

軸对称兼平面对称磁場电阻网络模拟机*

忻賢杰 曹家麟 吳才德

摘 要

本文論証了兼有軸对称和平面对称性质的磁場的模拟方法以及有关的电流注入問題。根据上述論証設計并制造了一架模拟机及相应的注入电流和测量电压等附属設備。模拟网络的中心部分为 10×14 单元,在 z 和 r 方向上分別扩展到 24 和 32 单元。在該模拟机上模拟了某些理論上已有准确答案的磁場和綫圈的电感,弄清了不同情况下模拟机可能产生的誤差及其来源。經驗証明模拟机的工作是稳定可靠的,它大大地节省了設計某些复杂磁場形态时所需的时间。

一、前 言

許多工作中(例如磁聚焦透鏡、受控热核反应等等)經常需要知道在一定电流激励下的綫圈的磁場分布情况。如所周知,一个电流圈所产生的磁場的公式中包含有第一类和第二类完全椭圆函数^[1]。这种磁場已由白萊惠特、巴特貝格等列成詳細的表^[2]。利用这些表可以計算一定形状和排列的圓綫圈所产生的磁場。但是实际上用它来計算磁場是非常繁复和費时的。用模型进行模拟亦是費时且昂貴的。

利用橡皮膜和电解槽等模拟方法解拉普拉斯方程是早已知道了的^[3]。1943 年霍根^[4]第一个提出了用电阻网络来模拟場的建議。稍后,特派克^[5](1947)、雷特肖^[6](1948)发表了用来解拉普拉斯和泊松方程的具体模拟网络。以后利勃曼^[7]发展和完善了电阻网络模拟机的理論和方法。

本文論述了模拟兼有軸对称和平面对称磁場的模拟方法,討論了所制成的模拟机及一些研究結果。

二、原 理

电阻网络模拟机的一般理論已由利勃曼^[8]詳細地研究过了。他同时也給出了軸对称磁場的模拟方法。現在为便于討論,特將某些結果简单地重复一下。

如 \mathbf{A} 为矢势,且

$$\psi = rA_\theta, \quad (1)$$

則对軸对称磁場 (z 为对称軸),

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{4\pi}{10} rj, \quad (2)$$

j 为綫圈中电流密度(安/厘米²)。磁場

* 1962 年 6 月 18 日收到。

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ H_r &= -\frac{\partial A_\theta}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3)$$

不难证明,空间中一点 P 的 ψ 值与通过圆面积 S (见图 1) 的磁通 Φ 有下述关系^[1]:

$$\Phi = 2\pi r A_\theta = 2\pi\psi. \quad (4)$$

因之对轴对称磁场, z, r 平面上的等 ψ 线也就是磁力线的轨迹.

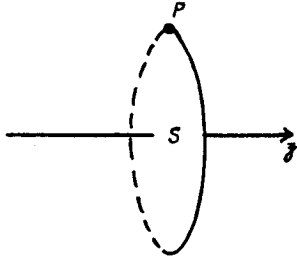


图 1 求 ψ 与 Φ 的关系图

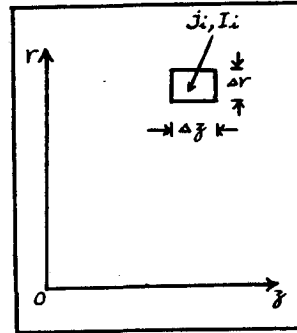


图 2 导电薄层模拟法

考虑一个在 (z, r) 平面内的导电薄层(图 2): 由电流连续原理, 由薄层外部注入到面积元 $\Delta z \Delta r$ 的电流密度 j_i 应为

$$j_i = \nabla \cdot \mathbf{i} = \nabla \cdot (\sigma \mathbf{E}) = -\nabla \cdot (\sigma \nabla V), \quad (5)$$

σ 为薄层的电导率, V 为薄层各点电位.

若设计使 c 为常量)

$$\sigma = c/r, \quad (6)$$

则(5)变为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{j_i}{\sigma} = -\frac{r j_i}{c}. \quad (7)$$

比较(2)与(7)就可以看到, 只要适当的选择注入电流, 我们就可以用电位 V 来模拟 ψ , 且

$$\psi = \frac{4\pi}{10} c \frac{j}{j_i} V = \frac{4\pi c}{10} \cdot \frac{\int_{\Delta r \Delta z} j dr dz}{I_i} V, \quad (8)$$

I_i 为注入到面积元 $\Delta r \Delta z$ 的电流, $\int_{\Delta r \Delta z} j dr dz$ 代表磁场线圈在面积元 $\Delta r \Delta z$ 内的总安匝数.

上述原理构成了用电解槽、导电薄层等连续介质模拟场的基础. 电阻网络模拟方法即是用许多分立的、集众的电阻所组成的网络来代替连续介质, 如图 3(a) 所示.

由图 3(b) 可以求出 R_r 和 R_z :

$$\begin{aligned} R_r &= \int \frac{dr}{\sigma} = \frac{1}{c \Delta z} \cdot \frac{1}{2} (r_j^2 - r_i^2) \\ &= \frac{h_r^2}{h_z^2} \cdot \frac{R_0}{\Delta z_0} \cdot \frac{1}{2} (r_{j0}^2 - r_{i0}^2), \end{aligned} \quad (9)$$

$$R_z = \frac{\Delta z}{\int \sigma dr} = \frac{R_0 \Delta z_0}{\ln(r_{f0}/r_{i0})}. \quad (10)$$

其中

$$R_0 = h_z/c, \quad (11)$$

r_f, r_i 为面积元在 r 方向上的上下限, h_r, h_z 为网络单元所代表的 r, z 方向上的长度, 底标“0”代表无因次的数目, 如 $\Delta z = h_z \Delta z_0, r = h_r r_0$ 等等。很清楚 R_0 的量纲是电阻。若设计使 $h_r = h_z = h$, 则(9)变为

$$R_r = \frac{R_0}{\Delta z_0} \cdot \frac{1}{2} (r_{f0}^2 - r_{i0}^2). \quad (12)$$

现在, 注入到面积元 $\Delta r \Delta z$ 上的电流集众地注到代表该面积元的节点。如令

$$I_i = p \int \Delta r \Delta z j dr dz, \quad (13)$$

则由(8)、(11)、(13), 得

$$\psi = \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{hV}{pR_0}, \quad (14)$$

其中 p 为任意比例常数。

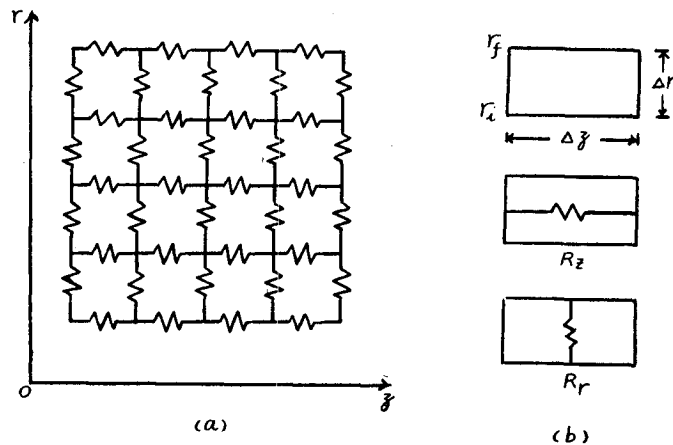
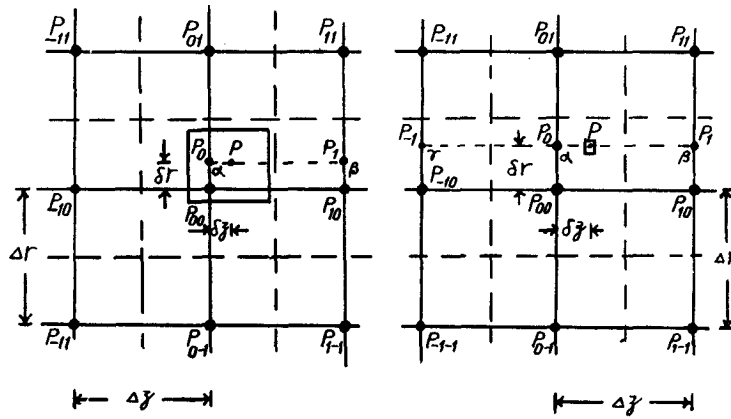


图 3 电阻网络构成法(a)电阻网络(b)电阻的计算方法

以上是模拟的简单理论。不难看出, (13)的集众过程会引起一定误差, 因为它并未反映线圈在面积元中不同位置时磁场会有所不同这一事实。为了补救这一点, 可以根据所要研究的问题的性质适当地选择网络的比例尺度。如这样做不可能, 则可以先求出网络节点(P_{00})所代表的面积元内线圈截面的重心(如图 4(a) P 点), 然后按图 4(a) 所示比例分配到相邻的四个节点中去^[10](物理上意义即为把原来线圈看作为在 $P_{00}, P_{10}, P_{11}, P_{01}$ 点的四个线圈所合成)。在附录中将证明上述两种注入方法实际上代表泰勒级数展开中的零级近似和一级近似。我们将它推广到二级近似的情况, 具体方法见图 4(b), 证明见附录。采取那一级近似, 与所要解决问题的性质和要求的准确度有关。例如在离线圈很远之点, 零级近似也能给出较好的结果。

在很多情况下, 磁场不但为轴对称而且尚为平面对称。在模拟这种场时利用对称性质可以只用一半大小的网络来进行模拟。此时可以区分两种情况: (I) 在对称的两点 P 和



$$\begin{aligned}
 \alpha_{01} &= \left(1 - \frac{\delta z}{\Delta z}\right) \frac{\delta r}{\Delta r}, & \alpha_{11} &= \frac{\delta z}{\Delta z} \cdot \frac{\delta r}{\Delta r} & \alpha_{-11} &= \overline{\gamma_z \beta_r}, & \alpha_{01} &= \overline{\alpha_z \beta_r}, & \alpha_{11} &= \overline{\beta_z \beta_r} \\
 \alpha_{00} &= \left(1 - \frac{\delta z}{\Delta z}\right) \left(1 - \frac{\delta r}{\Delta r}\right), & \alpha_{10} &= \frac{\delta z}{\Delta z} \left(1 - \frac{\delta r}{\Delta r}\right) & \alpha_{-10} &= \overline{\gamma_z \alpha_r}, & \alpha_{00} &= \overline{\alpha_z \alpha_r}, & \alpha_{10} &= \overline{\beta_z \alpha_r} \\
 & & & & \alpha_{-1-1} &= \overline{\gamma_z \gamma_r}, & \alpha_{0-1} &= \overline{\alpha_z \gamma_r}, & \alpha_{1-1} &= \overline{\beta_z \gamma_r} \\
 & & & & \alpha_z &= 1 - \left(\frac{\delta z}{\Delta z}\right)^2, & \alpha_r &= 1 - \left(\frac{\delta r}{\Delta r}\right)^2 \\
 & & & & \beta_z &= \frac{1}{2} \left[\frac{\delta z}{\Delta z} + \left(\frac{\delta z}{\Delta z}\right)^2 \right], & \beta_r &= \frac{1}{2} \left[\frac{\delta r}{\Delta r} + \left(\frac{\delta r}{\Delta r}\right)^2 \right] \\
 & & & & \gamma_z &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\delta z}{\Delta z} - \left(\frac{\delta z}{\Delta z}\right)^2 \right], & \gamma_r &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\delta r}{\Delta r} - \left(\frac{\delta r}{\Delta r}\right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

图 4 电流注入方法。α_{ij} 代表注入电流分配比例。(a)一級近似，P 代表綫圈重心；(b)二級

近似，P 代表綫圈截面元。上面一橫代表对綫圈截面取平均。例如 $\overline{\alpha_z \gamma_r} = \frac{\iint \alpha_z \gamma_r d(\delta z) d(\delta r)}{\iint d(\delta z) d(\delta r)}$ ，积分系对 P₀₀ 点所代表面积内的綫圈截面进行的。

P', H_z(P) = H_z(P'), H_r(P) = -H_r(P') (此时流过对称綫圈的电流方向相同); (II) H_z(P) = -H_z(P'), H_r(P) = H_r(P') (此时通过对称綫圈的电流方向相反)。可以提到, (I)、(II) 两种情况在受控热核反应工作中相当于磁鏡型磁場和会切几何形态磁場。

对(I)的情况可以如此模拟: 令 AB 为对称平面(见图 5), 由对称性质可知

$$\begin{aligned}
 V_{P1} &= V_{P3}, & i_1 &= i_3, \\
 i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + I_i &= 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

即

$$i_3 = -\frac{1}{2} [I_i + (i_2 + i_4)]. \tag{16}$$

若图 5(b) 和 5(a) 网络完全等效, 則必須

$$V_{P'_0} = V_{P0}, \quad V_{P'_3} = V_{P3}, \quad V_{P'_2} = V_{P2}, \quad V_{P'_4} = V_{P4}. \tag{17}$$

因之得

$$R'_3 = R_3, \quad i'_3 = i_3.$$

但由图 5(b) 得

$$i_3 = i'_3 = -[I'_i + (i'_2 + i'_4)]. \tag{18}$$

比較(18)与(15)就可以得到等效条件为:

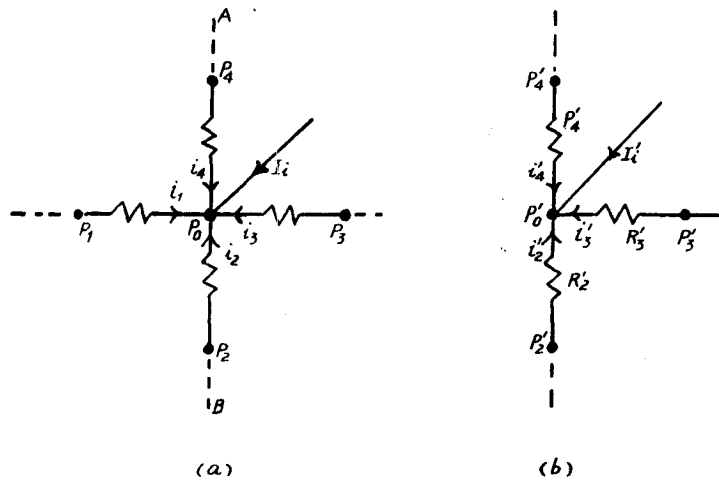


图5 有平面对称性质场的模拟方法：(a)完全的网络；(b)等效网络

$$I'_i = \frac{1}{2} I_i, \quad i'_2 = \frac{1}{2} i_2, \quad i'_4 = \frac{1}{2} i_4,$$

亦即只要令

$$R'_2 = 2R_2, \quad R'_4 = 2R_4, \quad I'_i = \frac{1}{2} I_i, \quad (19)$$

亦即只要使 AB 綫上 R_r 电阻值增大一倍，注入电流减少一半，图 5(a)、(b) 两个网络即可完全等效。

对(II)情况，则按对称条件应有

$$V_{P_1} = -V_{P_3}, \quad i_1 = -i_3,$$

所以

$$V_{P_0} = 0. \quad (20)$$

亦即只要把 AB 綫上所有节点联在一起，即可满足上述条件(因为 $r = 0$ 节点电位为零)。

利用模拟机亦可以容易地测定一定排列綫圈繞組的电感^[10]。由电感定义得

$$L = 10^{-8} \frac{\int N \Phi dN}{I} \text{ 亨}, \quad (21)$$

Φ 为通过綫圈 dN (匝数) 的磁通， N 为匝数， I 为綫圈电流。经过简单换算后可得

$$\begin{aligned} L &\doteq 2\pi \cdot 10^{-8} \sum_m \psi_m N_m / I \\ &= 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{2\pi h}{R_0} \sum_m \frac{N_m^2 V_m}{(I_i)_m} \text{ 亨}, \end{aligned} \quad (22)$$

N_m 为第 m 节点所代表面积内綫圈的匝数(不一定为整数)。不难将公式推广到求綫圈間的互感和电动力的情况。

电阻网络模拟机的误差主要可分三部分：(1)将連續介質用集众的、分立的电阻代替所引起的误差；(2)由于网络的有限綫度所引起的误差；(3)由于电阻容限所引起的误差。其余如测量误差，注入电流不稳定所引起的误差等等，原则上可以避免。网络每个单元所

代表的綫性长度 h 愈小, 則(1)类誤差亦越小。同时誤差尚和所研究的問題有关(和 ψ 的一次和高次空間微商值大小有关)。至于(2)类誤差, 一般地說若研究对象的綫度只有网络綫度的 $1/4$, 則誤差不大。由于电阻容限所引起的誤差常有互相抵消作用, 利勃曼^[7]研究指出, 在电阻容限为 $\pm 1\%$ 时, 測量常可准到 0.1% 以下。

三、电阻网络及其附属设备

根据上面論証的軸对称兼平面对称磁場模拟的理論, 我們制成了一架电阻网络模拟机。网络的中心部分为 10×14 单元(見图 6), 在 z 和 r 方向上分別扩展到 24 和 32 单

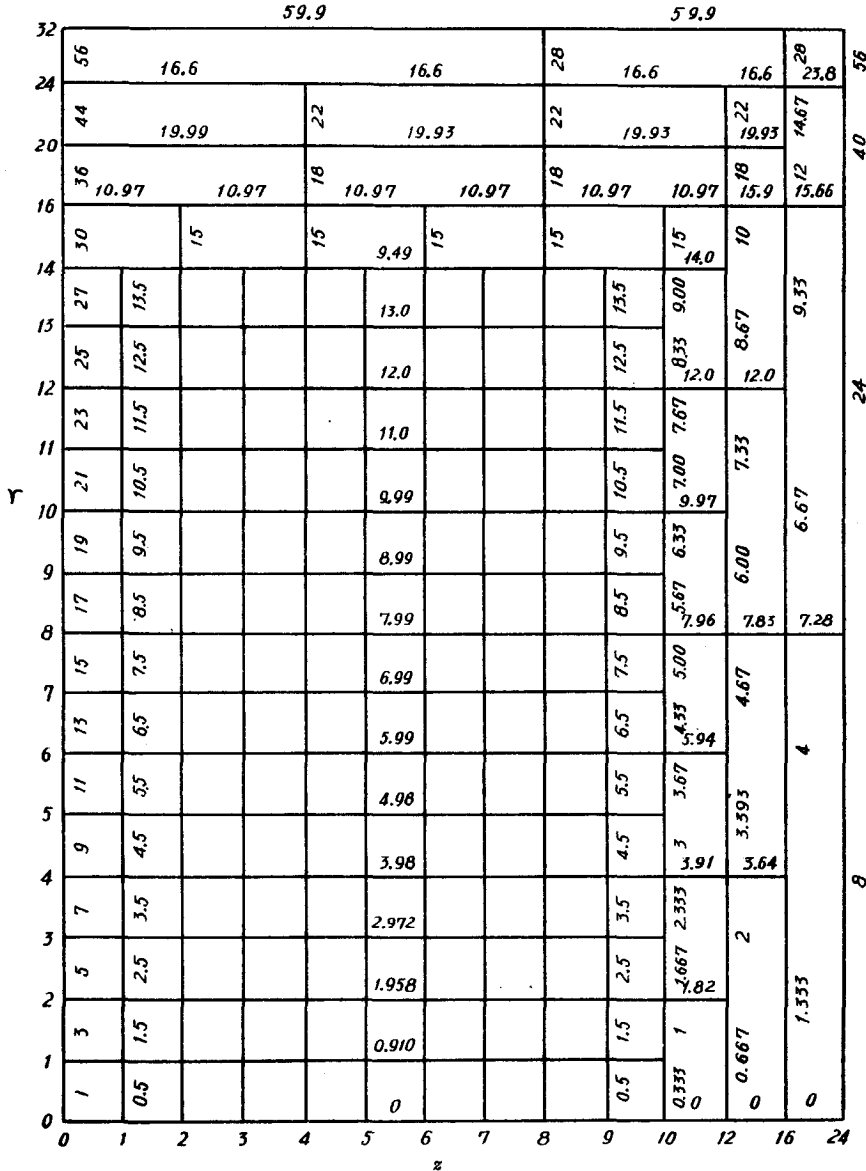


图 6 本工作所用的电阻网络。每二交点之間黑实綫代表一个电阻，单位为 $R_0 = 200$ 欧

元¹⁾。所有电阻(碳膜)都經過挑选,准确到 $\pm 1\%$ 。每个电阻焊在各自的焊片上,然后用螺絲固定在接綫柱上。接綫柱装在胶木板上,电阻处于胶木板背部。注入电流經過香蕉插头接到胶木板正面的接綫柱上。为了尽量避免在焊接过程中电阻发生变值,焊接时比較小心,并用扁口鉗夹紧电阻接綫脚以使热不致传到电阻上。

注入电流应保持不变以保証測量准确度。同时,由于調节某一节点电流时会影响别的节点的电压,从而影响别的节点的注入电流,所以常常要应用反复过程(iterative process)^[8],这样就要耗費較多時間。为了同时解决上述两个問題,应用了常流管电路(图 7)来注入电流。如所周知,这样一个常流管的等效交变电阻为

$$R = (\mu + 1)R_k + r_p, \tag{23}$$

μ 、 r_p 是电子管的放大因数和板阻。对电子管 6H2Π, $\mu \approx 97$, 所以当 $I_i = 1$ 毫安时 $R_k \approx 90K\Omega$, 所以等效电阻約为 9 兆欧。因此即使节点电位变化 10 伏, 电流变化亦只能到 0.1%。实验証明, 在一个实验过程中(約 1—2 小时), 注入电流的变化常小于 0.05%。

上述电路只适宜于注入負的电流。为了注入正的电流, 电路中有 +150 伏稳压电源, 电流即由 +150 伏电源經過綫繞电阻和电位器輸入到网络(图 7)。若同时注入几个正的电流, 就应当应用反复过程。若同时有正負电流注入, 則应当先調调整好負电流, 然后調调整正电流, 反复过程可以只限于正电流。

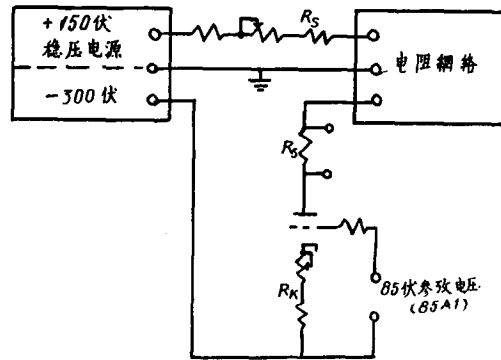


图 7 注入正負电流用的設備

測量标准电阻 R_s (图 7)上的电位降来

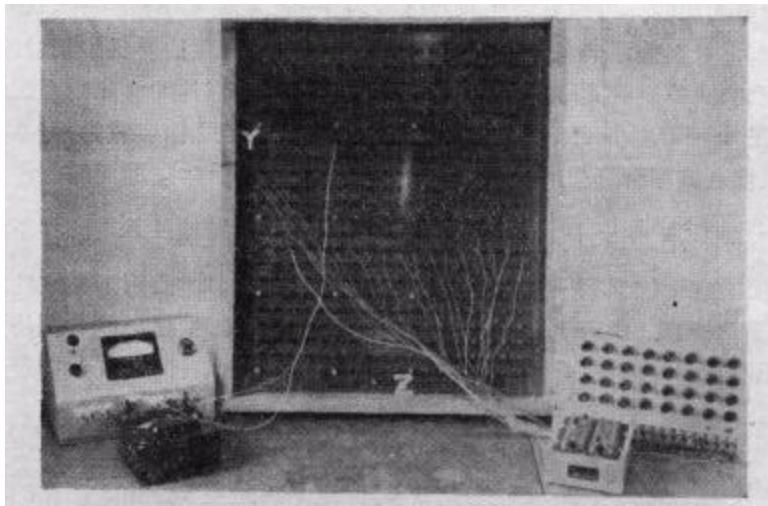


图 8 模拟机照片。中間部份为电阻网络;右边是注入电流設備,它的前面是电阻箱(R_s);左边是測量电位用的螺旋电位計及檢流計。

1) 后来将网络予以改装,中心部分扩大到 14×14 单元, z 、 r 方向扩展到 28 和 32 单元。在 $r \leq 8$ 时 R_s 电阻一直伸展到 $z = 28$ 单元, 这样使网络在模拟两端为均匀的磁場时有更大的灵活性。

决定注入电流值。

网络各点电位在准确测量时用精密电位计来测量。在不需要非常准确测量时,用自制的螺旋电位计进行测量。螺旋电位计预先用精密电位计加以校准。

模拟机及其附属设备见图 8 照片。

四、实验及其结果

由于网络中包含了大量电阻,这些电阻很可能由于焊接或误接或别的原因而与设计的数值有差别,这样就会引起误差,甚或得出错误的结果。为此,最好有一个比较可靠而简单的检验方法。

我们现在应用二种检验方法。第一种方法在网络刚安装完毕时进行。方法是将 $r=2$ 所有节点联在一起,在 $r=0$ 与 $r=2$ 之间加一电位差,由图 6 可以看到 $r=1$ 各节点的电位应该相等。如电位偏差超过 2%,那末与该点相联的 R_r 电阻的数值一定不符合要求。同理,可以将 $r=4$ 联起来而检查 $r=3$ 各节点。这个方法可以一直推广到检查几乎整个网络的 R_r 电阻。若将 $r=0$ 各节点互相断开,那末同样方法可用来检查 R_z 电阻。

第二种检验方法如下(我们用这个方法同时检验了网络模拟场的准确性):计算了细圆线圈在 $p(z, r)$ 点所产生的矢势^[1](圆环中心在 $(0,0)$ 点,半径为 a , z 为轴):

$$\left. \begin{aligned} \psi &= rA_\theta = \frac{aI}{10} [2k^2\sqrt{\xi}D - k^2\sqrt{\xi}K], \\ \xi &= (z/a)^2 + (1 + r/a)^2, \quad k^2 = \frac{4r/a}{\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中 D, K 是椭圆积分,它是 k^2 的函数,其数值可由表中查得^[1]。表 1 是取 $a = 10h$ 时理论值与实验值的比较。可以看到在有效区域内 ($z < 4, r < 8$),误差 $< 0.5\%$ 。越靠近边界误差越大,并且误差方向总是正的。这充分说明了电流在边界层上反射的影响(从物理意义上说,我们所模拟的实际上是这样一系统:在网络以外的空间由理想铁磁性物质所充满^[9])。在 $z = 0, r = 9, 10, 11$ 和 12 等点,理论之值远较实验为大。原因是(24)代表一个无限细电流环所产生的矢势,它在 $k^2 \rightarrow 1$ 时趋于 ∞ ,而网络由于集众的性质不能反映这一点 ($\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{10} \mathbf{j}$,对无限细电流圈, $j = \infty$,网络注入电流并不能反映这一点,它实际上更适宜于代表有一定大小截面的线圈)。在 $(0,10)$ 点附近各点的误差数值为负值,亦说明了这一点。由表 1 可以看到数据变化是有规律的,可以认为网络无误。在以后检查网络正确与否时即可以这次测得的数据作为标准。两种方法都曾检查出过一个不合规格的电阻。

按照(13)、(14)和(24),正确的注入电流应为 $\pi/2 = 1.5708$ 毫安,但表 1 实验中的实际注入电流仅为 1.5446 毫安,误差为 1.7% 。这个误差主要是由于网络的有限线圈所引起的,下面将更详细讨论这个问题。

为了弄清网络大小、比例尺度、注入电流方法等等对测量准确度的影响,曾进行了若干次实验,结果总结在表 2 中。表 2 所列的是图 9 线圈在某些点上所产生的磁通。为了便于和理论进行比较,表 2 所列的并非直接为磁通 Φ ,而为图 9 线圈与另一同轴细圆环之间

表 1 細圓環模擬的誤差(%)
($a = 10h$)

$r \backslash z$	0	2	4	6	8	10
1	0.1	-0.4		1.5		5.6
2	-0.1		0.5		2.9	
3	0.3	-0.1		1.5		6.0
4	0.3		0.4		2.9	
5	0.2	0		1.2		7.2
6	0.3		0.4		3.1	
7	0.4	-0.7		1.5		7.1
8	-0.3		0.3		4.0	
9	—	—		2.3		9.0
10	—		1.2		5.0	
11	—	-1.0		3.4		9.7
12	—		2.5		6.0	
13	-0.1	1.2		4.4		11.3
14	0.3		2.8		7.6	
16	1.8		3.8		9.4	
20	10.3		10.6		14.7	
24	18.1		20.3			

的互感(它應與 Φ 成正比),單位為 $4\pi^2 \cdot 10^{-9} a$ 亨。表中值是模擬值與理論值的差別(%). 實驗是在 14×14 單元的網絡上進行的。數據 I 代表正常網絡,擴展區為 28×32 。數據 II 為將上述擴展區經過簡單擴大而立刻擴展到 60×60 單元。比較這些數據可得下面幾點結論:(1)在綫圈半徑 $a = 5h$ 時,目前的網絡已足夠大。網絡由 28×32 擴大到 60×60 時對 ψ 的改進不到 0.1%。但在 $a = 10h$ 時,由於網絡的有限大小,可能引起的誤差約為 2% 左右(誤差是正的)。簡單的將網絡由 28×32 擴大到 60×60 約可消去 30% 的誤差。此外,可以看到,鐵磁屏蔽對離綫圈較近處場的相對影響要小一些。(2)若綫圈綫度小於一個網絡單元的綫度,那末引起誤差會較大,尤其是綫圈附近的點。除了這種情況以外,在不太靠近綫圈的地方,採用二級近似方法一般的準確度在 1—2% 之內。當綫圈占有好幾個網絡節點時,準確度還會更好些(~1%)。(3)由表 2 (尤其是表 2(II)) 可以清楚地看到逐級近似對測量準確度的影響。在離綫圈較遠之點,一般地說高級近似總會得到更好的結果。二級近似即使在離綫圈一個綫圈綫度的地方仍能得到較好的結果。一級近似在很多情況下準確度尚不夠理想。在離綫圈很近之處,即使二級近似尚不能得到滿意結果。這時泰勒級數收斂得很慢,需要更高級的近似(為了比較,表 2(II) 中亦附列了三級近似模擬的結果)。這個情況和用泰勒展開法求綫圈間的互感時所碰到的情況完全相同^[12,13]。還應該指出,在我們情況下泰勒展開的間距為網絡單元長度 h , 因之若 h 愈

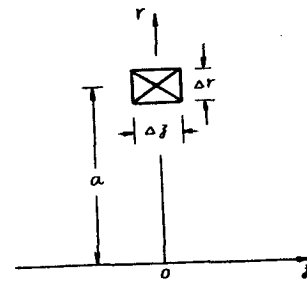


圖 9 表 2、表 3 實驗中所用的綫圈

表 2(I) 图 9 线圈与一个同轴细圆环之间的互感值
 单位为 $4\pi^2 \cdot 10^{-9} a$ 亨, 表内数值为模拟值与理论值之间的差别(%).
 I: 扩展区为 28×32 ; II: 60×60 理论计算见[12].

线圈 $\Delta z = \frac{a}{5}, \Delta r = 0$			圆环位置 (z, r)		(0, 0.2a)	(0, 0.4a)	(0, 0.6a)	(0, 0.8a)	(0, 1.0a)	(0.1a, 1.0a)	(0.2a, 1.0a)	(0.4a, 1.0a)
			理论值		0.02020	0.08479	0.2096	0.4590	1.0774	0.8588	0.5604	—
$a = 10h$	零级	I	2.0	1.6	1.5	-1.9	-3.9	-0.6	4.9	—		
		I	2.2	1.8	1.9	-0.8	1.9	-2.6	3.8	—		
	二级	I	2.2	1.9	1.9	-1.1	-1.2	0.2	2.8	—		
		II	1.6	1.3	1.5	-1.4	-1.4	-0.1	2.4	—		
	零、一级	I	1.0	2.8	4.1	2.5	-2.1	—	0.4	—		
		I	0.5	2.1	2.9	0.4	-5.9	—	2.6	—		
二级	I	0.4	2.0	2.8	0.3	-6.0	—	2.5	—			
	II	—	—	—	—	—	—	—	—			
$\Delta z = 0.3a, \Delta r = 0$	理论值		—	0.08412	0.1992	—	0.9470	—	0.5832	0.3504		
	$a = 5h$	零级	I	—	0.6	0.3	—	-6.0	—	4.5	5.3	
		一级	I	—	1.7	2.1	—	0.5	—	1.5	3.5	
		二级	I	—	1.4	0.6	—	-3.5	—	5.6	2.5	
	理论值		0.01994	0.08327	0.2041	0.4207	0.8588	—	0.6448	0.3574		
	$a = 5h$	零级	I	-1.2	0.2	-0.5	-1.8	-5.9	—	-1.9	5.6	
一级		I	-0.3	1.2	1.3	1.6	1.3	—	-4.6	3.8		
二级		I	-0.3	1.1	1.0	0.4	-2.5	—	-0.9	2.5		

表 2(II) 同上, 单位 $4\pi^2 \cdot 10^{-9} (5h)$ 亨

线圈 $\Delta z = h, \Delta r = 0$			圆环位置 $(z/h, r/h)$		(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)
			理论值		6.3	8.6	11.0	14.3	18.0
$a = 5.25h$	I	零级	1.7	3.4	4.9	6.3	6.4		
		一级	-0.9	1.5	1.8	0.5	12.5		
		二级	0.3	1.4	1.6	0.2	3.0		
		三级	11.5	14.4	18.0	25.4	24.1		
$a = 5h$	I	零级	1.9	3.5	4.9	6.8	-0.1		
		一级	0.2	1.1	1.1	0.4	8.2		
		二级	0.3	1.3	1.4	1.2	1.6		
		三级	—	—	—	—	—		

小(即比例尺度愈大), 准确度会迅速提高。此外, 模拟误差除了由于舍弃高次项所引起的误差外, 尚有由于模拟机本身的特点所引起的误差。(4)放大比例尺度一般会有显著的好结果, 但是此时应该考虑到由于网络的有限精度所引起的误差。因之, 模拟时适当的选择比例尺度(亦即 h)和注入电流的近似级数是有很大意义的。至于如何选取则与所研究

的問題、要求的准确度有关。原则上应使綫圈截面占有 3—4 个节点以上,此时选用一級近似就能得到較滿意的結果。表 2 数据使我們对模拟別种場时可能碰到的誤差有一个估計。例如,如所模拟的場的空間变化率(一个网络单元中 ψ 的相对变化值)小于上述实验中的数值,那末可以期望誤差也会小于上表所列的数值。通常可能就是这种情况。

上面已經提到,模拟的誤差与場的类型有关。因之上述工作决不意味着在模拟任何場时的絕對誤差及靠近边界层的那些点的誤差一定会如表 1 所示的那末大。对图 6 网络进行仔細分析就会发现,若上述网络用来模拟半径 $a = 8h$ 的无限长螺綫管,則所有点上的誤差应为零。具体模拟指出,一般誤差为 0.2% 左右,在个别点上可到 0.4%。这个数值可以看作是我們网络誤差的最小极限,它完全由电阻偏离設計值所引起。

表 3 对图 9 綫圈电感模拟的結果
电感单位为 $4\pi^2 \cdot 10^{-9}a$ 亨

綫圈类别		(1) $\Delta z = 0$ $\Delta r = a/5$	(2) $\Delta z = a/5$ $\Delta r = a/5$	(3) $\Delta z = a/10$ $\Delta r = 0$	(4) $\Delta z = a/5$ $\Delta r = 0$	(5) $\Delta z = \frac{3}{10}a$ $\Delta r = 0$	(6) $\Delta z = \frac{2}{5}a$ $\Delta r = 0$	
理論值 ^[12]		1.015	0.7961	1.235	1.016	0.8887	0.7996	
模拟誤差 (%)	$a = 5h$	零級近似	+3.1	+31.4	-14.7	+3.0	-10.4	-9.9
		一級近似	+3.1	+31.4	-14.7	+3.0	-1.4	-3.2
		二級近似	-3.7	-14.1	-16.3	-3.9	-2.1	-5.2
	$a = 10h$	一級近似	-1.6	+3.9	+4.1	-1.4	—	—
		一級近似	—	—	-2.0	-3.3	—	—

亦檢驗了模拟綫圈电感的准确度問題。所模拟的綫圈見图 9, 結果示于表 3。可以看到,当綫圈截面只占据一个节点时,誤差可能很大。誤差来源可由公式(21)、(22)看出。一类誤差是由于网络模拟磁通 Φ 不准确所引起的(突出的例子为綫圈类型(3))。另一类誤差是由于用公式(22)代替(21)(即綫圈匝数的集众过程)所引起,典型例子为类型(2)。此时在綫圈截面內磁通变化很厉害,而公式(22)的集众过程并未或不够完全反映这一点。这个时候解决办法是将模型尽量扩大,如这样做不可能,那末最好直接用公式(21)而不用(22)。若綫圈占有三个节点位置,那末由表 3 可以看到一級近似模拟的誤差常可以在 3% 左右。扩大网络比例尺度(如 $a = 10h$)会得到較好結果,但應該注意到网络的有限綫度对磁通的影响。严格地說,表 9 的数据在 $a = 10h$ 时尙应加上这个誤差(約 -1.0%)。因之,在模拟电感时如对占一个节点的情况加以充分注意,那末

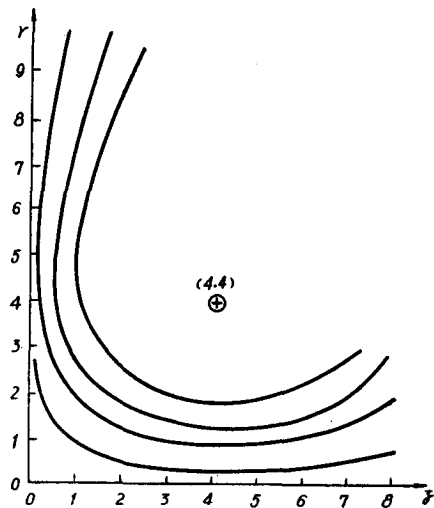


图 10 会切几何形态力綫形状(模拟結果)

測量电感的准确度虽要差一些,但准到 5% 以下还是可能的。在很多情况下,綫圈截面內磁通的相对变化不会如表 3 所列情况那样厉害,因之誤差还会更小些。二級近似一般有

过修正弊病,所以不要加以应用.

对会切几何形态的磁場模拟的結果见图 10.

五、总 結

本工作詳細論証了不但有軸对称,并且有平面对称的磁場的模拟方法以及各級近似下的电流注入方法.

根据上述論証設計并制造了一架模拟机及其相应的附属設備. 在这个模拟机上模拟了一些理論上已有精确答案的問題, 弄清了在不同情况下模拟机可能产生的誤差及其来源, 証明了模拟理論和电流注入理論是正确的.

根据工作需要, 利用上述模拟机模拟了若干种不同类型的磁場形态. 这些形态有的非常复杂, 几乎难于用別种方法很快获得結果. 模拟机使我們大大地节省了对这种磁場形态进行物理設計和工程設計所需的时间.

一年多的实践表明, 現有仪器使用是方便的. 可靠性与重复性总的說来是很好的. 但亦曾偶而发生由于接綫柱螺絲松动而失效的情况. 因之, 使用前最好用上面談到的第二种檢驗方法对感兴趣的区域进行檢驗. 一般情况下电阻失效点附近电位会出现奇异点, 所以这种情况若是发生也是立刻容易探测到的.

潘垣、李素蓉、周文宗三同志曾前后参加过一部分工作.

附 录

令 P 为属于节点 P_{00} 的一个綫圈截面元(见图 4(b)). 該綫圈对空間任意点 X 所产生的場应可写为 $\psi(P, X)$. 若用泰勒級数对綫圈位置展开, 应该可以得到

$$\psi(P, X) = \psi(P_0, X) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial z_p} \right|_0 \delta z + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_p^2} \right|_0 \delta z^2 + \dots \quad (25)$$

在零級近似时, 取

$$\psi^0(P, X) = \psi(P_0, X) = \psi(P_{00}, X). \quad (26)$$

在一級近似时将 P 点綫圈看作在 P_0, P_1 点二个綫圈(安匝比例 α, β)所合成. 此时应有

$$\begin{aligned} \psi^1(P, X) &= \alpha \psi(P_0, X) + \beta \psi(P_1, X) \\ &= (\alpha + \beta) \psi(P_0, X) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial z_p} \right|_0 \beta \Delta z + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_p^2} \right|_0 \beta \Delta z^2 + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

在一級近似假設下, 得

$$\beta = \frac{\delta z}{\Delta z}, \quad \alpha = 1 - \beta = 1 - \frac{\delta z}{\Delta z}. \quad (28)$$

P_0, P_1 点綫圈又可以按同一規律分解成位于 $P_{00}, P_{01}, P_{11}, P_{10}$ 的四个綫圈, 安匝数比例如图 4(a) 所示.

尚可以証明, 若将 P_{00} 点的綫圈截面先求出重心, 然后再按上述原理解, 这样不但方便, 而且 δz^2 項的誤差一般也会較小.

在二級近似时将 P 点分解为 P_0, P_1, P_{-1} 三点, 安匝比分别为 α, β, γ (图 4(b)), 則

$$\begin{aligned} \psi^2(P, X) &= (\alpha + \beta + \gamma) \psi(P_0, X) + \\ &+ \left. \frac{\partial \psi}{\partial z_p} \right|_0 (\beta - \gamma) \Delta z + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_p^2} \right|_0 (\beta + \gamma) \Delta z^2 + \dots \end{aligned} \quad (29)$$

比較(29)、(25)得

$$\alpha = 1 - \left(\frac{\delta z}{\Delta z}\right)^2, \quad \beta = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta z}{\Delta z} + \left(\frac{\delta z}{\Delta z}\right)^2 \right],$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\delta z}{\Delta z}\right) - \left(\frac{\delta z}{\Delta z}\right)^2 \right]. \quad (30)$$

最后得到的安匝比见图 4(b).

按照同样方法不难将結果推广到更高级的近似.

可以指出,上述方法实际上就是数值計算中求插值的方法. 式(28)代表牛頓前插公式的一級近似,而式(30)則代表司蒂林公式的二級近似. 若(30)中除去二級項則可以得到司蒂林公式的一級近似. 插值公式中关于誤差的分析亦可以应用于上面的例子.

参 考 文 献

- [1] 例如參見 Zworykin, V. K. et al., *Electron Optics and the Electron Microscope* (1945), P. P. 472—3.
- [2] Blewett J. P., *J. App. Phys.*, **18** (1947), 968. Bartberger, C. L., *J. App. Phys.*, **21** (1950), 1108.
- [3] 參見 Karplus W. J., *Analog Simulation*, 1958, McGraw-Hill Co.
- [4] Hogan T. K., *J. Instn. Engrs.*, Aust., **15** (1943), 89.
- [5] DePackh D. C., *Rev. Sci. Instr.*, **18** (1947), 798.
- [6] Redshaw S. C., *Proc. Instn. Mech. Engrs.*, **159** (1948), 55.
- [7] Liebman G., *Nature*, **164** (1949), 149; *Brit. J. App. Phys.*, **1** (1950), 92. 以及其后发表的一系列論文 (見[3]).
- [8] 見[7]
- [9] Liebman G., *Phil. Mag.*, **41** (1950), 1143.
- [10] Wakefield K. E., NYO-7313 (1956).
- [11] Jahnke E. and F. Emde, *Table of Functions*, P. P. 78—83. Schuler M. and Gebelein, *Eight and Nine Place Tables of Elliptical Function*, (1955).
- [12] 卡兰达洛夫等, *感应系数計算手册*, 电力工业出版社(1957), 第 6 章, 第 7 章.
- [13] Grover F. W., *Inductance Calculations*, Van Nostrand Co., 1946, P. P. 9—14.

A RESISTANCE NETWORK ANALOGUE FOR MAGNETIC FIELD WITH BOTH AXIAL AND PLANE SYMMETRY

HSIN SHIEN-CHIEH TSAO CHAI-LIN WU TSAI-DE

ABSTRACT

In this paper the principle of simulating an axial and plane symmetrical magnetic field by a resistance network analogue is analysed. The method of current injection has also been discussed and the formula for the second order approximation was given. Based on the above principle, a resistance network analogue with associated apparatus was constructed. The central part of the network contains 10×14 units. It is extended by end strips to 28 and 32 units in z and r directions respectively. Experiments have been done with this network for several types of field, which have precise solutions analytically. Errors of the network under various conditions were noted and its origin traced. Experience shows that the analogue is reliable. It shortens considerably the time required for the design of many complex magnetic configurations.