

螺旋对称磁场的模拟方法*

忻 賢 杰

提 要

本文推导了所要模拟的螺旋对称磁场的磁面方程, 詳細地研究了这种磁场的模拟方法。研究結果指出, 可以大大地簡化 Wakefield 原来所用的模拟网络。本工作亦給出了由若干不同的方位向周期性的螺旋导线所合成的螺旋对称磁场的模拟方法。制造了一个比較简单的电阻网络验证了上述結論。

一、引 言

如所周知, 約束磁场的力线回向等离子体的系統是不稳定的(互換型不稳定性)^[1,2]。目前已提出了不少方法来克服这种不稳定性^[2-5]。普林斯顿研究組的研究指出^[6], 若使相邻两层力线之間有一够大的剪切角, 那末系統可以是稳定的。他們証明, 若在纵向主磁场上迭加一个較小的横向螺旋对称磁场, 就可以做到这一点。这样的螺旋对称磁场可以简单地用 $2l$ 根在圆柱上均匀排列的通电螺旋导线产生, 相邻二根导线(組成一对)之間的电流大小相等而方向相反。

关于上述螺旋对称磁场及其性质可以用理論加以計算^[6-9]。但是对比較复杂的系統, 計算就会比較繁复。为此, Wakefield^[10] 曾制造了模拟这种场的电阻网络。本文詳細推导了要模拟的磁面方程, 探討了模拟的方法。結果指出, 可以用比 Wakefield 所用的更简单的网络来模拟这种磁场。为了验证上述模拟理論, 制成了一个比較简单的电阻网络。在这个网络上进行的实验指出模拟理論是正确的。关于电阻网络模拟机的一般原理可参閱文献[11]。本文中利用了該报告中的某些結果。

二、螺旋对称场的一些性质

由于螺旋对称的性质, 磁场等等的量都是 r 和 u 的函数, 其中

$$u = l\theta - hz, \quad (1)$$

$2\pi/h$ 是场在 z 方向上的周期, $2\pi/l$ 是 θ 方向上的周期, $2\pi/k$ ($h = lk$) 是产生螺旋场的导线的螺距, l 是正反电流的对数。

令 $\mathbf{B}$ 为磁场强度, 引入函数 $\psi(r, u)$, 使

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0, \quad (2)$$

因之 $\psi(r, u) = \text{常数}$ 即为磁面。由(1)和(2)得

$$r B_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + (l B_\theta - h r B_z) \frac{\partial \psi}{\partial u} = 0, \quad (3)$$

* 1962年8月31日收到。

因之可以最简单地获得

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = r B_r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -(l B_\theta - h r B_z), \quad (4)$$

令

$$f = l B_z + h r B_\theta, \quad (5)$$

由(4)、(5)可得

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad (6)$$

$$B_\theta = \left(h r f - l \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) / \eta^2, \quad (7)$$

$$B_z = \left(h r \frac{\partial \psi}{\partial r} + l f \right) / \eta^2, \quad (8)$$

其中

$$\eta^2 = l^2 + h^2 r^2 = l^2 (1 + k^2 r^2). \quad (9)$$

由之可得

$$B^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{\eta^2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + f^2 \right], \quad (10)$$

但

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{10} \mathbf{J}$$

(J 为电流密度, 用实用单位), 可得三个分量:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{l}{r} \frac{\partial B_z}{\partial u} + h \frac{\partial B_\theta}{\partial u} = \frac{4\pi}{10} J_r = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = -h \frac{\partial B_r}{\partial u} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{4\pi}{10} J_\theta, \quad (12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} - \frac{l}{r} \frac{\partial B_r}{\partial u} = \frac{4\pi}{10} J_z. \quad (13)$$

由(11)–(13)可得

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (l B_z + h r B_\theta) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (l B_z + h r B_\theta) = \frac{4\pi}{10} (h r J_z - l J_\theta). \quad (15)$$

激励电流可分二个部分, 一部分是产生纵磁场的电流 (只有 θ 分量 $j_\theta(r)$), 另一部分是产生螺旋场的电流 (j_θ, j_z). 由(14)可得

$$f = f(r). \quad (16)$$

而由图(1)及(15)得

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{4\pi}{10} [(h r j_z - l j_\theta) - l j_\theta(r)] = -\frac{4\pi}{10} l j_\theta(r). \quad (17)$$

但对纵磁场,

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{10} \mathbf{j}_0, \quad (18)$$

所以

$$\frac{\partial B_0(r)}{\partial r} = -\frac{4\pi}{10} j_0(r), \quad (19)$$

因之最后証明

$$f = lB_0(r). \quad (20)$$

結合(6)、(7)、(12)、(13)等方程,可得关于 ψ 的微分方程:

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\eta^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right] = -\left[\frac{2hlf}{\eta^4} + \frac{4\pi}{10} \frac{hrJ_\theta + lJ_z}{\eta^2} \right]. \quad (21)$$

根据图1, (21)可化为

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\eta^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right] = -\frac{2hlf}{\eta^4} + \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{hrj_0(r)}{\eta^2} + \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{j}{\eta}. \quad (22)$$

由于場的螺旋对称性質, 所以只要研究某一特定的 $z = \text{常数}$ 平面上的場的分布就足够了. 空間中其余各点的場可以用螺旋对称性質推得, 因之取該特定平面为 $z = 0$, (22)变为

$$-\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{1+k^2r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right] = -\frac{2lkB_0(r)}{(1+k^2r^2)^2} + \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{lk r j_0(r)}{1+k^2r^2} + \frac{4\pi}{10} \frac{l j}{\sqrt{1+k^2r^2}}, \quad (23)$$

而

$$B_0(r) = \frac{4\pi}{10} \int_r^\infty j_0(r') dr'. \quad (24)$$

ψ 的物理意义与磁通有关. 令 Φ_z 为 $\psi = \text{常数}$ 的磁面内 z 方向上的磁通, Φ_θ 为在一个場周期内通过 $\theta = \text{常数}$ 平面(内外两边界分别为軸和 $\psi = \text{常数}$ 磁面)的磁通, 亦即

$$\Phi_z = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\psi)} B_z r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\psi)} r dr d\theta \left[\frac{hr \frac{\partial \psi}{\partial r} + lf}{\eta^2} \right], \quad (25)$$

$$\Phi_\theta = \int_0^{2\pi/h} \int_0^{r(\psi)} B_\theta dr dz = \int_0^{2\pi/h} \int_0^{r(\psi)} dr dz \left[\frac{hrf - l \frac{\partial \psi}{\partial r}}{\eta^2} \right], \quad (26)$$

則

$$\begin{aligned} \Phi_z - l\Phi_\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\psi)} dr d\theta \frac{hr^2}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{z=\text{const.}} + \int_0^{2\pi/h} \int_0^{r(\psi)} \frac{l^2}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} dr dz \Big|_{\theta=\text{const.}} \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\psi)} \left[\frac{h^2 r^2}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{l^2}{\eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] dr du \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \psi du = \frac{2\pi}{h} \psi. \end{aligned} \quad (27)$$

所以

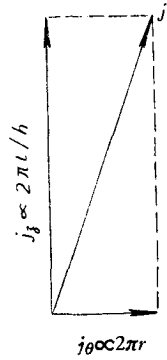


图1 螺旋电流各分量間的关系

$$\psi = (\Phi_z - l\Phi_\theta) \cdot \frac{h}{2\pi}. \quad (28)$$

若同时存在 $l_1, l_2 \cdots$ 等不同 l 的导线, 那末若场仍保有螺旋对称性质, 则必须与导线的螺距 k 相对应. 此时若 l 为 $l_1, l_2 \cdots$ 等的最大公约数, 且 $h = lk$, 那末上述的理论仍是正确的, 但此时 $\mathbf{j} = \sum_{li} \mathbf{j}_{li}$.

三、螺旋对称场的模拟方法

电阻网络模拟机的一般理论请参阅文献[11]. 试研究一个导电薄层(用极坐标 ρ, θ , 见图 2), 其 ρ, θ 方向上的电导率分别为

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_0}{1 + \rho^2}, \quad \sigma_\theta = \sigma_0. \quad (29)$$

按电流连续原理, 由薄层外部注入到面积元 Δs 上的电流密度为

$$\begin{aligned} j_i &= \nabla \cdot \mathbf{i} = -\nabla \cdot (\sigma \nabla V) \\ &= -\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sigma_\rho \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= -\sigma_0 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{1 + \rho^2} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

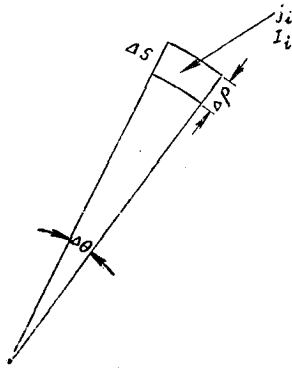


图 2 导电薄层模拟法

其中 V 是薄层电位, 令

$$\rho = kr, \quad (31)$$

则(30)变为

$$-\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{1 + k^2 r^2} \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right] = \frac{k^2}{\sigma_0} j_i. \quad (32)$$

比较(32)与(23), 就可以看到可以用 V 来模拟 ψ , 并且

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{V} &= \frac{-\frac{2\sigma_0 l B_0}{k(1 + \rho^2)^2} + \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{\sigma_0 l \rho}{k^2(1 + \rho^2)} j_0 + \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{\sigma_0 l}{k^2(1 + \rho^2)^{1/2}} j}{j_i} \\ &= \frac{-\frac{2\sigma_0 B_0 l}{k} \int_{\Delta s} \frac{ds}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{4\pi}{10} \frac{\sigma_0 l}{k^2} \int_{\Delta s} \frac{\rho j_0}{1 + \rho^2} ds + \frac{4\pi}{10} \frac{\sigma_0 l}{k^2} \int_{\Delta s} \frac{j ds}{(1 + \rho^2)^{1/2}}}{I_i}, \end{aligned} \quad (33)$$

I_i 为注入面积元 $\Delta s = \rho \Delta \theta \Delta \rho$ 的电流.

电阻网络模拟机即为用许多 R_θ, R_ρ 所组成的网络来代替导电薄层(见图 3). 注入到网络节点(P_0)的电流可写为

$$\begin{aligned} I_i &= I_i^1 + I_i^2 + I_i^3, \\ I_i^1 &= -p \frac{2\sigma_0 B_0 l}{k} \int_{\Delta \theta} \int_{\Delta \rho} \frac{\rho d\rho d\theta}{(1 + \rho^2)^2}, \\ I_i^2 &= p \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{\sigma_0 l}{k^2} \int_{\Delta \theta} \int_{\Delta \rho} \frac{j_0 \rho^2}{1 + \rho^2} d\rho d\theta, \\ I_i^3 &= p \frac{4\pi}{10} \cdot \frac{\sigma_0 l}{k^2} \int_{\Delta \theta} \int_{\Delta \rho} \frac{j \rho d\rho d\theta}{(1 + \rho^2)^{1/2}} = p \frac{4\pi}{10} \sigma_0 l I(P_0), \end{aligned} \quad (34)$$

$I_{(P_0)}$ 为在网络节点 P_0 所代表的面积元内螺旋导线中所流过的电流, P 为任意比例常数. 在这样选择注入电流时

$$\psi = V/P, \quad (35)$$

电阻 R_ρ 和 R_θ 分别为(见图 3)

$$R_\rho = \int \frac{d\rho}{\sigma_\rho \rho \Delta\theta} = \frac{1}{\sigma_0 \Delta\theta} \left[\ln \frac{\rho_i}{\rho_{i-1}} + \frac{1}{2} (\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2) \right], \quad (36)$$

$$R_\theta = \Delta\theta \left[\int \frac{\sigma_\theta d\rho}{\rho} \right]^{-1} = \frac{\Delta\theta}{\sigma_0} / \ln \left(\frac{\rho_i + \rho_{i+1}}{\rho_i + \rho_{i-1}} \right). \quad (37)$$

可以看到, 当 $\rho_{i-1} \rightarrow 0$ 时 $R_\rho \rightarrow \infty$. 为了避免这个困难可以取 $\rho_0 = \rho_{i-1} \ll \rho_1$, 此时 ρ_0 可看作名义上的轴心. 由于 $\rho_0 \approx 0$, 所以引入的误差是很小的.

在 Wakefield 的模拟机中, 所有电流 I_1^1 、 I_1^2 、 I_1^3 都被注入, 这就使设备大为复杂(尤其 I_1^1 代表分布电流, 它注入到所有节点). 我们的研究指出, 可以大大简化模拟的设备. 按照迭加原理, 网络电压为

$$V = V^1 + V^2 + V^3, \quad (38)$$

V^1 、 V^2 、 V^3 分别为网络只注入 I_1^1 、 I_1^2 和 I_1^3 时的电压. 相应地,

$$\psi = \psi^1 + \psi^2 + \psi^3,$$

或

$$\psi = \psi^0 + \psi^3, \quad \psi^0 = \psi^1 + \psi^2. \quad (39)$$

根据方程(33)、(34)不难看出, I_1^1 、 I_1^2 只模拟纵主磁场 B_0 , 而这一项是很容易计算的, 即

$$\psi_{(r)}^0 = \frac{h}{2\pi} \int_0^r B_0(r') 2\pi r' dr' = \frac{h}{k^2} \int_0^\rho \rho' B_0(\rho') d\rho', \quad (40)$$

$$B_0(\rho) = \frac{4\pi}{10k} \int_\rho^\infty j_0(\rho') d\rho', \quad (41)$$

因之, 可以只模拟 ψ^3 (即只注入 I_1^3), 而用(39)、(40)、(41)来计算 ψ . 这样就使设备大大简化了, 并且这样亦可以得到更准确的结果.

此外, 由于场在 θ 方向上有对称性, 所以不必模拟 θ 从 0 到 2π 的全部数值. 例如, 对图 4 $l=2$ 的系统, 很显然 AOB 是一条对称线, 它两旁相应之点的电位相等(我们称这种对称为正对称). 另一种对称线如 EOF (我们称之为反对称). 由对称性质可以知道, 在模拟 ψ^3 时沿 OE 线不会有电流, 因之 OE 线上各点电位相等, 也即等于零, 而且 $\psi^3(P_1') = -\psi^3(P_3')$. 因之模拟时只要模拟 $\angle AOE$ 区域即可. 对 $l=2, 3, 4$, $\angle AOE = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}$. 由于只有 $l=2, 3, 4$ 对我们

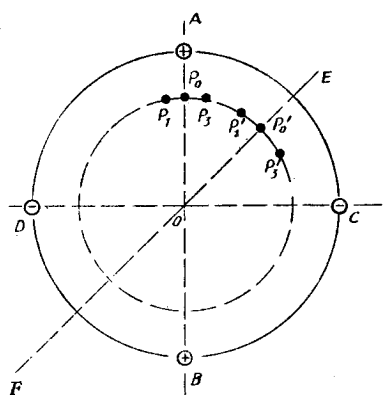


图 4 网络的对称性质 $l=2$.
正对称 $\psi^3(P_1) = \psi^3(P_3)$
反对称 $\psi^3(P_1') = -\psi^3(P_3')$
 $\psi^3(P_0) = 0$.

有兴趣,所以可以设想模拟网络成图5形式. 例如在模拟 $l = 3$ 时只要把 $\theta = \pi/6$ 所有节点短接在一起即可¹⁾.

若同时存在螺距相同而 l 不同的导线,那末令 l 为 l_i 等的最大公约数,而(34)中的

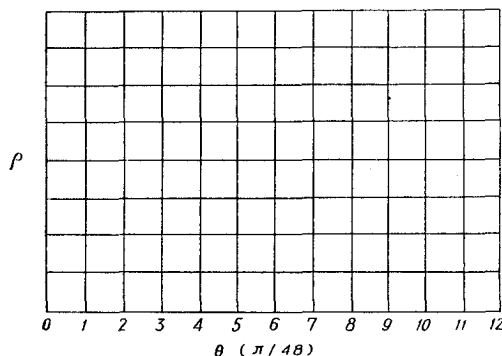


图5 一个适宜于模拟 $l = 2, 3, 4$ 的网络

注入电流取为 $I_i^3 = p \frac{4\pi}{10} \sigma_0 l \sum_i I_{li}(r_0)$, 那末所模拟的结果即为合成的 ψ^3 . 一般地说,此时网络大小应为 π . 如要用类似图5的较小网络来模拟 ψ^3 , 那末可以分别地单独模拟 l_i 导线的 ψ_{li}^3 , 然后得

$$\psi^3 = l \sum (\psi_{li}^3 / l_i). \quad (42)$$

由上面的模拟理论,即使不进行具体模拟,亦可以得出若干结论: (i) $\psi^0 = ar^2$; (ii) ψ^3 在螺旋导线所在处(例如对 $l = 3$, 在 $\theta = 0^\circ$ 和 $60^\circ \cdots$, $r = a$ 处)应为极大或极小; (iii) 在 OE 或 OE' 线上(见图6), $\psi^3 = 0$, 令这些线上磁面与半径的交点为 r_0 , 则 $\psi(r, \theta) = ar_0^2 = ar^2 + \psi^3(r, \theta)$; (iv) 由于在 OE 、 OE' 线上 $\psi^3 = 0$, 所以等 ψ^3 线应约如图6所示; (v) ψ^3 趋近于零的速度应该不慢于 r^2 , 否则在轴心附近将会出现 ψ 正负相间的区域,因之中心处就不能形成正常形态的磁面. 事实上不难证明(见下面讨论),在 r 小时, $\psi^3 \sim r I_i^3 (l k r) \sim r^l$. ($l = 1$ 系统一般是不用的); (vi) 当螺旋导线中的电流 I 较小时, ψ^3 与 ψ^0 相比小,因之磁面截面是略有畸变的圆. 当 I 大到一定值以上时,磁面 ψ 会出现互相分割的区域(见图7). I 越大,分割区域越移向中心. 这种情况出现条件为在 OA 线上 ψ 有

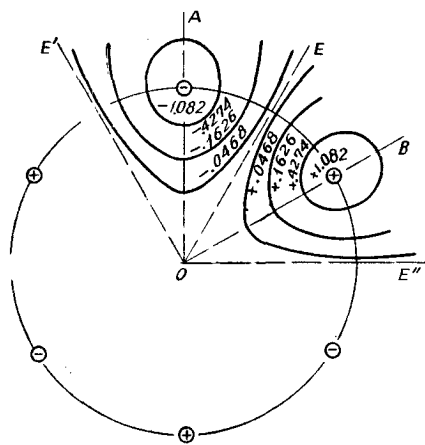


图6 ψ^3 图. $l = 3$, $ka = 0.25$. 图中数字为注入电流 $I_i = 2I_i^3 = 4$ 毫安时的电压值,只画出 $E'OE''$ 区域中的 ψ^3 图.

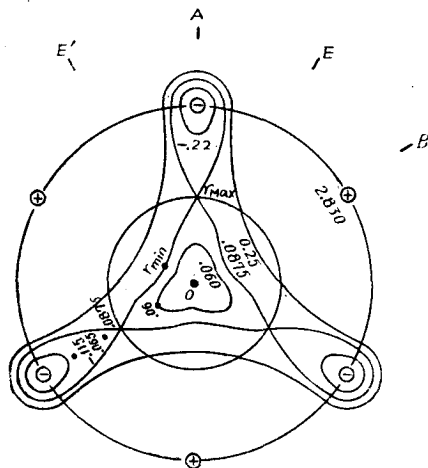


图7 ψ 图. $l = 3$, $ka = 0.2$, $\psi^0(a) = 1$, $A = 4/3$. 由图可以看到分割区域形成的原因: $\psi(r, 0)$ 在 $r = r_{\max}$ 时为极大,图中数字是 ψ 值,通过 $r_{\max}$ 之线即为分界线.

1) 正反两种平面对称性质场的模拟方法见文献[11].

一极大值。分割的区域被分界线隔离开来。当然,只有在分界线里面的那些磁面才有实际应用价值。分界线上的 $r_{\max}$ 和 $r_{\min}$ (图 7) 由下面方程给出:

$$[\psi^0(r_{\max})]' = [\psi_0^3(r_{\max})]', \quad (43)$$

$$\psi^0(r_{\min}) + \psi_0^3(r_{\min}) = \psi^0(r_{\max}) - \psi_0^3(r_{\max}), \quad (44)$$

此处 $\psi_0^3(r) = -\psi^3(r, \theta = 0)$, 上角“ $'''$ ”代表对 r 的微分。

螺旋对称场的一个重要参数是旋转角 τ_k , 即力线在一个螺距内平均所旋过的角度。为此,先求出力线方程:

$$\frac{dz}{B_z} = \frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta}, \quad (45)$$

由之得

$$\frac{du}{d\rho} = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) / \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right), \quad (46)$$

这只是说明力线在 $\psi = \psi(\rho, u) = \text{常数}$ 的曲面上。由(45)、(46)、(6)、(7),可得

$$\theta = \int \frac{B_0 \rho l / k - \frac{\partial \psi}{\partial \rho}}{l(1 + \rho^2)} \frac{d\rho}{\frac{\partial \psi}{\partial u}} = \int_0^u \frac{B_0 l \rho / k - \frac{\partial \psi}{\partial \rho}}{l(1 + \rho^2) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)} du, \quad (47)$$

这就是力线方程。

当 u 从 0 增到 -2π 时(即在场的的一个周期内), 力线在 θ 和 z 方向上各有一增量 $\Delta\theta$ 和 Δz , 且

$$\Delta u = \Delta(l\theta - hz) = l\Delta\theta - lk\Delta z = -2\pi, \quad (48)$$

所以力线的平均旋转率为

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{k}{1 + 2\pi/(l\Delta\theta)}, \quad (49)$$

而

$$\tau_k = \frac{2\pi}{k} \cdot \bar{\alpha} = \frac{2\pi}{1 + 2\pi/(l\Delta\theta)}, \quad (50)$$

其中

$$\Delta\theta = \int_0^{-2\pi} \frac{\frac{lB_0\rho}{k} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho}}{l(1 + \rho^2) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)} du, \quad (51)$$

$\psi = \psi(\rho, u)$, $\rho = \rho(u, \psi)$ 由模拟求得。

为了以后的讨论,下面将写出一些理论研究的結果^[6-9]。对 l 对均匀分布的薄层螺旋导线,可以证明(式中 I 是螺旋导线中的电流, a 是螺旋导线与轴的距离):

$$\psi = \frac{hr^2}{2} B_0 + 0.8I \sum_q (lk a) K'_q(qlka) (lkr) I'_q(qlkr) E_q \cos qu = \psi^0 + \psi^3 \quad (52)$$

($q = 1, 3, 5 \dots$), K 是麦克唐纳函数, I 是虚宗量貝塞耳函数,而

$$E_q = \frac{2}{K\pi q} \sin \frac{K\pi}{2} q, \quad (53)$$

K 是一个圆周中螺旋导线所占长度的比例。对线电流, $K = 0$, $E_q = 1$ 。由(52)可以清

楚看到把 ψ^0 和 ψ^3 分开模拟是正确的。在 lka 不很大时, 当 $r < a$ 时

$$\psi^3 = 0.4I \sum_q \frac{l}{q} E_q \left(\frac{r}{a}\right)^{ql} \cdot F_1(qlka) F_2(qlkr) \cos qu, \quad (54)$$

式中 F_1, F_2 是近于 1 的修正函数。因之在 $r/a < 0.6$ 时, 高次项 ($q > 1$) 的贡献就在 2% 以下。此时磁面形式简化为

$$\frac{\psi}{\left(\frac{h}{2} a^2 B_0\right)} \approx \left(\frac{r}{a}\right)^2 - A \left(\frac{r}{a}\right)^l \cos u \quad (r < a) \quad (55)$$

$$\approx \left(\frac{a}{r}\right)^2 - A \left(\frac{a}{r}\right)^l \cos u \quad (r > a),$$

$$A = \frac{0.8I}{B_0 k a^2}. \quad (56)$$

在这样近似下,

$$\tau_k = \left[\frac{\pi l^2}{2} \left(\frac{\psi_0^3}{\psi^0} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{l} + \frac{1}{2} k^2 r^2 \right) \right]_{\theta=0}. \quad (57)$$

四、模拟结果和结论

为了验证上述模拟理论, 我们制成了一个比较简单的电阻模拟网络, 它示于图 8。该

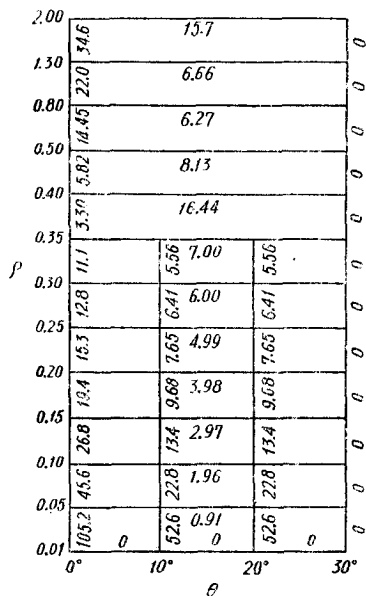


图 8 本实验所用网络, 数值代表电阻值, 单位为 $R_0 = 100$ 欧。电阻值挑选准到 $\pm 1\%$

ψ_0^3/I 。根据 (34)、(35) 或,

$$\frac{\psi_0^3}{I} = \frac{2}{3} \pi^2 \left(\frac{V}{I_i \cdot 10 R_0} \right), \quad (58)$$

而理论上根据 (52),

网络的电阻选择如 (36)、(37) 所示, $\rho_0 = 0.01$ 取作名义上的轴, $\Delta\theta = \frac{\pi}{18} = 10^\circ$, $\sigma_0 = \frac{\Delta\theta}{R_0} = \frac{\pi}{18 R_0}$, $R_0 = 100 \Omega$ 。 $\theta = 0^\circ$ 的线上的 R_p 比相应的 R_0 大一倍, 而注入电流 I'_i 为正常电流 I_i 的一半, 因之这是一条正对称线; $\theta = 30^\circ$ 各节点短接, 因之它是一条反对称线 (参见文献 [11])。所以模拟对象为 $l = 3$ 的系统。

模拟的某些结果示于图 9 与图 10。图 9 表示对不同的 ka , ψ_0^3 与 r 的函数关系。可以看到, 在 $r/a < 0.6$ 时, $\psi_0^3 \sim r^n$, 而 $\bar{n} \approx 3.03$, 因之实验和理论是符合相当好的。在 $r/a > 0.6$ 时可以看出 $q > 1$ 的模已有贡献。图 10 表示在 $r = \text{常数}$ 线上, ψ^3 与 θ 的关系。可以看到, 在 r/a 小时分布是余弦曲线, 而当 $r/a \rightarrow 1$ 时分布离余弦越远, 这也说明了 $q > 1$ 模的贡献在 $r/a \rightarrow 1$ 时越大。应该指出, 由于网络的粗糙, 有一些小的差别可能是网络引进的。

表 1、2 把模拟的结果 (绝对值) 与理论值进行了比较。所模拟的系统为 $2l$ 根细螺旋导线。表中之值为

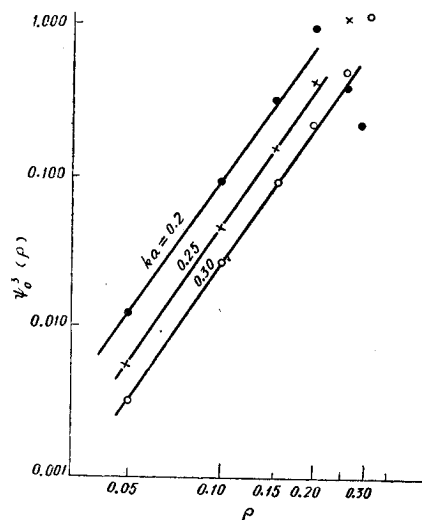


图9 $\psi_0^3(\rho)$ 与 ρ 的关系, 在 r/a 小时
 $\psi_0^3(\rho) \sim r^n$, $\bar{n} \approx 3.03$.

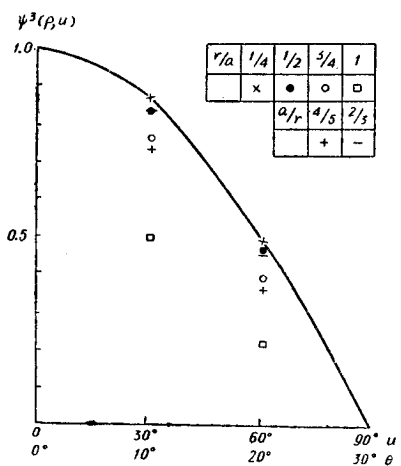


图10 $\psi^3(\rho, u)$ 与 u 的关系, $ka = 0.2$,
 $l = 3$. 归一化到 $\psi^3(\rho, 0) = 1$. 曲线是
 余弦函数

表1 ψ_0^3/I 值, $l = 3$, $ka = 0.20$

kr		0.05	0.10	0.15	0.20
模 拟 值		0.0180	0.149	0.542	1.675
理 论 值	$q = 1$	0.0184	0.147	0.496	1.180
	$q = 3$	0	0.001	0.028	0.380
	$q = 5$	0	0	0.003	0.220
	$1 + 3 + 5$	0.0184	0.148	0.524	1.780

表2 ψ_0^3/I 值, $l = 3$, $ka = 0.25$

kr		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25
模 拟 值		0.00944	0.0771	0.268	0.705	1.789
理 论 值	$q = 1$	0.00944	0.0756	0.260	0.625	1.228
	$q = 3$	0	0.0001	0.004	0.048	0.362
	$q = 5$	0	0	0	0.007	0.252
	$1 + 3 + 5$	0.00944	0.0757	0.264	0.680	1.842

$$\frac{\psi_0^3}{I} \Big|_{\text{理论}} = 0.8 \sum_q (lka) \cdot K'_{ql}(qlka) \cdot (lkr) \cdot I'_{ql}(qlkr). \quad (59)$$

为了弄清楚不同 q 模的贡献, 我们分别计算了 $q = 1, 3, 5$ 时的 ψ_0^3/I 值。可以看到, 在 $\frac{r}{a} = 0.6$ 时 $q = 3$ 模的贡献约为 1.5%。在 $\frac{r}{a} = 1$ 点, 级数(59)是发散的, 这是因为所模拟的系统假设为无穷细的导线。因之, 在 $r/a \approx 1$ 的各点上, 理论与实验值不能进行比

較。

模拟所得的 ψ^3 曲綫示于图 6, ψ 曲綫示于图 7. 图 7 中 ψ 曲綫所取的 $A = 4/3$ (見 (56)), ψ 归一化到 $\psi^0(a) = 1$.

由上面的实验結果可以得到下面結論: (i) 模拟理論是正确的; (ii) 即使用图 9 所示的这样簡單网络, 也能够获得足够准确的結果, 这正是网络模拟机的优点.

书写本文时曾和顾永年同志进行了有益的討論. 所用网络是叶汝御、曹家麟两同志安装的. 本文并承王承书、李正武二同志加以閱讀, 特此一并致謝.

参 考 文 献

- [1] Longmire, L. and Rosenbluth, M., *Ann. Phys.*, **1** (1957), 120.
- [2] Кадомцев, Б. Б. и Брагинский, С. И., *Proc. 2nd UN Conf. (Geneva)*, Vol. 32, (1958), 233.
- [3] 見 Арцимович, Л. А., *Управляемые термоядерные реакции*, Физматгиз, 1961.
- [4] 見比肯普, 雪伍德方案——美国在控制聚变方面的工作规划, 14 章, 科学出版社, 1960.
- [5] Spitzer, L. Jr., *Proc. 2nd UN Conf. (Geneva)*, Vol. 32, (1958), 181.
- [6] Johnson, J. L. et al., *Proc. 2nd UN Conf. (Geneva)*, Vol. 31, (1958), 198.
- [7] The Proposed Model C Stellarator Facility, NYO-7899 (1957).
- [8] Морозов, А. И. и А. С. Соловьев, *Ж.Т.Ф.*, **30** (1960), 261.
- [9] 顧永年, 螺旋对称磁場的計算, *物理学报*, **11** (1962), 572.
- [10] Wakefield, K. E., *Proc. Symp. Magnetic Field Design in Thermonuclear Research*, ORNL-2745, (1958), 61.
- [11] 忻賢杰、曹家麟、吳才德, *物理学报*, **12** (1962), 657.

THE METHOD OF SIMULATING A HELICALLY INVARIANT MAGNETIC FIELD

HSIN SHIEN-CHIEH

ABSTRACT

In this paper the differential equation of a helically invariant magnetic field is derived, and the method of simulating this type of field is analyzed in detail. It is shown that the original Wakefield's resistance network analogue may be simplified considerably. The method of simulating a helically invariant field with composite (azimuthal) period of multiplicity is also given. A very simple resistance network has been constructed to verify the conclusions arrived at.