

微扰論与解析性*

張宗燧

(中国科学院)

提 要

本文对近年来用微扰論来討論散射振幅的解析性的理論,作了简单的介紹。

在附录 AI 中,計算了 $N-\pi$, $N-N$ 散射的最簡單图的奇异曲面上各点的相应临界 α_c , 証实了除了在譜函数边界上的点外,临界 α_c 都不落在实軸的 $(0, 1)$ 段中。

在附录 AII 中,提出了色散关系的一个不受动量輸送限制的証明方法。方法为对介子动量的方位角(討論时取 Breit 系,核子动量取为极軸)进行平均。

在附录 AIII 中,提出了一个可以带来么正条件的式子,以便在用微扰論进行对解析性的研究时考虑到么正条件。

引 言

在双重色散理論被提出前,通过微扰論来研究散射振幅的解析性,已有了一些工作。在双重色散理論被提出后,此方面有了更多的工作。現在将 Nambu^[1,2], Symanzik^[3], Karplus, Sommerfeld, Wichman^[4,5], Tarski^[6], Sreaton, Polkinghorne^[10,11], Landau^[12], Eden^[13-16] 等人的工作,作一个简单的介紹。在附录中,将討論一些有关的问题。

§ 1. 二 种 参 数

在外綫(走出)动量为 $k_1, k_2, \dots$ 的情形下,相应于一个費曼图的矩陣元为

$$\int \dots \int e^{i \sum k_i x_i} S_F(x' - x'') D_F(x''' - x''') \dots \prod_{i=1}^n d^4 x_i, \quad (1.1)$$

$$(kx = k_0 x_0 - k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_3)$$

(除开无关重要的常数倍外), 式中 n 为頂点数; $x', x'' \dots$ 为 $x_1, x_2 \dots x_n$ 中某些 x , S_F , D_F 为各种传播子。第一种积分办法为将 D_F, S_F 表为

$$D_F(x) = -\frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty e^{-iax^2/2} e^{-im^2/2a} da,$$

$$S_F(x) = \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + m \right) \left(-\frac{i}{8\pi^2} \right) \int_0^\infty e^{-iax^2/2} e^{-im^2/2a} da \quad (1.2)$$

等形式, 式中 m 为各綫的质量, 对不同的綫不同。为討論解析性起見, 可以取去 $\gamma(\partial/\partial x) + m$ 字样。以(1.2)代入(1.1), 得到

* 1961年10月18日收到。

$$\int \cdots \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} i \sum a_{ij} (x_i - x_j)^2 - \frac{1}{2} i \sum \frac{m_{ij}^2}{a_{ij}} + i \sum k_i x_i \right\} \prod da_{ij} \prod d^4 x, \quad (1.3)$$

式中 $a_{ij} = a_{ji}$, $m_{ij} = m_{ji}$ 为自顶点 i 至顶点 j 的内线的参数 a 及质量 m . 将变数 x 变为 y .

$$\begin{aligned} x_i &= y_i - y_n, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1, \\ x_n &= -y_1 - y_2 \cdots - y_n, \end{aligned} \quad (1.4)$$

对 y_n 积分, 得出 $\delta(\sum k)$ 字样, 此字样不再写出. 对 $y_1, \cdots, y_{n-1}$ 积分, 得¹⁾

$$\int \cdots \int \frac{1}{n^4 \mathbf{A}_{11}^2} \exp \left\{ \frac{1}{2} i \frac{\mathbf{A}_{1i,1j} k_i k_j}{\mathbf{A}_{11}} - \frac{1}{2} i \sum \frac{m_{ij}^2}{a_{ij}} \right\} \prod da_{ij}, \quad (1.5)$$

式中 $\mathbf{A}_{rs}$ 为自矩阵

$$((A_{ij})) = \begin{pmatrix} \sum_{i \neq 1} a_{1i} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots \\ -a_{21} & \sum_{i \neq 2} a_{2i} & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & \sum_{i \neq 3} a_{3i} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

取去第 r 行第 s 列而乘以 $(-)^{r+s}$ 后所得的行列式, $\mathbf{A}_{ik,rs}$ 为自矩阵 (1.6) 取去 ik 行, rs 列而乘以 $(-)^{i+k+r+s}$ 后所得的行列式. $\mathbf{A}_{rs}$, $\mathbf{A}_{ik,rs}$ 具有特点, 即 $\mathbf{A}_{rs}$, $\mathbf{A}_{ri,ij} k_i k_j$ 对不同的 r, s 均相等.

将 a_{ij} 换为 ta_{ij} , 使

$$\sum a_{ij} = 1, \quad (1.7)$$

对 t 积分, 而再将 a 改写为 a , 得

$$\int \cdots \int \prod da_{ij} \delta(\sum a_{ij} - 1) \frac{1}{n^4 \mathbf{A}_{11}^2(a) \left(\frac{\mathbf{A}_{1i,1j} k_i k_j}{\mathbf{A}_{11}(a)} - \sum \frac{m^2}{a} \right)^c}, \quad (1.8)$$

c 为某一个与 a 及 k 无关的数 (在重正化的理论中 c 至少等于 1). 可以证明 $\mathbf{A}_{11} > 0$, 所以问题只在研究

$$\frac{\mathbf{A}_{1i,1j} k_i k_j}{\mathbf{A}_{1,1}} / \sum \frac{m_{ij}^2}{a_{ij}} - 1 \quad (1.9)$$

是否可能取零值. 因为在取适当的 a 值时, (1.9) 可以变得小于零, 因此为证明在某一些 k_i 处的解析性起见, 我们要求 (1.9) 的最大值小于零.

以上的办法是 Nambu 及 Symanzik 所用的办法. 利用以上办法, 在目前只研究过当变数 $(k_i k_j)$ 等几乎为实数时的解析情形. 在 $(k_i k_j)$ 为复数时, (1.8) 式的解析性尚未被研究. 在 Symanzik 论文中, (1.8) 括号中第一项写为

$$-D_r(p, \alpha)/D_r(\alpha);$$

1) 此积分法与 Nambu 原文略有不同, 参阅文献 [23].

此处的 α 即是我们的 a , 而 $D_r(\alpha)$, $-D_r(p, \alpha)$ 实质上即是

$$\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{1i, 1j} k_i k_j.$$

此后我们有时用 $D_r(a)$ 的符号来代替 $\mathbf{A}_{1,1}$.

另一种积分办法是将 D_F, S_F 等写为

$$D_F = \int e^{-iqx} d^4q \frac{i}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (1.10)$$

于是除开无关紧要的常数倍外, (1.1) 成为

$$\int \cdots \int \prod dq_{ij} \delta \left(-\sum_j q_{ij} + k_i \right) \prod \frac{1}{q_{ij}^2 - m_{ij}^2 + i\epsilon}, \quad (1.11)$$

式中 q_{ij} 代表自顶点 j 至顶点 i 的内线上的动量, δ 因子反映各顶点上的动量能量守恒. 由于这些守恒, q_{ij} 可以表为一些独立的动量变数 t 及外线动量 k 的线性组合. 于是上述积分可以表为对 t 的积分

$$\int \cdots \int \prod dt_l \prod \frac{1}{(q_{ij}^2(t, k) - m_{ij}^2 + i\epsilon)}. \quad (1.12)$$

令 N 代表内线数, 令 $J, K, \cdots$ 等为内线的指标, 可以化上式为

$$\int \cdots \int \prod dt_l \prod d\alpha_j \frac{\delta(\sum \alpha_j - 1)}{[\sum \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)]^N} \quad (1.13)$$

(α_j 的积分上下限为 0, 1). 首先将此积分写为

$$\int \cdots \int \prod d\alpha_j \int \cdots \int \prod dt_l \int_0^\infty du e^{iu[\sum \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)]} \frac{(-i)^N u^{N-1}}{(N-1)!} \delta(\sum \alpha_j - 1), \quad (1.14)$$

其次将 $\sum \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)$ 写为

$$t_i A_{ij}(\alpha) t_j + 2b_i(\alpha, k) t_i + C(\alpha, k), \quad (1.15)$$

再写为

$$(t + A^{-1}b)_i A_{ij} (t + A^{-1}b)_j + C - b A^{-1}b, \quad (1.16)$$

再在 $t + A^{-1}b$ 上引入正交变换, 使 A_{ij} 对角化, 于是(1.14)可以对 t 积分, 成为

$$\int \cdots \int \prod d\alpha_j \int_0^\infty \frac{u^{N-1} (-i)^N}{(N-1)!} e^{iu(C - b A^{-1}b)} \frac{\delta(\sum \alpha_j - 1)}{|\text{Det } A| (\text{Det } A)} \left(-\frac{i\pi^2}{u^2} \right)^l du, \quad (1.17)$$

式中 l 为独立的 t 的数目, 一般讲来为 $N - n + 1$. 在对 t 积分时, 我们用到了下式:

$$\int e^{iat^2} dt = \frac{-i\pi^2}{|a|a}.$$

在(1.17)上进行对 u 的积分, 获得

$$\int \cdots \int \prod d\alpha_j \frac{1}{(C - b A^{-1}b)^{N-2l}} \frac{1}{(\text{Det } A)^2} \delta(\sum \alpha_j - 1) \quad (1.18)$$

(无关紧要的常数倍不计), 亦即

$$\int \cdots \int \prod d\alpha_j \frac{[\text{Det } A(\alpha)]^{N-2l-2}}{[D(\alpha, k)]^{N-2l}} \delta(\sum \alpha_j - 1), \quad (1.19)$$

式中 $D(\alpha, k)$ 代表行列式

$$\begin{vmatrix} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) & \cdots & b_1 \\ A_{21}(\alpha) & A_{22}(\alpha) & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & C \end{vmatrix}, \quad (1.20)$$

而 $\text{Det } A(\alpha)$ 即在上述行列式中删去末一行末一列而得的行列式。問題在于研究(1.19)的解析性, 又因 $\text{Det } A(\alpha) > 0$, 問題归结于研究由 $D(\alpha, k) = 0$ 所引起的奇异性。

不妨指出

$$\begin{aligned} \text{Det } (\alpha, k) &= \text{Det } A(\alpha) [C - bA^{-1}b] = \\ &= \text{Det } A(\alpha) [\sum \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)]_{t=A^{-1}b}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

亦即

$$\text{Det } A(\alpha) [\sum \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon)] \quad (1.22)$$

在 t 满足

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \sum \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t_2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial t_l} = 0 \quad (1.23)$$

时的值。这一点与以下所談的朗道条件有关。

以上是利用第二种参数的理論。援用第二种参数的論文較多, Screaton, Polkinghorne, Landau 及 Eden 等都用这一种参数。

因为在用第一种参数时, 內綫的质量通过 $\sum m^2/a$ 出現, 而在用第二种参数时, 內綫的质量通过 $\sum \alpha_j m_j^2$ 出現, 可見第一种参数 a_{ij} 与同一图同一內綫的第二种参数 α_j 所构成的 $1/\alpha_j$ 相似。当然它們并不完全相同, 因为 a_{ij} 及 α_j 的积分区域都是 $(0, 1)$ 。对于某些简单的費曼图, 它們間的关系可以明显地求出(見文献[23]注)。

以下先討論第一种参数理論。

§ 2. Nambu-Symanzik 理論

在第一种参数的理論(亦即 Nambu-Symanzik 理論)中, 我們討論(1.9)式在已知的外界动量下能否在 α 取适当值时到达零值。Nambu 在他的論文中指出了可以比較二个不同图的(1.9)式, 指出了如果某一个图的(1.9)式小于另一个图的(1.9)式, 而后者始終小于零, 那末前者也如此。这称为比強 (Majorization) 方法。他用此方法証明在某些情形下內綫的增加只会減少(1.9)式, 因而不致縮小原有的解析区域。

无庸指出, 这个方法只在外綫动量是欧氏向量时才能被应用。所謂动量 $k_1, k_2, \cdots$ 是欧氏的是指: 不論 $c_1, c_2, c_3 \cdots$ 为任何实数

$$(c_1 k_1 + c_2 k_2 + \cdots)^2 > 0, \quad k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 \quad (2.1)$$

它使 $k_0^2 > 0, (k_i k_j)^2 < k_i^2 k_j^2$ 。在 $k_1, k_2, \cdots$ 为欧氏向量的情形下, Symanzik 給了一个比較二个图的(1.9)的定理。用的是 $\mathbf{A}_{ii,ij}$ 为正定矩陣的性質, 以及当正定矩陣 B, B' 满足

$$k_i B_{ij} k_j < k_i B'_{ij} k_j$$

时必然有

$$k_i B_{ij}^{-1} k_j > k_i B'^{-1}_{ij} k_j \quad (2.2)$$

的事实。这样他把各个图的(1.9)的小于零的問題化为几个图的(1.9)的小于零的問題。

Symanzik 指出

$$D_r(a) = \sum aa \cdots, \quad (2.3)$$

式中 a 乘积包含 $n-1$ 个 a , 它們将 n 个頂点全部联接起来, 在联接时相应的內綫不产生任何封閉多角形. 这样的 a 乘积称为—骨架, 而(2.3)右方的取和系对所有的不同骨架取和. 为証明此点起見, 首先証明 $D_r(a)$ 为許多 a 乘积的和, 每一个乘积将所有 n 頂点联接起来, 而这些乘积的系数都是 $+1$. 其次可証 $\mathbf{A}_{11}(a)$ 不含一个包含指标 1 的封閉路綫. 因 $D_r(a) = \mathbf{A}_{11}(a) = \mathbf{A}_{ii}(a)$, 因此每一个 a 乘积都是一骨架. 最后証明每一个骨架都在(2.3)右方出現. 同样研究 $\mathbf{A}_{1i, 1j} k_i k_j$, 可証

$$\mathbf{A}_{1i, 1j} k_i k_j = \sum \{ (\sum k')^2 D_r(a') D_r(a'') \}^D. \quad (2.4)$$

其意义如下. 将原来的費曼图分为二个互不相联的部分 (各部分中的頂点是相联的), 称为—分割. 令第一部分的外界动量为 $k'_1, k'_2, \cdots$, 称第一部分的 $D_r(a)$ 为 $D_r(a')$, 第二部分的 $D_r(a)$ 为 $D_r(a'')$. 相应于一个分割, 我們可以构成一項

$$(\sum k')^2 D_r(a') D_r(a''),$$

将此对不同的分割取和, 即获得(2.4)的右方. 对于下面的討論而言, 所关重要的乃是

$$\mathbf{A}_{1i, 1j} k_i k_j = \sum_H (\sum k')^2 C_H, \quad (2.5)$$

式中 H 代表各种分割, 而 $C_H > 0$.

利用上式 Symanzik 求出了頂点函数 $G(k_1, k_2, k)$ 在 $k_1^2 = k_2^2 = M^2$ 时对 k^2 的解析性, 証明了 G 在 $k^2 < 0$ 处完全是解析的. 先討論 $0 < k^2 < 4M^2$ 时的情形, 那里 k 等是欧氏的. 如果对此区域中一点(1.9)式小于零 (对于所有的 a), 那末由于(2.5)及 $C_H > 0$, 知(1.9)式在 $k^2 < 0$ 时也小于零. 在 $0 < k^2 < 4M^2$ 处, 可以援用比強法, 亦即只須証明(1.9)对于某一些图小于零. 这样, Symanzik 証明了当

$$k^2 < 4\mu^2 \quad (2.6)$$

时, (1.9)式小于零.

对于 $N-\pi$ 散射 $p + q \rightarrow -p' - q'$ (p, p' 为核子动量, q, q' 为介子动量), 我們原来有

$$\begin{aligned} p^2 &= p'^2 = M^2, \quad q^2 = q'^2 = \mu^2, \\ t &= (p + p')^2 = -4\Delta^2, \\ s &= (p + q)^2 = M^2 + \mu^2 + 2\Delta^2 + 2\omega \sqrt{M^2 + \Delta^2}, \\ \bar{s} &= (p' + q)^2 = M^2 + \mu^2 + 2\Delta^2 - 2\omega \sqrt{M^2 + \Delta^2} \end{aligned} \quad (2.7)$$

等式, 这不在欧氏区域中. 将上述值換为

$$\begin{aligned} p^2 &= p'^2 = M^2 + 2\Delta^2, \quad q^2 = q'^2 = \mu^2, \\ t &= 0, \\ s &= M^2 + \mu^2 + 2\Delta^2 + 2\omega \sqrt{M^2 + \Delta^2}, \\ \bar{s} &= M^2 + \mu^2 + 2\Delta^2 - 2\omega \sqrt{M^2 + \Delta^2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$1) \frac{\partial \mathbf{A}_{11}}{\partial a_{ij}} = \mathbf{A}_{ij, ii} = \sum D_r(a') D_r(a'')$$

而 a' 中含有指标 i , a'' 中含有指标 j , a', a'' 中指标不相同, 而 $\sum$ 为对各种使 i 在一部分中, j 在另一部分中的各种分割的取和. 同样可以用三个 D 的乘积来表出

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} D_r(a') D_r(a'').$$

使 p, p', q, q' 中的动量守恒依然可以满足, 讨论在

$$|\omega| < \mu(M^2 + 2\Delta^2)^{1/2}/(M^2 + \Delta^2)^{1/2} \quad (2.9)$$

时的情形. 该时(2.8)所决定的 p, p', q, q' 是欧氏的, 允许我们援用比强法. 这样我们证明了在 $p^2, p'^2, \dots, s, \bar{s}, t$ 取值(2.8)而 ω 满足(2.9)时, (1.9)在

$$\Delta^2 < \mu(M + \mu)/8,$$

$$\omega_1 < \omega < \omega_2,$$

$$\omega_1 = -\frac{M\mu - \Delta^2}{(M^2 + \Delta^2)^{1/2}}, \quad \omega_2 = +\frac{M\mu - \Delta^2}{(M^2 + \Delta^2)^{1/2}} \quad (2.10)$$

处小于零. 当 $p^2, p'^2, \dots, s, \bar{s}, t$ 取值(2.7)时, (1.9)的值更小(因(2.5)中的 $C_H > 0$), 因而也小于零. 由此我们证明了当 Δ^2, ω 满足(2.10)式时散射振幅 F 是解析的.

注意双重色散要求散射振幅 $F(\omega, \Delta^2)$ 在

$$s < (M + \mu)^2, \bar{s} < (M + \mu)^2, t < 4\mu^2 \quad (2.11)$$

处解析. 在 $\omega = \omega_1$ 及 ω_2 时, 我们分别有

$$\bar{s} = (M + \mu)^2, \quad s = (M + \mu)^2.$$

但区域(2.10)显然比区域(2.11)为小.

上述方法的优点为令人确信在 Δ^2 取适当值时 F 的微扰展开确在 ω 实轴的一段附近具有解析性. 但为确定实轴上下半平面的 $F(\omega)$ 的适合处的全部, 这个方法已经显得无力. 在(2.11)全部区域中进行讨论时, p, p', q, q' 的非欧氏性是不可忽视的.

上述方法也曾应用至 N - N 散射, 获得了类似的结果.

用这类参数来讨论 $s, \bar{s}, t$ 为复数时 F 的解析性还没有进行过. 显然地当 $s, \bar{s}, t$ 为实数时我们还可以作一些类似 § 5 中所述的工作.

下节讨论用第二种参数来研究最简单的三点图及四点图当变数为实数时的情形. 这些工作是 Karplus 等人所作的.

§ 3. 最简单的四点图在实平面中的情形

对于最简单的三点及四点图, Karplus, Sommerfeld, Wichman 在变数 $(k_i k_j)$ 为实数时作了具体的研究, 发现了反常临界现象. 所谓正常临界, 乃是指在过程中逐渐增加某些 $(k_i k_j)$ 或能量使中间态起了质的变化——指可能多产生一种新的真的粒子态, 例如由不可能产生真粒子变为可能产生真粒子——, 使相应的散射振幅得一支点(割线的一端). 反常临界乃一个与此不同的支点, 它只在内部线外部线的质量满足一定关系时出现.

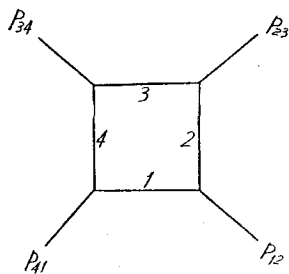


图 1

由于三点图的实质内容可以在四点图的讨论中看到, 所以我们只讨论后者. 援用 Karplus 的符号, 令内线指标为 1, 2, 3, 4, 质量为 m_1, m_2, m_3, m_4 , 外线动量为 $p_{12}, p_{23}, p_{34}, p_{41}$ (见图), 再令

$$p_{13} = p_{12} + p_{23}, \quad (3.1)$$

$$p_{21} = p_{23} + p_{34},$$

$$p_{ii} = p_{ii},$$

于是(1.15)成为

$$\alpha_1 t^2 + \alpha_2 (t - p_{12})^2 + \alpha_3 (t - p_{13})^2 + \alpha_4 (p_{14} + t)^2 - \sum \alpha_i m_i^2,$$

使(1.19)的 $D(\alpha, k)$ 成为

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 & -p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + p_{14}\alpha_4 \\ -p_{12}\alpha_2 - p_{13}\alpha_3 + p_{14}\alpha_4 & \alpha_2 p_{12}^2 + \alpha_3 p_{13}^2 + \alpha_4 p_{14}^2 - \sum \alpha_i m_i^2 \end{vmatrix} \\ = - \sum \alpha_i m_i^2 + \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j p_{ij}^2 \quad (3.2)$$

(利用 $\sum \alpha = 1 = \sum k = 0$). 令

$$p_{ij}^2 = m_i^2 + m_j^2 - 2m_i m_j y_{ij}, \quad (3.3)$$

使

$$D(\alpha, k) = - \sum \alpha_i^2 m_i^2 - 2 \sum_{i>j} \alpha_i \alpha_j y_{ij} m_i m_j. \quad (3.4)$$

在任何頂点的三条綫上的三个質量中,任何一个小于另二个的和(稳定条件),因此

$$-1 < y < 1, \quad y = y_{12}, y_{23}, y_{34}, y_{41}. \quad (3.5)$$

因此对于 $y_{12}, y_{23}, y_{34}, y_{41}$, 我們可令

$$y = \cos \theta.$$

注意 $y_{12}, y_{23}, y_{34}, y_{41}$ 为已知量(由質量决定), 散射振幅的独立变数为 y_{13}, y_{24} 二个, 相应于 $s, \bar{s}, t$ 中二个.

再引入 x_i ,

$$x_i = m_i \alpha_i / \sum m_k x_k, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.6)$$

使 D 化为

$$-D = \sum x_i^2 + 2 \sum_{i>j} x_i x_j y_{ij} \quad (3.7)$$

(无关紧要的常数倍不計). 令 T 代表所有满足 $x_i > 0, \sum x_i = 1$ 的 $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ 点的集合. 对于固定的 y_{13} , 可証存在函数 $\bar{y}_{24}(y_{13})$, 使 $-D$ 在 $y_{24} > \bar{y}_{24}(y_{13})$ 而 x 属于 T 时大于零, 而在 $y_{24} \leq \bar{y}_{24}(y_{13})$ 时对 T 中至少一个 x 而言小于零. 在 (y_{24}, y_{13}) 图上 (y_{24} 为横軸, y_{13} 为纵軸), 曲綫 $y_{24} = \bar{y}_{24}(y_{13})$ 是奇异的, 它分开了散射振幅的解析区及非解析区, 左方为非解析区¹⁾, 右方为解析区(証明見文献[6]). 所以問題为寻找曲綫 $y_{24} = \bar{y}_{24}(y_{13})$.

为寻找此曲綫起見, Karplus 等分三步討論, (i) 寻找在二个 x 为零时 $-D > 0$ 的充要条件. 不难証明这是

$$y_{13} > -1, \quad y_{24} > -1. \quad (3.8)$$

(ii) 寻找一个 x 为零时 $-D > 0$ 的充要条件. 例如在 $x_4 = 0$ 时, 可証当 $y_{12} + y_{23} \geq 0$ 时充要条件为

$$y_{13} > -1, \quad (3.9)$$

而当 $y_{12} + y_{23} < 0$ 时(亦即 $\theta_{12} + \theta_{23} > \pi$ 时), 充要条件为

$$y_{13} > \cos(\theta_{12} + \theta_{23}) \equiv L_4^+. \quad (3.10)$$

(L_4^- 定义为 $\cos(\theta_{12} - \theta_{23})$, 等等)

1) 这个名詞是不确切的. 确切的意义为: 左方可落在一剖面內, 使函数在其他点单值解析. 此后簡称这些区域中的点为奇异的.

因此,引入 L_2, L_4 , 定义为

$$\begin{aligned} L_4 &= L_4^+ & y_{12} + y_{23} < 0, \\ &= -1, & y_{12} + y_{23} > 0, \\ L_2 &= L_2^+ & y_{41} + y_{34} < 0, \\ &= -1, & y_{41} + y_{34} > 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

再引入 L_{13} , 定义为

$$\text{Max}(L_2, L_4), \quad (3.12)$$

于是在 $x_2 = 0$ 面及 $x_4 = 0$ 面上 $-D > 0$ 的充要条件为

$$y_{13} > L_{13}. \quad (3.13)$$

同样在 $x_1 = 0$ 及 $x_3 = 0$ 面上 $-D > 0$ 的充要条件为

$$y_{24} > L_{24}. \quad (3.14)$$

(iii) 最后寻找 $-D$ 在 $x_1 = 0$ 面, $x_2 = 0$ 面, $\dots$ 上大于零及在 T 集合的内部某点可能小于零的必要条件. 条件的一部分为

$$\begin{aligned} k_i &> 0, \quad |y_{13}| < 1, \quad |y_{24}| < 1, \\ k_1 &= 1 - y_{12}^2 - y_{13}^2 - y_{23}^2 + 2y_{12}y_{23}y_{31}, \dots, \end{aligned} \quad (3.15)$$

以及

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & 1 & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & 1 & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & 1 \end{vmatrix} < 0. \quad (3.16)$$

$\Delta = 0$ 的曲线共有五支, 有一支全部落在 $|y_{13}| < 1, |y_{24}| < 1$ 中(称为 Γ_5), 成一封闭曲线, 它切于

$$y_{13} = L_{13}^{(2)}, L_{13}^{(3)}, \quad y_{24} = L_{24}^{(2)}, L_{24}^{(3)}$$

四直线, 式中 $L_{13}^{(2)}, L_{13}^{(3)}$ 代表 L_2^+, L_4^+ 依大小排列时的第二个, 第三个, $L_{24}^{(2)}, L_{24}^{(3)}$ 代表 L_1^+, L_3^+ 依大小排列时的第二个, 第三个(见图 7).

为了使 $k_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) 同时成立, 得

$$L_1^- > L_1^+, L_3^- > L_3^+, L_2^- > L_2^+, L_4^- > L_4^+ \quad (3.17)$$

的条件. 称 $y_{13} = l_{13}, y_{24} = l_{24}$ 为较下及较左的切线(图 2), 那末在图 2 的面积 ABC 中,

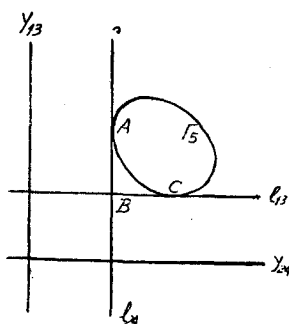


图 2

(3.16) 成立, 因此当(3.17)也同时满足时, ABC 中的 y 可能相应于奇异点. 此时, 如果其中的 y 确相应于奇异点, 亦即对其中的 y 而言, Γ 内部中存在 x 使 $-D < 0$, 那末 l_{13} 必然为 L_{13} , l_{24} 必然为 L_{24} . 因为如果 $L_{13} > l_{13}$, 取与 ABC 中一奇异点 Q 同坐标 y_{24} 而具有 $> l_{13}$ 而 $< L_{13}$ 的 y_{13} 坐标的点 (y_{13}, y_{24}) . 此点上的 $-D$ 在 $x_2 = 0$ 面及 $x_4 = 0$ 面上依照 $y_{13} > l_{13}$ 而言应该大于零, 依照 $y_{13} < L_{13}$ 而言可能小于零, 得一矛盾. 如果 $l_{13} < L_{13}$, 则比较 ABC 中一奇异点 Q 及与 Q 同坐标 y_{24} 而具有 $> L_{13}$ 而 $< l_{13}$ 的 y_{13} 坐标的点 (y_{13}, y_{24}) , 称为 Q' . 因为该点的 $-D$ 比 Q 点的 $-D$ 为小,

所以对 Q^1 而言, T 中存在 x 使 $-D$ 小于零. 因为此点不满足 $x_i = 0$ 面上 $-D$ 大于零, 而在 T 中可以小于零的必要条件 (3.16), 所以在 $x_i = 0$ 等面上必然有点 x , 使 $-D$ 小于零. 但此与它在 $y_{13} = L_{13}$ 之上相矛盾. 这样便证明了 l_{13}, L_{13} 必须相等. 同样, l_{24}, L_{24} 也必须相等.

因此为使 ABC 包含奇异点起见, 必须令

$$l_{13} = L_{13}, \quad l_{24} = L_{24},$$

亦即

$$L_{13} = L_{13}^{(2)}, \quad L_{24} = L_{24}^{(2)} \quad (3.18)$$

(由于 $l_{13} = L_{13}^{(2)}, l_{24} = L_{24}^{(2)}$), 因此要求

$$\Theta \equiv \theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{34} + \theta_{41} > 2\pi. \quad (3.19)$$

此时 (3.17) 带来

$$\Theta < 2\pi + 2\text{Min}(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{34}, \theta_{41}). \quad (3.20)$$

事实上, 自 (3.19), (3.20) 可以导出 (3.18). 它们也是 AC 线上点为奇异点的充分条件.

由 (3.9), (3.13), (3.14) 知奇异区的一部分为

$$y_{13} \leq L_{13}, \quad y_{24} \leq L_{24}. \quad (3.21)$$

由 (iii), 知在条件 (3.20), (3.19) 下 ABC 为奇异区. 总结以上, 共有三种情形.

(i) 在 (3.19) 未被满足时, (3.21) 为奇异区. 奇异区边界与曲线 $\Delta = 0$ 的支 Γ , 至多切于一点 (图 3).

(ii) 在 (3.20), (3.19) 被满足时, 奇异区为 $ABCDE$ 的左下方 (图 4). 此时

$$L_3^- > L_1^+ \text{ 及 } L_3^+, \quad L_1^- > L_1^+ \text{ 及 } L_3^+. \quad (3.17)$$

(iii) 在 (3.19) 被满足而 (3.20) 未被满足时, 曲线 Γ , 落在 (3.21) 区域中. 此时奇异区域依然由 (3.21) 决定 (图 5).

当 L_{24}, L_{13} 中有一个不为 -1 时, $y_{13} = L_{13}, y_{24} = L_{24}$ 线给出了反常临界 ($y_{13} = -1, y_{24} = -1$ 给出正常临界). 为了使反常临界不存在, 我们要求

$$y_{12} + y_{23} > 0, \quad y_{23} + y_{34} > 0, \quad \dots, \quad (3.22)$$

亦即在质量 $(p_{12}^2)^{1/2}, (p_{23}^2)^{1/2}, \dots, m_1, m_2, \dots$ 间的一些条件. 在 $N-\pi, N-N$ 散射中, 这些条件是满足的.

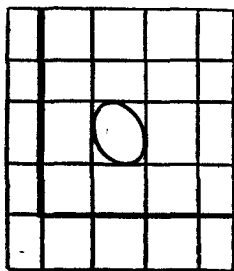


图 3

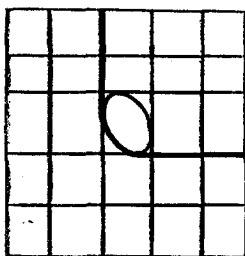


图 4

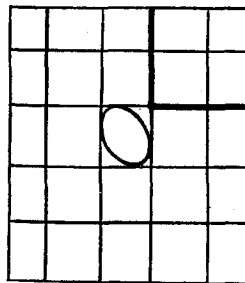


图 5

以上是在 y_{13}, y_{24} 实平面中的研究, 至于开拓至复数, 讨论便显得困难. 下节叙述 Tarski^[6] 在此方面的工作.

同样地讨论三角顶点的最简单图在实平面中的解析性。称此图中内綫所构成的三角形的顶点为 1, 2, 3, 称在顶点 1 的外綫质量为 M_1 , 内綫质量为 m_{12}, m_{13} , 则在图形对 2, 3 两点有对称性及

$$M_1 < m_{12} + m_{13}, \quad M_1^2 > m_{12}^2 + m_{13}^2 \quad (3.23)$$

时出现反常临界。因此如果顶点 1 的外界为 A, B 二粒子所构成的复合粒子, 而在内綫 12, 13 上的粒子正是 A, B 粒子, 反常临界可能出现。目前已有不少理论, 讨论在上述情形下散射振幅在实轴上自反常临界向右的一段上的不连续性与复合粒子内部的波函数的关系^[7,8]。

如果在上述三角顶点中, 将顶点 1, 2 上的各一条外綫, 分别地换为二条外綫, 则可证散射振幅在某些变数的复区域中有奇异点, 使寻常的色散关系的应用形式有所改变^[9]。这一些均在此不作详细介绍。

§ 4. Tarski 的理论

自 (1.13), (1.19), (3.6), (3.7), 知我們所研究的乃是

$$\int \cdots \int \frac{\delta(\sum x - 1)}{[D(x_1 x_2 x_3 x_4)]^2} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad (4.1)$$

$$D(x_1 \cdots x_4) = \sum x_k^2 + 2 \sum_{i>j} x_i x_j y_{ij}$$

对 y_{13}, y_{23} 的解析性。对 x_4 积分, 得

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{dx_3}{[D(x_1 x_2 x_3)]^2}, \quad (4.2)$$

式中

$$D(x_1 x_2 x_3) = D(x_1, x_2, x_3, 1 - x_1 - x_2 - x_3).$$

为清楚起见, 先令 x_2, x_3 不存在, 令 y_{13}, y_{23} 中只有一个在 D 中出现, 即讨论

$$\omega(y) = \int_{M_1}^{M_2} f(\alpha, y) d\alpha \quad (4.3)$$

对 y 的解析性, 此处为清楚起见, 将 x 改写为 α 。

显然地, 如果对已知的 $y, f(\alpha, y)$ 作为 α 的函数在 $\alpha = M_1$ 点或在 $\alpha = M_2$ 点有奇异性, 那末 $\omega(y)$ 在此 y 为奇异的。这样的 y 我们称之为顶点奇异点。此外, 如果对于在点 y_0 的附近一点 y , $f(\alpha, y)$ 作为 α 的函数有二个奇异点 $h_1(y), h_2(y)$, 分别在积分路径的二方, 而当 $y \rightarrow y_0$ 时, $h_1(y), h_2(y)$ 均趋向于积分路径上一点 α_c (称为临界 α), 那末 $\omega(y)$ 在 $y \rightarrow y_0$ 时为奇异的。 $h_1(y), h_2(y)$ 的上述情形称为夹攻的, 而上述的 y_0 称为重迭夹攻奇异点。注意即使 $h_1, h_2 \rightarrow$ 积分路径上一点 α_c , y_0 不一定为奇异点, 因为 h_1, h_2 可能在路径的一方, 当 $y \rightarrow y_0$ 时, 我们可以令路径随 y 而改变, 使之不再包含 α_c 点。因此 $\omega(y)$ 可以自某 y 点一直开拓出去, 直至 y 遇到顶点奇异点或重迭夹攻奇异点。这样的讨论见于文献 [7, 8]。

一个简单的例是

$$\omega(y) = \int_0^1 \frac{1}{\alpha^2 - 2y\alpha - \frac{1}{4} + y} d\alpha, \quad (4.4)$$

$y_0 = \frac{1}{2}$ 是一重迭奇异点, 相应的 $\alpha_c = \frac{1}{2}$. $y_0 = \frac{1}{4}$ 是頂点奇异点.

当我们有一頂点奇异点时, 在一般情形下函数 $\omega(y)$ 有多于一个的里曼 (Riemann) 叶. 例如令 y 自某点 y_1 繞某一頂点奇异点 y' 走一圈 (y' 满足 $h_1(y') = M_1$), $h_1(y)$ 便繞 M_1 走一圈. 原来的积分路綫 Γ 应逐渐变化, 以避免遇到运动着的 $h_1(y)$, 最后的路程为原来的 bn 上繞 $h(y_1)$ 的一圈, 因而使最后的 $\omega(y)$ 不同于初始的 $\omega(y)$. 同样, 在重迭夹攻奇异点出現时, $\omega(y)$ 也可能有多个里曼叶.

Tarski 指出二点: 第一, 令 $y' = h_1^{-1}(M_1)$, 亦即 $M_1 = h_1(y')$, 亦即 y' 为頂点奇异点. 在重迭夹攻奇异点 y_0 的附近取一点 A , 使 $h_1(A), h_2(A)$ 处在积分路程的二方. 令 y 自 A 运动, 繞 y' 而走到 y_0 附近的另一点 B , 使 $h_1(y)$ 自 $h_1(A)$ 运动繞过 $h_1(y') = M_1$ 而到达 $h_2(A)$, 运动中 $h_1(y)$ 不与积分路径相遇 (图 6).

$$h_1(B) = h_2(A).$$

在此运动中, 如果 $h_2(y)$ 不繞过 M_1 (或 M_2), 它必然最后回到 $h_2(A)$ 附近面与 $h_2(A)$ 在积分路径同一方的某点. 这說明了如果 A 是夹攻奇异点, 与 B 相应的二个 h 在积分路径的同一方, 因而不是夹攻的. 这說明了在引入剖綫 $y'y_0$ 后, 自剖綫的一方的趋向 y_0 时 y_0 成为夹攻重迭奇异点, 而自另一方趋向 y_0 时 y_0 不成为奇异点. 在应用此理論时, 必須注意 $h_2(y)$ 不繞 M_1 (或 M_2), 因而依旧回到原来的位置的附近. 如果 y' 本身也是重迭奇异点, 以上的情形便不再成立.

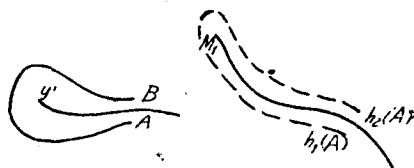


图 6

以例(4.4)而言,

$$\omega(y) = [\log(4y - 1)](2y - 1)^{-1}. \quad (4.5)$$

因此引入沿实軸联接 $(\frac{1}{4}, \infty)$ 的剖綫后, 我們看到在 $y \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, $\log(4y - 1)$ 可以取值零, 可以取值 $\pm 2\pi ni$, 在前一种情形下, 函数在 $y = \frac{1}{2}$ 点不是奇异的. 因此在剖綫上或下趋近于 $y = \frac{1}{2}$ 点时, 函数可以为奇异的, 也可以不为奇异的.

第二, 他說如果有許多变数 y_1 許多个 α , 令 $y = (y_1, y_2, \dots)$ 在

$$h_1(y_1, y_2, \dots) - h_2(y_1, y_2, \dots) \equiv g(y_1, y_2, \dots) = 0 \quad (4.6)$$

面上移动, 如果該时的 h_1, h_2 不繞过頂点 M_1 或 M_2 , 不与积分路程相交, 那末面上一点的夹攻性質带来面上其他点的夹攻性質, 面上一点的缺乏此性質带来面上其他点的同一性質.

这一点似乎应說得更确切一些, 即不应只討論面 $g(y) = 0$ 中的点 y_0 而应討論与 $g(y) = 0$ 面中一点 y_0 相邻近的而本身不在 $g(y) = 0$ 面中的点 y ; 夹攻性質是属于后者的. 当我们有二个变数 y 时, (4.6) 面为四維空間中的二維面, 它不将空間分为二部分, 使自一部分到达另一部分时必须通过此面, (它更近于三維空間中的一維面, 即三維空間中的曲綫). 因此我們不能簡單地說面的一方有夹攻性質, 另一方沒有. 因此, 不能簡單地說那一些方向具有夹攻性質, 那一些沒有. 但是, 在极多数情形下, 如果已知沒有支点剖

面,或已知有支点剖面,但也已知所討論点 y_0 不落在剖面中,則各方向趋向于 y_0 几乎同样地都具有奇异性,或同样地都沒有,使夹攻性、非夹攻性有在 $g(y) = 0$ 面上传递的可能. 在此討論时,必須注意,虽然 $g(y) = 0$ 面上的点本身可能是支点,但繞它們走一圈往往不能改变奇异性. 总之,只消我們引入由于頂点奇异点所带来的剖面, Tarski 理論中的第一、二点是可以应用的.

作出

$$\int_0^1 \frac{1}{a\alpha^2 + b\alpha + c} d\alpha, \quad (4.7)$$

我們看到它在 $4ac - b^2 = 0$ 处可能有奇异性, 奇异部分与 $(4ac - b^2)^{-1/2}$ 成正比; 它在 $-b/2a$ 处在 $(0, 1)$ 外时不出现. 这个奇异部分的出现显然是由于积分路径夹在 h_1, h_2 ,

$$(2a)^{-1}\{-b \pm i(4ac - b^2)^{1/2}\} \quad (4.8)$$

所引起的. 当积分路径在此二点以上(或在二点之下), 我們应加上(或減去)此二点的留数, 这样奇异部分便不見了. 同样作

$$\int_0^1 \frac{1}{(a\alpha^2 + b\alpha + c)^n} d\alpha, \quad (4.9)$$

看到如 $(4ac - b^2)^n$ 的奇异部分.

已給 $q = A_i x_i^2 + B_i x_i + C_i$, 我們定义

$$R(x_i)q = 4A_i C_i - B_i^2. \quad (4.10)$$

于是(4.2)在沒有頂点奇异点时含有奇异項

$$\frac{1}{[R(x_1)R(x_2)R(x_3)D(x_1x_2x_3)]^c}, \quad (4.11)$$

分母为零时, 即

$$\Delta = 0 \quad (4.12)$$

(Δ 的定义見 3.16), 决定了奇异点 y ; 此称为三重奇异点, 以 C^3 代表之. 当 y 取如此的值, 使在 $x_1 = 0$ 时

$$R(x_2)R(x_3)D(x_1x_2x_3) = 0, \quad (4.13)$$

我們实质上有一个可称为“对 x_1 为頂点奇异点, 对 x_2, x_3 有重迭奇异性的奇异点”, 以 C^2E 代表之. $x_1 = 0$ 时的(4.13)即

$$k_1 = 0 \quad (4.13)$$

(k_i 的定义見 3.15). 同样

$$k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0$$

也給出奇异点 y . 最后当(4.2)对 x_1, x_3 有頂点奇异性、对 x_2 有重迭奇异性时,

$$R(x_2)D(0, x_2 0) = 0,$$

得

$$y_{24} = \pm 1.$$

此类奇异点以 E^2C 代表之, 共有

$$y_{13} = \pm 1, y_{24} = \pm 1 \quad (4.14)$$

等点.

注意 (4.12), (4.13), (4.14) 乃是奇异性的必要条件, 而满足它们的正不一定是奇异点(至少在某个里曼叶中是如此的). 这是因为它们相当于 $h_1(y) = h_2(y)$, 而不一定具有夹攻性质. 第二, 当 y_{13}, y_{24} 自某开始的区域被开拓至所讨论点的, 积分路径随开拓而变化, 最后的路径正不一定是 $h_1(y), h_2(y)$ 所夹攻的路径.

可以看出, 自 $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{24}$ 取同符号的区域出发, 我们可以在此区域中取对 x 的积分路径为沿实轴的路径. 用在此区域中的路程趋向于 $y_{13} = -1$ 面或 $y_{24} = -1$ 面上的点, 可证至少沿此方向趋向上述的点, 获得奇异性. 因此 $y_{13} = -1$ 及 $y_{24} = -1$ 是奇异的.

将 $\Delta = 0, k_I = 0$, (4.14) 画出, 在 y_{13}, y_{24} 取实数值时, 得与下类似的图. 图中的虚线为 $k_I = 0$, 图中的实直线为 (4.14). 为讨论在 $\Delta = 0$ 面上取复值的 y_{13}, y_{24} 起见, Tarski 讨论 $\Delta = 0$ 与

$$y_{13} = \alpha y_{24} + \beta \quad (\alpha, \beta \text{ 实}) \quad (4.15)$$

的交点. 当 α 被固定而 β 逐渐自 $-\infty$ 增加至 ∞ 时, 例如取 $\alpha > 0$, 交点数自四个变为三个(此时 (4.15) 线与图中 CD 线相切), 再变为二个, 再变为三个(此时 (4.15) 与 $P_{01}P_{34}$ 曲线相切), 再变为四个. 由此可见在面 $\Delta = 0$ (简称 Σ) 中有二曲线 $C_1(\alpha), C_2(\alpha)$, 将 CD 与 P_{01}, P_{34} 联接起来, $C_1(\alpha), C_2(\alpha)$ 上的 y_{13}, y_{24} 取复数值. 同样可证 LA, CE 通过 Σ 面一块(称为 Σ_1)互联, 并与 $P_{12}P_{01}$ 联接起来, JK, AB, GH 通过 Σ 面上一块(称为 Σ_2)互联, 并与 $P_{12}P_{23}$ 联接起来, IG, DF 通过 Σ 面上一块(称为 Σ_3)互联, 并与 $P_{23}P_{34}$ 联接起来. 将 CD 与 $P_{01}P_{34}$ 相联的一块面称为 Σ_4 . 在 Σ_2, Σ_4 面上, 由于 $\alpha > 0$, $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{24}$ 同一符号, 在 Σ_1, Σ_3 面上, $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{24}$ 符号相反. 每一个面 Σ_i 共有二部分, 一部分上的 $\text{Im } y_{13}$ 与另一部分的 $\text{Im } y_{13}$ 符号相反.

由于任何复数 y_{13}, y_{24} 都满足某些 α, β 的 (4.15), 这样的寻找 Σ 没有遗漏任何部分.

如果对于 IGH 或 $P_{23}P_{34}$ 上的 y_{13}, y_{24} , 临界 α_c 不在实轴上, 那末当 (y_{13}, y_{24}) 被移动至复面 Σ_3 上时, 即使 α_c 趋向于实轴上一点, 奇异性也不产生, 因为那时 $h_1(y) = h_2(y)$, 因而二个 h 必然在实轴的同一方. 因此当 y 沿 Σ_3 面上运动时, 我们看不到奇异性. 但在最严格的要求下, 这并不证明 Σ_3 上的点不是奇异的, 因为只消在一个趋向于它的方向上有奇异性, 这一点就是奇异点. 在此我们不作这样严格的要求, 因而自然地认为以上证明了面 Σ_3 上各点都不是奇异的. 注意当我们取剖面为 $y_{13} < L_{13}, y_{24} < L_{24}, \text{Im } y_{13} = \text{Im } y_{24} = 0$ 面时, $P_{23}P_{34}$ 可能不落在剖面中, 那时便不产生在各个不同方向趋向 $P_{23}P_{34}$ 上的点时对奇异性获得不同结论的情形. 至于 AL , 我们首先看到, 如果 $P_{01}P_{12}$ 是奇异的, 由于夹攻性的传递性, 面 Σ_1 上的点都是奇异的, 所以自 Σ_1 上的点趋向于 AL 时, 奇异性是出现的. 在这些趋向中, $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{24}$ 具有不同符号. 现在 AL 落在剖面中, 因此依照 Tarski 理论第一点, 只消路程绕过顶点奇异点(在此为 $y_{13} = L_{13}, y_{24} = L_{24}$) 时, 在新的路程上趋向于 AL (此时 $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{24}$ 具有相同符号) 时, 奇异性便不出现.

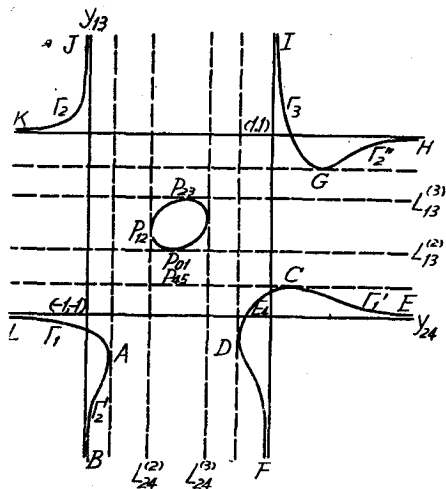


图 7

用这样的方法, Tarski 指出了在 $P_{12}P_{01}$ 不为奇异时, 散射振幅在剖面外是解析的, 亦即在反常临界不存在时, 双色散关系对于这个费曼图是成立的.

在附录 AI 中, 我们企图对于 $N-\pi$ 散射的这个费曼图, 作一个更直接的讨论. 那里, 我们证明当 y 落在 Σ 面上而不落在 LAB 线上时, 相应的 k 都不落在实轴 $(0, 1)$ 段中. 利用这点, 我们证明可以自 $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{14}$ 同符号的某区域开拓至它们, 而不使开拓时对 x 的积分路径 $\Gamma(y_{13}, y_{24})$ 遇到 $k(y)$. 这样便有可能较直接地建立对这个图的双色散关系.

§5. 实平面中一般讨论

现在用第二种参数讨论二个粒子的各级微扰的散射振幅当变数取实值时的一般情形. 所研究的式子为(1.20), 即

$$\int \prod d\alpha_j \frac{[\text{Det } A(\alpha)]^{N-2l-2}}{[D(\alpha, k)]^{N-2l}} \delta(\sum \alpha - 1). \quad (5.1)$$

首先证明所谓“朗道”条件^[12]. 这条件说当上式积分有一支点时, (1.11) 中的 q_j 等可以取以下的值

$$q_j^2 = 0 \quad \text{或} \quad \alpha_j = 0, \quad (\text{对所有的 } j) \\ \sum \alpha_j q_j(\pm) = 0, \quad (5.2)$$

式中的各个 q_j 包含某一个 t_i , 而 $\pm$ 号视 q_j 中所出现的是 $+t_i$ 或是 $-t_i$ 而定. (5.2) 的证明如下.

当奇异性出现时, α_j 满足

$$\alpha_j = 0 \quad \text{或} \quad \partial D(\alpha, k)/\partial \alpha_j = 0, \quad (5.3)$$

使

$$D(\alpha, k) = 0 \quad (5.4)$$

(因 D 为 α 的齐次函数). 因

$$\psi = \sum \alpha_j (q_j^2 - m_j^2 + i\epsilon) = \psi(\alpha, t, k)$$

与 $D(\alpha, k)$ 有关系:

$$D(\alpha k) = [\text{Det } A(\alpha)] \psi(\alpha, -A^{-1}b, k), \quad (5.5)$$

得

$$0 = \frac{\partial D(\alpha, k)}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \text{Det } A(\alpha)}{\partial \alpha_i} \psi(\alpha, -A^{-1}b, k) + \\ + \text{Det } A \left\{ \frac{\partial \psi(\alpha, t, k)}{\partial \alpha_i} \Big|_{t=-A^{-1}b} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=-A^{-1}b} \frac{\partial(-A^{-1}b)}{\partial \alpha_i} \right\}. \quad (5.6)$$

但自(1.23)知曲括号中后一项为零. 又 ψ 在 $t = -A^{-1}b$ 时为 $D(\alpha, k)/\text{Det } A(\alpha)$, 在(5.3)满足时为零. 因此

$$\partial \psi(t, k, \alpha)/\partial \alpha_i \Big|_{t=-A^{-1}b} = 0, \quad (5.7)$$

亦即在 $t = -A^{-1}b$ 时

$$q_j^2 = 0. \quad (5.8)$$

当 $t = -A^{-1}b$ 时, $\partial \psi/\partial t = 0$ 成为

$$\sum \pm \alpha_j q_j = 0,$$

即是(5.2)式. 这样便证明了朗道条件. 显然地, 它是必要的而不是充分的.

討論 $k_1 + k_2 \rightarrow -k_3 + (-k_4)$ 的散射. 由于动量守恒, 变数只有二个, 即

$$s = (k_1 + k_2)^2, \quad t = (k_1 + k_4)^2, \quad u = (k_1 + k_3)^2$$

中任意二个, s, t, u 間有关系:

$$s + t + u = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2,$$

s 为质心系中总能量的方. 当 s, t 为实数时, Eden 給出了許多結果^[13-16], 略述一部分如下:

(i) 散射振幅 F 在物理区中的奇异点 (s_c, t_c) 的 s_c 都是能量 s 的正常临界点. 所謂能量临界 s_c , 具体意义为 (s_c, t) 在不同 t 值下均为 F 的支点. 所謂能量的正常临界乃是指能量等于某一个中間态的总质量时的临界. 証明如下:

令 S 矩陣写为 $1 + iR$, 由 $S^+S = 1$ 得

$$i\langle k_3 k_4 | R - R^+ | k_1 k_2 \rangle = -\sum \langle k_3 k_4 | R^+ | n \rangle \langle n | R | k_1 k_2 \rangle, \quad (5.9)$$

n 代表中間态. 設一奇异点 (s_c, t_c) 自某 l 級的微扰項开始. 討論 (5.9) 的 l 級項. 因为左方在 $s = s_c$ 处有一支点而右方各矩陣元 (級次小于 l) 沒有 (討論时固定 t), 因此右方的中間态中必然有一些項, 在 $s < s_c$ 时不出現, 而在 $s > s_c$ 时出現, 包含了更多粒子. 这說明了为什么 (s_c, t) 为支点, 为什么 (s_c, t) 对不同的 t 可以同时成为支点, 也同时說明了物理区中的支点 (s_c, t_c) 的 s_c 必須为某中間态总质量的方, 使 s_c 成为正常临界.

(ii) 将相应于 $\alpha = 0$ 的内綫縮为一点, 而討論此“約化”的图. 如果原来的图有一能量临界 s_c (意即 (s_c, t) 为支点, 不管 t 取什么值), 則在約化图中, $k_1 k_2$ 必須会合在一点, 不然的話, $k_3 k_4$ 必須会合在一点.

証: 討論相应于約化图的散射振幅, 它也有临界 s_c . 如 $k_1 k_2, k_3 k_4$ 都不会合, 則 (2.5) 含有項

$$\sum (k_i^2) C_i + C_i t + C_i s, \quad (5.10)$$

使支点不仅与 s 有关, 也与 t 有关.

(iii) 能量正常临界点 s_c 必須由約化图中的自能图产生, 亦即在約化图中, $k_1 k_2, k_3 k_4$ 必須分別会合.

証¹⁾: 討論約化图. 自 (ii) 知在約化图中知 $k_1 k_2, k_3 k_4$ 中至少有一对会合. 設 $k_1 k_2$ 会合. 如果 s_c 为某中間态粒子总质量的和的方, 画出这中間态的粒子綫 $q_1, q_2, \dots$ 如图. 因

$$\begin{aligned} (\sum q)^2 &= (k_1 + k_2)^2 = (\sum m)^2, \\ q_i^2 &= m_i^2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

可証 $q_1, q_2, \dots$ 均平行, 取一适当坐标系, 得

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2 = \dots = 0, \quad (5.12)$$

亦即 $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0$. 以 $q_1, q_2, \dots, k_1, k_2, \dots$ 及圈 A 圈 B 中的綫視為电流綫路, 它們的三維动量的任一分量为电流, 則 (5.2) 相应于 Kirchhoff 定理中

$$\sum iR = 0, \quad R > 0. \quad (5.13)$$

考虑圈 A 中各綫的电流. 由于圈 A 的流入的电流为零, 而同时各封閉綫路上无电动势, 則

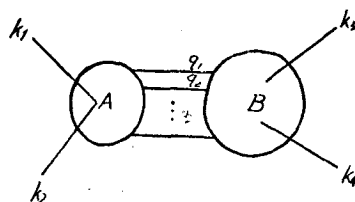


图 8

1) (ii), (iii) 中的証明未見于原文.

知各綫上的电流均为零。如果 k_3, k_4 不会合于一点, 則在圈 B 中某一些綫上电流不为零。以圈 B 中这些綫, $q_1, q_2 \cdots$ 中一些綫, 圈 A 中一些綫构成一封闭綫路, 便看到在这里 (5.13) 不可能成立。为了使 (5.13) 对任何封闭綫路都成立, k_3, k_4 必須短路。这样便完成了所須的証明。

由 (i) 及 (iii), 知物理区中的能量临界都是自能图。

用比強的方法来討論 (5.1) 的 $D(\alpha, k)$, 見 ЛОТНОВ 的工作^[17]。在此不加討論。用朗道条件来求奇异性时, 有时有很多方便, 例如它允許用图解法简单地求出頂角图的反常临界^[18]。

在一般情形下 $D(\alpha, k)$ 的主要性質的一部分介紹如下:

将 $D(\alpha, k)$ 写为

$$f(\alpha)s + g(\alpha)t - k(\alpha, M^2, m^2) \quad (5.14)$$

(M 为外綫质量, m 为內綫质量)。在奇異处

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha'_i} s + \frac{\partial g}{\partial \alpha'_i} t - \frac{\partial k}{\partial \alpha'_i} &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

式中 α' 为某一些 α , α'' 为另一些 α 。由 $D(\alpha, k)$ 对 α 的齐次性, (5.15) 只在 t 为 s 的某函数的情形下有解。由此得

$$t = t(s). \quad (5.16)$$

代入 (5.15), 得

$$\alpha = \alpha(s). \quad (5.17)$$

$t = t(s)$ 在实領域中称为奇異曲綫, 在复領域中称为奇異曲面。

此曲綫的斜率可以简单地求出。因为在曲綫上 $D = 0$, 得

$$\frac{\partial D}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial D}{\partial s} + \frac{\partial D}{\partial \alpha''} \frac{d\alpha''}{ds} = 0,$$

因 $\partial D / \partial \alpha'' = 0$, 得

$$\frac{dt}{ds} = - \frac{\partial D / \partial s}{\partial D / \partial t} = - \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}. \quad (5.18)$$

显然地, 当某些 α' 为零时, $g(\alpha)$ 可以变为零, 此时 (5.15) 給出

$$s = \text{常数}.$$

同样, 可以有 $f(\alpha) = 0$, 使

$$t = \text{常数}, \quad u = \text{常数}$$

等情形, 它們称为奇異綫。

如果 $s = \text{常数}$ 的綫与物理区相交, 根据 (i) 此常数必然为正常临界, 根据 (iii), 知这是由自能图而得来的临界。当此常数小于最小的正常临界时, 他不与物理区相交, 而仅与非物理区相交。此时, 此临界称为反常临界。

可以想象, 如果奇異曲綫与反常正常临界奇異綫相交于一点时, 它們可能在此点相切。因为假设奇異綫 $s = s_c$ 是由于 $\alpha'_i = 0$ 使 $g(\alpha) = 0$ 所引起的, 此时如果奇異曲綫上有一个使 $\alpha'_i = 0$ 的点 P , 則此点的 s, t 满足

$$s \frac{\partial}{\partial \alpha''} f(\alpha' = 0, \alpha'') + t \frac{\partial g(\alpha' = 0, \alpha'')}{\partial \alpha''} - \frac{\partial k}{\partial \alpha''} = 0.$$

因式中第二項为零, 因此 P 点的 s 即是 s_c , 証明了 P 点落在奇异綫上. 又在此点 $dt/ds = -g(\alpha)/f(\alpha) = 0$, 奇异曲綫与奇异綫在 P 点相切. 一般讲来, 如果奇异綫是由于一个 $\alpha' = 0$ 所引起的, 此点 P 是存在的. 注意, 虽然以上并未証明上述的 P 点一定存在, 也不証明奇异綫与奇异曲綫相遇时, 它們一定相切, 但有理由相信上述二层可以用 (对頂点数或內綫数的) 归納法来証明.

当奇异曲綫与正常奇异綫相切时, 相切点在无穷远处, 这是因为当奇异曲綫上的点趋向于正常奇异綫时, 图形趋近于自能, 因此 $g(\alpha)$ 中有二串 α 趋近于短路. 令这二串 α 为 $\alpha'_1 \alpha''_1, \alpha'_1 \alpha''_1, \dots, \alpha'_2 \alpha''_2, \alpha'_2 \alpha''_2 \dots$, 可証 $g(\alpha)$ 为許多項 $\alpha_1^{(i)} \alpha_2^{(j)}$ 之和^[13]. 在

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1^{(i)}} s + \frac{\partial g}{\partial \alpha_1^{(i)}} t - \frac{\partial k}{\partial \alpha_1^{(i)}} &= 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_2^{(j)}} s + \frac{\partial g}{\partial \alpha_2^{(j)}} t - \frac{\partial k}{\partial \alpha_2^{(j)}} &= 0, \end{aligned}$$

式中令二串 α 均 $\rightarrow 0$, 因 g 中各項含有形如 $\alpha_1^{(i)} \alpha_2^{(j)}$ 的因子, 故 $\partial g / \partial \alpha_1^{(i)} \rightarrow 0, \partial g / \partial \alpha_2^{(j)} \rightarrow 0$, 因此为满足上式起見, $t \rightarrow \infty$, 亦即相切点在无穷远处.

以上所談的奇异綫, 奇异曲綫在 s, t 取复值时成为奇异平面, 奇异曲面. 必須指出, 虽然它們被称为奇异的, 但它們上的点不一定是奇异点 (至少在某个里曼叶中是如此的), 因为与它們相应的临界 α 不一定具有夹攻的性质, 更不一定落在相应的 α 的积分路径上.

这里引入一个名詞——多余轉折点. 即一些使 $f(\alpha)$ (或 $g(\alpha)$) 为零的重迭奇异点, 而这里的 $f(\alpha) = 0$ 不是由于少数 α 等于零所引起的. 我們将在下节叙述 Eden 如何企图在反常临界及多余轉折点不存在时証明双重色散关系的成立. Eden 也討論了如何証明反常临界及多余轉折点的存在.

§ 6. 双重色散关系的証明

在此所需要証明的为散射振幅 $F(s, t)$ 可以开拓至 s, t 的复区域中, 成为 $F(z_1, z_2)$, 而

$$F(z_1, z_2) = \iint \frac{A(z'_1, z'_2)}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_2)} dz'_1 dz'_2, \quad (6.1)$$

式中积分下限为正常临界, 上限为 ∞ . 当然, 双重色散关系式中共有三个双重积分, 而由一个双重积分的討論适应至三个双重积分, 也不是太简单的. 目前, 暫討論(6.1)式.

首先在微扰論中在反常临界, 多余轉折点不存在的情形下証明单色散关系的成立. 令 t 的最小正常临界为 t_1 , 令 t 在 (t_2, t_1) 間沒有反常临界, 多余轉折点. 証明 $F(z_1, t)$ 在 $t_2 < t < t_1, z_1 = s_1 + is_2, s_2 > 0$ 处的解析性的方法如下¹⁾:

当 $t_2 < t < t_1, s_1 + is_2 (s_2 > 0)$ 为奇异点时, 便存在 α , 使

$$\begin{aligned} D(\alpha, s_1 + is_2, t) &= (s_1 + is_2)f(\alpha) + tg(\alpha) - k(\alpha) = 0, \\ \partial D / \partial \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

1) 原文与此不同, 討論了外綫質量全为 m 而小于內綫质量的情形. 証明利用了 D 在 $s > 0, t > 0, a > 0$ 中 $D < 0$ 的事实, 此时 $t_1 = 4m^2, t_2 = 0$.

由此得

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0, \quad \partial f / \partial \alpha = 0, \\ \operatorname{tg}(\alpha) - k(\alpha) &= 0, \quad t(\partial g / \partial \alpha) - \partial k / \partial \alpha = 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

已知在 $t_2 < t < t_1$ 中没有对 t 的临界及多余转折点, 因此不存在 $s, t, \alpha, t_2 < t < t_1$, 使

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 0, \quad \operatorname{tg}(\alpha) - k(\alpha) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} s + \frac{\partial g}{\partial \alpha} t - \frac{\partial k}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned} \quad (6.4)$$

因此不存在 α, t 使 (6.3) 满足. 由此获得所需要的证明.

在外线质量均为 m 而小于内线质量的情形 (称为等质量情形) 下, 可证奇异曲线必须

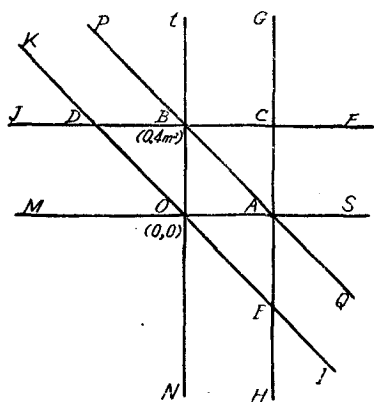


图 9

落于 st 图中的 GCF, EHI, KJD 等区域中 (图 9). 这是因为 OAB 是欧氏区, 在此中 $D < 0$, ASQ, PBT, OMN 是物理区, 又因奇异曲线不与它们相交, 所以奇异曲线分为几支, 例如有一支在 $tBAQ$ 的上下方. 如果这一支有一部份落在 $FBCAS$ 中, 它的最低点满足

$$f(\alpha) = 0, \quad \operatorname{tg} - k(\alpha) = 0. \quad (6.5)$$

但已知在 OAB 中, $D < 0$, 亦即在 OB 上, $D < 0$, 亦即在 $0 < t < 4m^2$ 处 ($OB = OA = 4m^2$), 对任意在 (91) 中的 α

$$\operatorname{tg} - k(\alpha) < 0,$$

与 (6.5) 矛盾. 如果不讨论质量有以上的限制时, 只消假定没有多余转折点及反常临界, 因此在 $FCBAS$ 中不存在 $f(\alpha) = 0$ 的点.

为了证明 (6.1) 的成立, 我们看到 (对于等质量的情形)

$$F(s, z_2) = \frac{1}{2m} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{F(s, t + i\epsilon') - F(s, t - i\epsilon')}{t - z_2} dt. \quad (6.6)$$

在 $0 < s < 4m^2$ 处成立. 其实, (6.6) 还有一项

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^t \frac{F(s, t + i\epsilon') - F(s, t - i\epsilon')}{t - z_2} dt,$$

将不在此讨论. 如果在 $0 < t < 4m^2$ 时成立的

$$F(z_1, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s + i\epsilon, t)}{t - z_1} ds \quad (z_1 \text{ 在上半平面}) \quad (6.7)$$

可以被证明非但对 t 在 $0 < t < 4m^2$ 时有效, 而且也在 $t = \operatorname{Re} t \pm i\epsilon', \operatorname{Re} t > 4m^2$ 时有效, 那末在 (6.6) 式中, 我们可以对 s 开拓至上半平面. 事实上, 以 $t = \operatorname{Re} t \pm i\epsilon'$ 的 (6.7) 式代入 (6.6) 式, 即获得类似 (6.1) 的式子.

为此 Eden 用了所谓“解析完成法”. 这方法的精神是: 如果函数 $G(z_1, t)$ 对 t 连续, 在面 $t = f(z_1)$ 的某方 (姑令之为 $t < f(z_1)$) 对复变数 z_1 解析, 使在 t 足够小时

$$G(z_1, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{G(z'_1, t)}{z'_1 - z_1} dz'_1 \quad (6.8)$$

成立(τ 为 z_1 空間的某封閉路程, 包围了某区域 D), 那末如果积分路程上各点的 $G(z_1, t)$ 在 t 增加时不变为奇异, $G(z_1, t)$ 在区域 D 中保持为解析. 理由是: 令 t' 为使 $G(z_1, t)$ 在 D 中失去全部解析性的最小的 t . 由 $G(z_1, t)$ 及任意解析函数 $H(z_1)$ 所构成的

$$\oint_{\tau} G(z_1, t') H(z_1) dz_1$$

如果視為 $t \rightarrow t' (t < t')$ 的极限, 應該为零, 但自 t' 的定义, $G(z_1, t')$ 的非全部解析性, H 的任意性, 應該不恆为零. 由此得一矛盾. 由此知 t' 不存在, 亦即面 $t = f(z)$ 对于 $t < f(z)$ 的区域而言必須是凹的.

用这个精神, Eden 令(6.7)式中的 t , 自小于 $4m^2$ 的某处出发, 变为 $\text{Re } t + i\epsilon'$, 再令 $\text{Re } t$ 超过 $4m^2$ 而变至无穷大. 为使(6.7)对这些 t 成立, 只消証明 $|z_1| = R$ (R 为某大数) 的半圓及 $\text{Im } z_1 = i\epsilon$ 的直綫在 t 变化时不遇到 $F(z_1, z_2)$ 的奇异点. 他討論了这問題与奇异曲綫的形状的关系. 如果只討論 $\text{Im } z_1 = i\epsilon$, $\text{Re } z_1 > 0$ 的一段直綫是否遇到 $F(z_1, z_2)$ 的奇异点, 那末只消証明奇异曲綫的有关部分 (即 $s > 0$, $t > 0$ 段) 滿足 $ds/dt < 0$ 即行. 为此, 他証明了奇异曲綫不能猝然中断, 它的两端必然有一漸近于 $s = 4m^2$, $t = \infty$, 另一漸近于 $t = 4m^2$, $s = \infty$, 而曲綫上沒有 $ds/dt = 0$ 或 $dt/ds = 0$ 的点. 事实上, 如果有 $dt/ds = 0$ 的点, 那末当 t 自 $4m^2$ 逐漸增加时, $\text{Im } z_1 = 0$ 綫所遇到第一个滿足 $dt/ds = 0$ 的点滿足 $d^2t/ds^2 > 0$. 称此点为 $\bar{t}$, 在遇到此点 $\bar{t}$ 前, $dt/ds < 0$, $G(z_1, t)$ 保持解析, 但奇异曲面在 $\bar{t}$ 点向 $\text{Re } t < \bar{t}$ 的复区域伸出, 有一部份走入 z_1 的上半平面, 使 $G(z_1, t)$ 在 $t < \bar{t}$ 处不解析. 由此得一矛盾, 知 $dt/ds = 0$ 点不存在.

用这样的方法, Eden 討論了外綫質量相同而小于內綫質量的情形, 又討論了一般質量的但不具有反常临界的情形, 証明了双色散关系. 在第四篇論文^[16]中, 他利用对外綫質量的解析性, 証明了只消最低級 (即四級) 图中沒有反常临界, 双色散关系便能在微扰論中成立.

注意在这里實質上已經提出色散关系 (6.7) 对任何动量輸送的成立問題. 这一点是極強的, 为此, 我們企图作一个不用微扰論的証明. 証明当然是不严格的, 而仅是指出其可能而已.

Landshoff, Sreaton, Polkinghorne^[19] 提供了双色散在反常临界不存在时的另一个証明. 他們利用对頂点数 (或內綫数) 的数学归納法. 他們指出, 滿足条件

$$\partial D / \partial \alpha = 0, \quad D = 0$$

的面 $\Sigma: f(z_1, z_2) = 0$ (z_1, z_2 为 s, t 取复值时的符号) 是全部相联的. 因此依照 Tarski, 除非有剖面將它們分开, 面上一点的夹攻性带来面上其他点上的夹攻性, 面上一点的非夹攻性带来面上其他点的非夹攻性, 因此全面完全是奇异的或非奇异的. 假定将图形部分短路后所得新图的面 Σ 是完全非奇异的 (除开由于正常临界而引入的剖面的周围及其中的某曲綫), 那末唯一可以用来分割 Σ 面的是由于正常临界而引入的剖面 (称为正常剖面). 在引入正常剖面后, Σ 分为許多块. Landshoff 等証明可以将这些块用在 Σ 中的曲綫逐对地联接起来, 联接綫可以在剖面稍有改变后避免遇到剖面, 而联接綫的方向不是在約化的低級图中具有奇异性的, 而相互被联接的許多块中有一块的 z_1, z_2 取小值, 落在 Symanzik 理論可援用的范围中. 这样, 他們声称証明了 Σ 面上每一点都不是奇异的,

(在剖面中的点除外).

由于证明的简单, 这个证明是值得注意的.

对于 Eden 的证明, 曾有人举出反例^[22], 也是值得注意的.

双重色散关系在应用时还涉及么正条件. 附录 AII 给出了一个等价于么正条件的提法, 在那里避免了散射振幅的二次型的出现, 可能在微扰论的讨论中带来一些方便.

最后, 作者愿对朱洪元同志, 戴元本同志的多方帮助, 表示最大的谢意, 没有他们的帮助, 本文是不能完成的.

附 录 AI.

AI. 最简单四个图的解析性

讨论

$$\begin{aligned} F(y_{13}, y_{24}) &= \int \cdots \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \frac{\delta(\sum x - 1)}{[D(x_1 x_2 x_3 x_4)]^2} = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \int_0^{1-x_1-x_2} dx_3 \frac{1}{[D(x_1, x_2, x_3)]^2}, \\ &\quad \left(-D = \sum x_i^2 + 2 \sum_{i>j} x_i x_j y_{ij} \right) \end{aligned} \quad (\text{AI.1})$$

对 y_{13}, y_{24} 的解析性. 当我们把 y_{13}, y_{24} 自某处 $l_1 + i\epsilon_1, l_2 + i\epsilon_2$ ($\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$) 开拓至所讨论点 y_{13}, y_{24} 时, 积分路径也随之而变为 $\tau(y_{13}, y_{24})$. 在以下我们只讨论 $N-\pi, N-N$ 散射.

首先证明当 y_{13}, y_{24} 落在奇异曲面上点时, 相应的 x_i (即临界 x) 均不落在 $(0, 1)$ 的实轴段中, 除非 y_{13}, y_{24} 为实数而同时满足 $y_{13} < -1, y_{24} < -1$. 为此, 令 $\omega_{ij} = 1 - y_{ij}$,

$$\begin{aligned} -D(x_1, x_2, x_3) &= 2\omega_{14}x_1^2 + 2\omega_{24}x_2^2 + 2\omega_{34}x_3^2 + \\ &\quad + 2(\omega_{14} + \omega_{24} - \omega_{12})x_1x_2 + \cdots - \\ &\quad - 2\omega_{14}x_1 - 2\omega_{24}x_2 - 2\omega_{34}x_3 + 1. \end{aligned} \quad (\text{AI.2})$$

x_{1c}, x_{2c}, x_{3c} 满足

$$\partial D / \partial x_1 = \partial D / \partial x_2 = \partial D / \partial x_3 = 0, \quad (\text{AI.3})$$

由此得

$$\begin{aligned} x_{ic} &= \frac{1}{d} \sum_{jkl} \left\{ \omega_{ij} \left(-\frac{1}{2} \omega_{kl}^2 + \omega_{ik}\omega_{kl} \right) - \frac{1}{3} \omega_{ik}\omega_{kl}\omega_{lj} \right\}, \\ d &= -\frac{1}{2} \sum \omega_{ij}\omega_{kl}^2 + \sum \omega_{ij}\omega_{ik}\omega_{kl} - \frac{1}{3} \sum \omega_{ik}\omega_{kl}\omega_{lj}. \end{aligned} \quad (\text{AI.4})$$

式中 i, j, k, l 为 1, 2, 3, 4, 均不相等. 对于 $N-\pi$ 散射, 令 P_{41}, P_{12} 为核子线, P_{23}, P_{34} 为介子线, 得

$$\begin{aligned} y_{12} &= y_{41} = \mu/2M, \\ y_{23} &= y_{34} = 1 - (\mu^2/2M^2), \end{aligned} \quad (\text{AI.5})$$

于是

$$x_{1c} = \frac{\omega_{24}}{d} (-\omega_{13}\omega_{24} + 2c_2\omega_{13} + 2c_1c_2 - 2c_2^2),$$

$$\begin{aligned}
x_{3c} &= \frac{\omega_{24}}{d} (-\omega_{13}\omega_{24} + 2c_1\omega_{13} + 2c_1c_2 - 2c_1^2), \\
x_{2c} &= x_{4c} = (\omega_{13}\omega_{24}/d) (c_1 + c_2 - \omega_{13}), \\
d &= 2\omega_{24}(-\omega_{13}\omega_{24} - c_1^2 - c_2^2 - \omega_{13}^2 + 2c_1c_2 + 2c_1\omega_{13} + 2c_2\omega_{13}), \\
c_1 &= 1 - \mu/2M, \quad c_2 = \mu^2/2M^2.
\end{aligned} \quad (\text{AI.6})$$

此时(3.16)所定义的 Δ 为

$$\begin{aligned}
\Delta &= \omega_{24}\{-\omega_{24}\omega_{13}(2 - \omega_{13}) - 2\omega_{13}^2 + 4(c_1 + c_2)\omega_{13} - \\
&\quad - 2(c_1 - c_2)^2 - 4c_1c_2\omega_{13}\},
\end{aligned} \quad (\text{AI.7})$$

因此 $\Delta = 0$ 成为

$$\omega_{24} = 0, \quad (\text{AI.8})$$

或

$$\omega_{24} = \frac{1}{\omega_{13}(2 - \omega_{13})} \{-2\omega_{13}^2 + 4(c_1 + c_2)\omega_{13} - 2(c_1 - c_2)^2 - 4c_1c_2\omega_{13}\}. \quad (\text{AI.9})$$

在(AI.9)情形下,

$$\begin{aligned}
x_{1c} &= \frac{(1 - c_1)\omega_{13} - c_1 + c_2}{\omega_{13}(\omega_{13} - c_1 - c_2)}, \quad x_{3c} = \frac{(1 - c_1)\omega_{13} - c_2 + c_1}{\omega_{13}(\omega_{13} - c_1 - c_2)}, \\
x_{2c} &= x_{4c} = \frac{\omega_{13} - 2}{2(\omega_{13} - c_1 - c_2)}.
\end{aligned} \quad (\text{AI.10})$$

在(AI.8)情形下,

$$\begin{aligned}
x_{1c} &= \frac{-c_2(\omega_{13} + c_1 - c_2)}{(c_1 - c_2)^2 + 2(c_1 + c_2)\omega_{13} + \omega_{13}^2}, \quad x_3 = \frac{-c_1(\omega_{13} + c_2 - c_1)}{\dots}, \\
x_{2c} &= x_{4c} = \frac{-\omega_{13}(c_1 + c_2 - \omega_{13})}{\dots}.
\end{aligned} \quad (\text{AI.11})$$

不难验证在(AI.6)下,

$$-Dd = \Delta, \quad (\text{AI.12})$$

因此 $\Delta = 0$ 时 D 也等于零.

设 (y_{13}^0, y_{24}^0) 为在 $\Delta = 0$ 面上的而同时满足 $\text{Im } y_{13}^0 \neq 0$ 的一点. 让我们讨论能否自 $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{24}$ 同符号的某点起始, 沿某路径开拓至 (y_{13}^0, y_{24}^0) , 而与路程中任一点 (y_{13}, y_{24}) 相应的 x 积分路径 $\tau(y_{13}, y_{24})$ 满足

$$\begin{aligned}
\text{Im } x_1 &= 0, \\
0 < \text{Re } x_1 < 1
\end{aligned} \quad (\text{AI.13})$$

的条件. 限定用上述类型的 $\tau(y_{13}, y_{24})$ 后, y 的奇异点应由下式决定:

$$\begin{aligned}
\partial D(x_1, x_2, x_3)/\partial x_2 &= 0, \quad \partial D/\partial x_3 = 0, \\
D(x_1x_2x_3, y) &= 0,
\end{aligned} \quad (\text{AI.14})$$

$$\text{Im } x_1 = 0, \quad 0 < \text{Re } x_1 < 1, \quad (\text{AI.15})$$

意即奇异点 y 的值应与某些 x 共同满足上式. 上述的 y 在四维空间中所占的流形正与三维空间中仅在

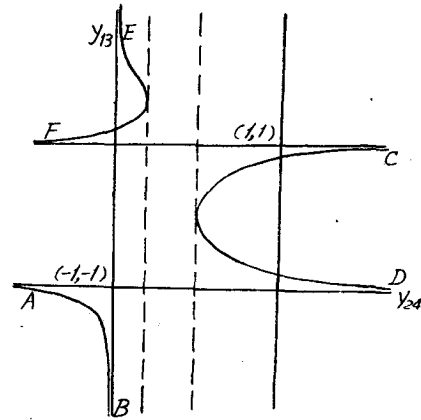


图 10

一方向趋向于无穷大的曲面相似。对于后者我们看到总可以画一曲綫联接三維空間不在此曲面上的二点而使此曲綫不经过此曲面。因此, 除非 (y_{13}^0, y_{24}^0) 本身即在此流形中, 我們总可以找到一路径自某起始点开始繞过流形而到达 (y_{13}^0, y_{24}^0) , 可以証明 (y_{13}^0, y_{24}^0) 不在此流形中。因为当 $\Delta = 0$ 时,

$$\frac{\partial D(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial D(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial x_3} = \frac{\partial D}{\partial x_4} = 0 \quad (\text{AI.16})$$

中只有三个是独立的。因此在方程組 (AI.3)

$$\frac{\partial D(x_1 x_2 x_3 x_4)}{\partial x_1} - \frac{\partial D}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial x_2} - \frac{\partial D}{\partial x_4} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial x_3} - \frac{\partial D}{\partial x_4} = 0$$

及

$$0 = 2D(x_1 x_2 x_3 x_4) = \sum x_i (\partial D / \partial x_i) \quad (\text{AI.17})$$

中只有三个是独立的。因此方程組 (AI.3) 及 (AI.14) 对于 $\Delta = 0$ 面上的 y 决定同样的 x 。(AI.14) 所决定的 x_1 亦即 (AI.3) 所决定的 x_1 , 即 (AI.10), (AI.11) 式所給的 x_1 , 在 $\text{Im } \omega_{13} = -\text{Im } y_{13} \neq 0$ 时不是实数, 因此不满足 (AI.15), 因而不在此流形中。

至于 $\Delta = 0$ 面上 $\text{Im } \omega_{13} = 0$ 的点, 分开 (AI.8), (AI.9) 来討論。对于后者不难看到, 对于 $y_{13} > 1$ 段 (图 10 中 FE 段), $x_{1c} < 0$, 对于满足 $-1 < y_{13} < 1$ 段 (图中 CD 段), x_2 或者大于 1, 或者小于零。对于前一段, 討論同前。对于后一段, 只消将 (AI.15) 改为

$$\text{Im } x_2 = 0, \quad 0 < \text{Re } x_2 < 1 \quad (\text{AI.18})$$

而重复以前的討論。对于 $y_{13} < -1$ 的段 (图中的 AB 段), x_{1c}, x_{2c}, x_{3c} 均落在 $(0, 1)$ 段中, 因此用 $\text{Im } y_{13}, \text{Im } y_{24}$ 同符号的点所构成的路程 (相应的 $\tau(y_{13} y_{24})$ 均为实軸) 趋向 AB 上的点, 便看到了 AB 上的奇异性。

至于 $\Delta = 0$ 面上满足 $\omega_{24} = 0$ 的点, 在一般情形下, $D \neq 0$, 因此无庸討論。 $D = 0$ 时 ω_{13} 只取二个值:

$$\omega_{\pm} = c_1 + c_2 - c_1 c_2 \pm [c_1 c_2 (2 - c_1)(2 - c_2)]^{\frac{1}{2}}.$$

不难証明

$$\begin{aligned} \omega_+ &> c_1 + c_2, \\ -c_1 + c_2 &< \omega_- < c_1 - c_2; \end{aligned}$$

将该处的 x_c 写为

$$\begin{aligned} x_{1c} &= \frac{\omega_{13} + c_1 - c_2}{2c_1\omega_{13}}, \quad x_{3c} = \frac{\omega_{13} - c_1 + c_2}{2c_2\omega_{13}}, \\ x_{2c} &= x_{4c} = \frac{c_1 + c_2 - \omega_{13}}{2c_1c_2}, \end{aligned}$$

可見在 $\omega_{13} = \omega_{\pm}$ 时, x_{1c}, x_{2c}, x_{3c} 中至少有一个取負值。因此重复以上的討論后, 我們証明可以开拓至 $\omega_{24} = 0$ 的各点上。

根据以上所述, 开拓至 $\Delta = 0$ 面上各点 (AB 段除外) 是可能的, 路径只須避免遇到由 (AI.14, 15) 所决定的或由 (AI.14, 18) 所决定的或由 (AI.14) 及

$$\text{Im } x_3 = 0, \quad 0 < \text{Re } x_3 < 1$$

所决定的流形。这些流形都象三維空間中只在—方向趋向于无穷大的曲面, 相交于 AB 綫, 所以在引入包含 AB 的剖面使 F 在余下的 y 空間中解析, 似乎是可能的。当这个剖面

证明可取为 $\text{Re } y_{13} < -1$, $\text{Im } y_{13} = 0$ 面及 $\text{Re } y_{24} < -1$, $\text{Im } y_{24} = 0$ 面时, 对这个费曼图而言, 双重色散的证明便成立了¹⁾.

自剖面的形状, 知

$$F(y_{13}, y_{24}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^{-1} \frac{dy'_{13} dy'_{24}}{(y'_{13} - y_{13})(y'_{24} - y_{24})} [F(y'_{13} + i\epsilon, y'_{24} + i\epsilon') - F(y'_{13} + i\epsilon, y'_{24} - i\epsilon') - F(y'_{13} - i\epsilon, y'_{24} + i\epsilon') + F(y'_{13} - i\epsilon, y'_{24} - i\epsilon')]. \quad (\text{AI.19})$$

如果 AB 为谱函数的边界, 方括号中项应在 AB 的右上方为零, 在 AB 的左下方不为零. 这样, 便得了双重色散关系.

以上的有些讨论是与 D 的具体形式, x 的具体数值等无关, 似乎看来可以推广至其他的图.

附 录 AII.

在 § 6 中, 我们曾指出在 Eden 的理论中, 散射振幅在 $t > 4m^2$ 时有否对能量方 s 的色散关系, 实质上已被引入. 为此, 我们在此企图用场论的方法对此作一个不严格的证明.

将 s 矩阵元写为(讨论对象为核子介子散射)

$$1 + i(q_0 q'_0 p_0 p'_0)^{-\frac{1}{2}} T \delta(p + q - p' - q'),$$

T 在物理区中等于推迟振幅^[16]:

$$M_R(E) = \pi(p_0 p'_0)^{\frac{1}{2}} i \int \exp \{i E x_0 - i \mathbf{e} \mathbf{x} (E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}\} \theta(x_0) \times \\ \times \langle p' | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(-\frac{x}{2}\right) \right] | p \rangle d^4 x, \quad (\text{AII.1})$$

式中 p, q, p', q' 为核子介子散射前后的动量, $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{q}$ 取为

$$\mathbf{p} = (0, 0, p), \quad \mathbf{p}' = (0, 0, -p), \\ \mathbf{q} = -\mathbf{p} + (E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}, \quad (\text{AII.2})$$

$\mathbf{e}$ 为一与 $\mathbf{p}$ 相垂直的单位向量, 可以取为 $(1, 0, 0)$. 令标志核子自旋的变数为螺旋性 s, s' , $(s, s' = \pm \frac{1}{2})$. 现在令 $D(x)$ 为波函数在系统绕子轴作旋转(角为 x) 时所承受的变换, 那末

$$\langle p's'q' | S | psq \rangle = D^{-1}(x) \langle p's'q' | S | psq \rangle D(x) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-1}(x) \langle p's'q' | S | psq \rangle D(x), \quad (\text{AII.3})$$

因此, 如果将 $\mathbf{x}$ 写为

$$\mathbf{x} = r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

我们可以将 (AII.1) 中所出现的

$$\exp(-i \mathbf{e} \mathbf{x} (E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)^{\frac{1}{2}}) = \exp(-ir \sin \theta \cos \varphi (E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)^{\frac{1}{2}})$$

1) 在 CD 段上, x_{1c}, x_{2c}, x_{3c} 不全落在 $(0,1)$ 中是显然的. 因为依照 § 3, 如果在那里 (AI.3) 成立而 x_c 落在 $(0,1)$ 中, 亦即 $-D$ 的最小值所在落在 $(0,1)$ 中时, 我们得 $-D > 0$.

換为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-ir \sin \theta \cos(\varphi - x)) e^{-ix(s+s')} dx = \\ = e^{-i(s+s')\varphi} J_{(s+s')}[-(E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} r \sin \theta]. \end{aligned} \quad (\text{AII.4})$$

現在可援用 Oehme 的一篇論文^[17]中的方法来討論 M_R 能否开拓至 E 的上半平面。这种方法的主要点是：如果在 $\xi_0 < 0$ 时

$$\int M_R(E) e^{-iE\xi_0} dE = 0, \quad (\text{AII.5})$$

那末 $M_R(E)$ 可以开拓至上半平面。現在，在 $s + s' = 0$ 时

$$\begin{aligned} \int M_R(E) e^{-iE\xi_0} dE = \int d^4x \pi(p_0 p'_0)^{\frac{1}{2}} i \langle p' | [\dots] | p \rangle \times \\ \times \int dE e^{iE(x_0 - \xi_0)} J_0[(E^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta r]. \end{aligned} \quad (\text{AII.6})$$

以

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt \quad c > 0 \quad (\text{AII.7})$$

代入，先对 E 进行积分，得

$$\begin{aligned} \int M_R(E) e^{-iE\xi_0} dE = \int d^4x \pi(p_0 p'_0)^{\frac{1}{2}} i \langle p' | [\dots] | p \rangle \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-1} \exp\left\{t + \frac{(\mathbf{p}^2 + m^2) r^2 \sin^2 \theta}{4t} - \frac{(x_0 - \xi_0)^2 t}{r^2 \sin^2 \theta}\right\} \times \\ \times \left(\frac{4t}{r^2 \sin^2 \theta}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} dt. \end{aligned} \quad (\text{AII.8})$$

当被积項不为零时，

$$x_0 > |\mathbf{x}| > r \sin \theta,$$

因此当 $\xi_0 < 0$ 时，

$$(x_0 - \xi_0)^2 / r^2 \sin^2 \theta > 1,$$

因此取 c 适当的大，(AII.8) 右方趋近于零。同样地討論 $s + s' = \pm 1$ 的情形。

当 E 在上半平面时，我們有

$$M_R(E) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{M_R(E')}{E' - E} dE'.$$

同样可証超前振幅在下半平面解析，对于上半平面的 E 点，

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{M_A(E')}{E' - E} dE',$$

相減，得所須要的色散关系。

这个証明缺点为 $M_R(E)$ 在实軸上含有一极点，使它不是平方可积的函数。这一点可以利用引入一个算符作用于 M_R 上消去此极点而解决。証明优点为不要求对 $\mathbf{p}^2$ 有所限制。但問題也正在此点。証明不能反映出散射振幅在 t 的实平面上在大于 $4m^2$ 处有不連續性。

附录 AIII. 描写么正条件的另一种方式

在这里, 让我们指出, 在物理区中某些海森堡算符的自轭性可以带来此区域中的么正条件. 为具体起见, 仍然讨论核子介子散射:

$$ps + q\rho \rightarrow p's' + q'\rho', \quad (\text{AIII.1})$$

式中 ρ, ρ' 为同位旋指标, s, s' 为自旋指标, 其他为动量. 此时

$$S = 1 + iT, \quad (\text{AIII.2})$$

而在物理区中,

$$T = i \frac{\pi}{(q_0 q'_0)^{1/2}} \delta(p + q - p' - q') \int \theta(x_0) e^{i(q+q')x/2} \langle p's' | \left[j_{\rho'} \left(\frac{1}{2} x \right), j_{\rho} \left(-\frac{1}{2} x \right) \right] | ps \rangle d^4 x. \quad (\text{AIII.3})$$

$$(qx = q_0 x_0 - q_1 x_1 - q_2 x_2 - q_3 x_3)$$

将上式右方以 M_R 代表之, 写下恒等式:

$$i(M_R - M_A) = -2A, \quad (\text{AIII.4})$$

式中 M_A 为以 $-\theta(-x_0)$ 代替 $\theta(x_0)$ 的 (AIII.3) 右方, $2A$ 为取去 $i\theta(x_0)$ 的 (AIII.3) 右方. 只消证明

$$M_A = T^+, \quad (\text{AIII.5})$$

$$2A = T^+ T, \quad (\text{AIII.6})$$

即可自此及 (AIII.4) 获得么正条件:

$$i(T - T^+) = -T^+ T. \quad (\text{AIII.7})$$

当 i 等为自轭时, $[j, j]$ 为反自轭, 因此

$$T^+ = M_R^\dagger = -\frac{\pi i \delta(\dots)}{(q_0 q'_0)^{1/2}} \int \theta(x_0) e^{-i(q+q')x/2} \langle p's' | \left[j_{\rho'} \left(-\frac{x}{2} \right), j_{\rho} \left(\frac{x}{2} \right) \right] | ps \rangle d^4 x. \quad (\text{AIII.8})$$

以 $-x$ 代 x , 得

$$T^+ = -\frac{\pi i \delta(\dots)}{(q_0 q'_0)^{1/2}} \int \theta(-x_0) e^{i(q+q')x/2} \times \langle p's' | \left[j_{\rho'} \left(\frac{x}{2} \right), j_{\rho} \left(-\frac{x}{2} \right) \right] | ps \rangle d^4 x, \quad (\text{AIII.9})$$

亦即证明了 (AIII.5). 其次将 $\langle n | T | psq\rho \rangle$ 写为

$$-i \int d^4 x \langle n | j_{\rho}(x) | ps \rangle \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2q_0)^{1/2}} e^{-iqx} j_{\rho} = \left(\mu^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots \right) \varphi_{\rho} \quad (\text{AIII.10})$$

(φ 为介子场), 获得

$$T^+ T = \iint d^4 y d^4 x \langle p's' | j_{\rho'}(y) | n \rangle \langle n | j_{\rho}(x) | ps \rangle \times \times \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(4q_0 q'_0)^{1/2}} e^{-iqx+iq'y}, \quad (\text{AIII.11})$$

与 2A 式中 $j_\rho(x/2)j_\rho(-x/2)$ 項所贡献相同。 $j_\rho(-x/2)j_\rho(x/2)$ 項在物理区中无贡献, 因而以上証实了 (AIII.6)。

由以上可見么正条件可以为 j 的自軔性所代替。自后者可以求出

$$\lim_{+i\epsilon} T_{p's'q'\rho', p'sq\rho}^* = \lim_{+i\epsilon} T_{ps-q'\rho', p's'-q\rho}, \quad (\text{AIII.12})$$

式中 $+i\epsilon$ 指 T 的第三指标及第七指标的和的时间分量如何趋向于实軸。利用对时空反演的不变性, 得

$$\lim_{+i\epsilon} T_{p's'q'\rho', p'sq\rho}^* = \lim_{+i\epsilon} T_{p'-s'-q\rho, p-s-q'\rho'} \eta_\rho \eta_{\rho'}, \quad (\text{AIII.13})$$

式中 $\eta_\rho \eta_{\rho'}$ 为場 $\phi_\rho, \phi_{\rho'}$ 在时空反演下所获得的相因子。于是么正条件可以用 (AIII.13) 的态态出現, 它在微扰論中的討論中可以比原来的 (AIII.7) 较为方便。

注意交叉对称为

$$\lim_{-i\epsilon} T_{psq\rho, p's'q'\rho'} = \lim_{+i\epsilon} T_{ps-q'\rho', p's'-q\rho}$$

与上式 (AIII.13) 不同。它不涉及 j 的自軔性。

参 考 文 献

- [1] Nambu, Y. N. C. **6** (1957), 1064.
- [2] Nambu, Y. N. C. **9** (1958), 610.
- [3] Symangik K. *Prog. Theo. Phys.* **20** (1958), 690.
- [4] Karplus, Sommerfeld, Wichman *Phys. Rev.* **111** (1958), 1187.
- [5] Karplus, Sommerfeld, Wichman *Phys. Rev.* **114** (1959), 376.
- [6] Tarski J. *J. Math. Phys.* **1** (1960), 149.
- [7] Blankenbecler, R. Nambu Y. N. C. **18** (1960), 595.
- [8] Blankenbecler, R. Cook L. *Phys. Rev.* **120** (1960), 119, 1745.
- [9] Landshoff P. V., Treiman S. B. N. C. **19** (1961) 1249.
- [10] Screation G. R. N. C. **15** (1960), 925.
- [11] Screation G. R., Polkinghorne J. C. N. C. **15** (1960), 289.
- [12] Landau L. D. *Nuclear physics*, **13** (1959), 181.
- [13] Eden R. J. *Phys. Rev.* **119** (1960), 1769.
- [14] Eden R. J. *Phys. Rev.* **120** (1960), 1514.
- [15] Eden R. J. *Phys. Rev.* **121** (1961), 1567.
- [16] Eden, Landshoff, Polkinghorne, Taylor. *Phys. Rev.* **122** (1961), 307.
- [17] Лотнов 联合原子核研究所单印本
- [18] Taylor J. C. *Phys. Rev.* **117** (1960), 261.
- [19] Landshoff P. V., Screation G. R., Polkinghorne J. C. N. C. **19** (1961), 939.
- [20] Боголюбов Н. Н., Ширков Л. В. введение в теорию квантованных полей.
- [21] Oehme R. *Phys. Rev.* **100** (1955), 1503.
- [22] Nakanishi *Prog. Theo. Phys.* **25** (1961), 155.
- [23] 张宗燧 物理学报 **17** (1961), 1.

ANALYTICITY OF PERTURBATION EXPANSIONS

T. S. CHANG

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

A short review on recent works on the analytic properties of perturbation expansions including those of Tarski, Eden is given. In the appendix, a number of related problems are discussed. In appendix 1, it is explicitly shown that for $N-\pi$, $N-N$ scattering, the critical α for all points on the surface of singularities for the simplest 4-pt diagram lies entirely outside the interval (01) of the real axis, except those α corresponding to points on the curve of singularities as required by the Mandelstamm's theory. In appendix 2, a heuristic proof of the single dispersive relation independent of the momentum transfer is provided. The proof rests on averaging over the azimuthal angle of meson momentum while the unclear momentum is oriented along the polar axis (here Breit system is employed). In appendix 3, it is shown that hermiticity of certain variables leads to unitarity condition and thus one may hope to formulate the unitarity condition without encountering quadratic terms in the scattering amplitudes.