In this paper, we suggest one method of finding the Green tensor functions in whole space, which are defined in formula (3). Some times it is also called the elementary solution of the corresponding differential equation. All this method is based on Fourier transform. Owing to complexity, we are obliged to make some simplifications. Magneto-gyrotropic media and electric-gyrotropic media are considered separately. For magneto-gyrotropic medium, such as ferrite, μ is a tensor while ϵ remains scalar. Conversely, for electric-gyrotropic medium, such as plasma, ϵ is tensor and μ remains scalar. Taking advantage of the smallness of matrix μ_p (defined in (15)) we make an expansion in power series of μ_p , and carry out the calculations in first order approximation. The concrete results are expressed in formulae (23), (25), (28), (32) and (33). The physical meaning of Γ and the effective region of the asymptotic expansions are discussed.