

時間相关的多道散射理論*

楊 澤 森

(北京大学物理系)

提 要

本文把 Lippmann-Schwinger 等人关于散射理論的时间相关方案扩充到多道情况。

Ekstein 在 1956 年也曾试图进行这样的扩充工作。值得特別提到,他所指出并着重引用的事实,即多道情况下的射出(或射入)本征态組的广泛的正交性質,是极为重要的,这是建立散射矩陣概念的基础。但是,Ekstein 沒有充分利用 Lippmann-Schwinger 等人的方案所包含的相当普遍的出发点,原方案的簡明性沒有保留下来。而且由于无法用一个单独的相互作用表示来建立散射算符,就认为散射矩陣不能看作某种綫性算符的表示,使散射矩陣的概念含混起来。

本文保持原有 Lippmann-Schwinger 方案的基本精神及簡明性而把它扩充为多道理論。給出了散射算符的明显形式。跃迁几率与散射矩陣的关系可以按照单道情形的方法来推导。

一、引 論

Lippmann 和 Schwinger^[1], Gell-Mann 和 Goldberger^[2] 等人所采用的关于散射理論的时间相关方案,經過正确的扩充就可用于多道过程。事实上也已經有許多工作者比較具体地运用过。不过,要构成完整的多道理論,还需要对所涉及的基本性問題作系統的处理。特別是,散射矩陣概念的扩充并不是十分直截了当的。

在 Lippmann-Schwinger 等人原来的方案中,包含着一种十分普遍的出发点,它已被不少工作者以各种方式討論过。在这一节內,我們將結合复合粒子碰撞的情况再作扼要的論述,以便尽可能地避免某些具有較大局限性的观点,并作为后面討論的准备。

設有两个复合粒子 a 与 X 相碰撞。先把总質心的运动分离出去,其余部分的波函数記为 $\Psi(t)$ 。如果这两个粒子之間沒有相互作用,則在時間过程中,将保持着初始的相对动量 $\mathbf{p}_0$ 及各自的内部状态,这种波函数記为

$$\Psi_0(t) = \varphi_{\mathbf{p}_0} \phi e^{-iE_0 t/\hbar}, \quad (1.1)$$

其中 $\varphi_{\mathbf{p}_0} \equiv \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}/\hbar}$ 代表相对运动的平面波; $\mathbf{r}$ 代表 a 与 X 的質心之間的距离;

ϕ 代表 a 及 X 各在一定的内部状态。 $E_0 \equiv \frac{p_0^2}{2\mu} + \Delta_0$ 是初始总能量(这里及后面,都是采用質心坐标系), Δ_0 是初始内部能量, μ 是 a 与 X 的折合質量。

設 H 代表由 a 及 X 組成的总系統的哈密頓量, V_0 代表 a 与 X 之間的相互作用,假定

* 1962 年 8 月 23 日收到。

它随 r 的增大而急速趋于零。显然, (1.1) 式中的 $\varphi_{\mathbf{p}_0}\phi$ 是 $H_0 = H - V_0$ 的本征态, 属于本征值 E_0 。实际上, $\Psi_0(t)$ 是一波包, 但最终总是被极限 (1.1) 代替, 故可不追究其细节而选为下面的形式:

$$\Psi_0(t) = \int c(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \varphi_{\mathbf{p}} \phi e^{-iEt/\hbar} d\mathbf{p}, \quad (1.2)$$

其中 $E = \frac{p^2}{2\mu} + \Delta_0$, $c(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ 的非零值集中在 $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ 附近很小的范围 $\Delta\mathbf{p}$ 之内, 并随 $\Delta\mathbf{p} \rightarrow 0$ 而趋于极限 $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$ 。当 $\Delta\mathbf{p}$ 不为零时, 波包 (1.2) 的中心以 $\frac{\mathbf{p}_0}{\mu}$ 的速度移动, 当 $t = 0$ 时, 这中心的位置在 $\mathbf{r} = 0$ 处。我们想象地追溯到很远的过去, 在某时刻 T 以前, 波包还未进入 V_0 的作用范围, 这时 Ψ_0 就是 Ψ , 即

$$\text{当 } \tau < T \text{ 时, } \Psi(\tau) = \Psi_0(\tau), \quad (1.3)$$

T 的大小可以作一粗略的估计。波包在 $\mathbf{p}_0$ 方向的半宽度不小于 $\frac{\hbar}{2\Delta p_3}$, 设 V_0 的作用范围

是 b , 则有 $-T \frac{p_0}{\mu} \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_3} + b$, 其中 Δp_3 是在 $\mathbf{p}_0$ 方向的动量分布范围 (如果按另外的方法选择 $\varphi_{\mathbf{p}}$ 的相因子, 也可使波包中心在别的时刻到达 $\mathbf{r} = 0$ 处, 因之时刻 T 也有一移动)。在 T 时刻以后, 波包进入 V_0 的作用范围, $\Psi(t)$ 由入射波 $\Psi_0(t)$ 与散射波 $\chi(t)$ 迭加而成:

$$\Psi(t) = \Psi_0(t) + \chi(t), \quad (1.4)$$

借助薛定谔方程有:

$$\Psi(t) = e^{-iH(t-T)/\hbar} \Psi_0(T). \quad (1.5)$$

时刻 T 不很确切, 但它应该能够隐含到 $\Psi_0(0)$ 以及 V_0 的性质中。事实上, 在 T 以前, 状态的时间变化既可说是由 H_0 决定, 也可说是由 H 决定, 因此, 可把 (1.5) 中的 T 换成更小的 τ :

$$\Psi(t) = e^{-iH(t-\tau)/\hbar} \Psi_0(\tau), \quad (\tau < T), \quad (1.6)$$

特别是,

$$\Psi(t) = e^{-iHt/\hbar} U_0(0, -\infty) \Psi_0(0), \quad (1.7)$$

其中, $U_0(0, -\infty)$ 是 $U_0(0, t_0) \equiv e^{iHt_0/\hbar} e^{-iH_0 t_0/\hbar}$ 在 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时的极限。

借助于 (1.7) 式把 T 隐含起来还具有下述意义。在 $\Psi_0(0)$ 中, $\Delta\mathbf{p}$ 非常小, 在一切不造成含混的场合都可令它为零。这样的极限过程在 (1.7) 中是可以直接实现的, 而在 (1.5) 中就必须事先令 $T \rightarrow -\infty$ 。其次, 还可借助 (1.7) 断定, 当 $\Delta\mathbf{p}$ 趋于零时, $\Psi(t)$ 趋于 H 的本征态, 所属的能量等于 E_0 。因为在 $\Psi_0(0)$ 或 $\Psi_0(T)$ 中发见 H_0 的本征值处于某一间隔的几率也就是在 $\Psi_0(T)$ 中发见 H 的本征值处于同一间隔的几率, 因此又是在 $\Psi(t)$ 中发见 H 的本征值的几率。再用公式 (1.7) 就可推出所需要的结论 [由下面的公式 (1.11) 还可得到一个更普遍的结果: $HU_0(0, -\infty) = U_0(0, -\infty)H_0$], 由此可见, 从 (1.2) 及 (1.7) 得

$$\Psi(t) = \int c(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \phi_{\mathbf{p}}^{(+)} e^{-iEt/\hbar} d\mathbf{p}, \quad (1.8)$$

其中

$$\phi_{\mathbf{p}}^{(+)} \equiv U_0(0, -\infty) \varphi_{\mathbf{p}} \phi, \quad (1.9)$$

$$H\phi_{\mathbf{p}}^{(+)} = E\phi_{\mathbf{p}}^{(+)}, \quad (1.10)$$

$$E = \frac{p^2}{2\mu} + \Delta_0.$$

因此, 求解 $\Psi(t)$ 的問題可以归結为 确定 $U_0(0, t_0)$ 在 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时的极限的問題. 这就是時間相关散射理論的出发点.

如果有某一类相同粒子分布在 a 与 X 之間, 并有必要考虑波函数对它們的交換具有反对称或对称性質, 則需要把(1.1)中的 $\varphi_{\mathbf{p}}\phi$ 及(1.8)中的 $\psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)}$ 对这些相同粒子的置換进行适当的迭加, 变为 $P_0(\varphi_{\mathbf{p}}\phi)$ 及 $P_0(\psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)})$, 其中 P_0 是一些关于 a 与 X 之間相同粒子的置換算符的組合, 当然它是与总哈密頓量对易的. 在这些置換下得出的不同 $\varphi_{\mathbf{p}}\phi$ 属于不同的 H_0 的本征函数, 能量都是 E_0 , 相应的各个 $\psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)}$ 都是 H 的本征函数, 能量也是 E_0 .

$U_0(0, -\infty)$ 可表示成

$$1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^0 dt_0 e^{iHt_0/\hbar} V_0 e^{-iH_0 t_0/\hbar} \quad \text{或} \quad 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \xi(t_0) e^{iHt_0/\hbar} V_0 e^{-iH_0 t_0/\hbar},$$

其中 $\xi(t_0)$ 当 $t_0 < 0$ 时为 1, 当 $t_0 > 0$ 时为零. 利用

$$\xi(t_0) e^{iHt_0/\hbar} = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dE' \frac{1}{E' - H + i\epsilon} e^{iE' t_0/\hbar},$$

則

$$U_0(0, -\infty) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} dE' G(E') V_0 \delta(E' - H_0), \quad (1.11)$$

其中

$$G(E') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} G_{\epsilon}(E'),$$

$$G_{\epsilon}(E') = \frac{1}{E' - H + i\epsilon}. \quad (1.12)$$

因此

$$\psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)} = (1 + G(E) V_0) \varphi_{\mathbf{p}}\phi, \quad (1.13)$$

或

$$\psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i\epsilon}{E - H + i\epsilon} \varphi_{\mathbf{p}}\phi. \quad (1.14)$$

注意 P_0 与 H 对易, 就有

$$P_0 \psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i\epsilon}{E - H + i\epsilon} P_0 \varphi_{\mathbf{p}}\phi. \quad (1.15)$$

以 $\varphi_{\mathbf{p}}\phi$ [或 $P_0 \varphi_{\mathbf{p}}\phi$] 为入射波时, 一切可能的碰撞結果的几率都可由 $\psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)}$ [或 $P_0 \psi_{\mathbf{p}\phi}^{(+)}$] 来預言.

二、多道情形下的射出、射入本征态

在多道情形下需要考虑一个总系統按照各种可能方式分解为若干个子系統的問題. 我們用“ C ”代表一定的分解方式, 波函数 Φ_{Cn} 表示 C 型各子系統处在一定的束縛状态并相互作用自由的相对运动. 設已正交归一化为

$$\langle \Phi_{Cn'} | \Phi_{Cn} \rangle = \delta(n'n), \quad (2.1)$$

这里 $\delta(n'n)$ 代表 n 所包含的連續指标的 δ 函数与不連續指标的 δ 符号的乘积. 此外, 用 V_c 代表子系統之間的相互作用, 等于两两子系統的作用之和. 假設任何两个子系統之間的作用都随它們質心距离的增大而急速趋于零(本文限于考虑这类相互作用). Φ_{Cn} 当然

是 $H_C = H - V_C$ 的本征态, 以 E_n^C 代表相应的本征值. 一般说来, Φ_{Cn} 中的 c 并不是正交指标. 当然可以经过适当的步骤使之正交化(这将剔除一些 Φ), 但由后面的公式(2.7)可知, 这种想法是完全无益的.

每个 Φ_{Cn} 都可以被看作 (1.1) 式中的 $\varphi_\nu \phi$ 而构成更为广泛的波包 $\Psi_{0Cn}^{(t)}$. 如果在 Φ_{Cn} 中, 子系统之间的相对运动波函数都是平面波, 则 $\Psi_{0Cn}^{(t)}$ 是 (1.1) 的简单扩充, 如果不是, 则必为这类函数的迭加, 这也无妨碍. 其次, 这里暂把总系统不分解的情形除外. 按上节方法可得到总波函数为

$$\Psi_{Cn}^{(t)} = e^{-iH(t-\tau)/\hbar} \Psi_{0Cn}^{(\tau)} \quad (2.2)$$

$$= e^{-iHt/\hbar} U_c(0, -\infty) \Psi_{0Cn}^{(0)}, \quad (2.3)$$

前一式子中的 τ 可以是比 T_{Cn} 为小的任何时刻, $U_c(0, -\infty)$ 可从 (1.11) 式把 V_0 及 H_0 换成 V_C 及 H_C 而得出.

在波包趋于极限时有

$$\begin{aligned} \phi_{Cn}^{(+)} &= U_c(0, -\infty) \Phi_{Cn} \\ &= \lim_{\Psi_{0Cn}^{(0)} \rightarrow \Phi_{Cn}} \Psi_{Cn}^{(0)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$= (1 + G(E_n^C) V_C) \Phi_{Cn} \quad (2.5)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i\epsilon}{E_n^C - H + i\epsilon} \Phi_{Cn} \quad (2.6)$$

以 Φ_{Cn} 为“入射波”的一切碰撞结果的几率都可由 $\phi_{Cn}^{(+)}$ 预言.

对于 H 的束缚态, 我们不把它看作 Φ , 而用另一种记号 $|F\beta\rangle$ 来代表. F 为束缚态能量, β 为其它指标, 设 $|F\beta\rangle$ 已正交归一化.

可以根据公式(2.2)及(2.4)证明函数组 $\phi_{Cn}^{(+)}$ 的一个极重要的特点: 不仅在一定的 c 下, n 为正交指标, 而且 c 本身也是正交指标. 这种正交性是建立散射矩阵概念的最重要的基础. Ekstein 曾在文献[3]中指出并着重引用了这个事实, 本文下节也将着重地进一步地引用它. 应当指出, 我们在建立和运用这种函数组时, 都保持着 Lippmann-Schwinger 的“简单方案”的基本精神及简明性.

由(2.2)有

$$\langle \phi_{C'n'}^{(+)} | \phi_{Cn}^{(+)} \rangle = \lim_{\Psi_{0C'n'}^{(0)} \rightarrow \Phi_{C'n'}} \langle \Psi_{0C'n'}^{(\tau)} | \Psi_{0Cn}^{(\tau)} \rangle,$$

如果 $C' = C$, 则右端变为 $\lim \langle \Psi_{0Cn'}^{(0)} | \Psi_{0Cn}^{(0)} \rangle = \langle \Phi_{Cn'} | \Phi_{Cn} \rangle$, 如果 $C' \neq C$, 那么, 在 $\Psi_{0C'n'}^{(\tau)}$ 中, c' 型各子系统的质心之间相距很远, 同样, 在 $\Psi_{0Cn}^{(\tau)}$ 中, C 型各子系统也如此, 故两个态是正交的. 所以, $\phi_{Cn}^{(+)}$ 中的 c, n 均为正交指标, 即

$$\langle \phi_{C'n'}^{(+)} | \phi_{Cn}^{(+)} \rangle = \delta_{C'C} \delta(n'n), \quad (2.7)$$

显然, 把 $\{|F\beta\rangle\}$ 加进去之后, 仍然保持正交性.

其次, $\{\phi_{Cn}^{(+)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 应当构成完备组. 而 $\{\phi_{Cn}^{(+)}\}$ 则在 H 的连续谱状态所张成的子空间中构成完备组. 这与简单粒子碰撞的情况是相当的.

如果系统(指由 H 表征的总系统)含有一些相同粒子, 而且要求波函数对于处在不同子系统之间的相同粒子的交换具有对称或反对称性, 那么, 就可按照下述方法引入一种新的指标 D : 在一定的 C 下对不同子系统之间的相同粒子进行一切可能的置换, 由此得到的

全部 C 就集成一个組 D . 这样, 每一个 C 都属于一定的 D . 在某些特殊的 C 下, 只有一个子系統含有某类相同粒子, 那么, 每个这样的 C 也就是一个 D . 其次, 在每一个 D 下, 都对 $\phi_{Cn}^{(+)}$ 进行适当的組合, 构成具有正确对称性質的函数組 $\phi_{D\nu}^{(+)}$, 当然, 在組合中各項都有相同的 E_n^c , 以 E_ν^D 代表. 設 $\phi_{D\nu}^{(+)}$ 也已对 ν 正交归一化, 即

$$\langle \phi_{D'\nu'}^{(+)} | \phi_{D\nu}^{(+)} \rangle = \delta_{D'D} \delta(\nu'\nu) \quad (2.8)$$

由于 H 对相同粒子的置換是不变的, 用同样的方法对 Φ_{Cn} 进行組合构成 $\Phi_{D\nu}$, 則由(2.6)有

$$\phi_{D\nu}^{(+)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i\epsilon}{E_\nu^D - H + i\epsilon} \Phi_{D\nu}. \quad (2.9)$$

与簡單粒子碰撞的情况一样, 每个射出本征态 $\phi^{(+)}$ 都对应着一个射入本征态 $\phi^{(-)}$:

$$\begin{aligned} \phi_{C'n'}^{(-)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-i\epsilon}{E_n^c - H - i\epsilon} \Phi_{C'n} \\ &= U_C(0, +\infty) \Phi_{C'n}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

滿足

$$\langle \phi_{C'n'}^{(-)} | \phi_{C'n}^{(-)} \rangle = \delta_{C'n'C'n} \delta(n'n) \quad (2.11)$$

$\{\phi_{C'n}^{(-)}\}$ 在 H 的連續譜状态所张成的子空間中构成完备組. 并且把 $|F\beta\rangle$ 加进去之后, 就成为整个态空間的完备組.

类似地,

$$\phi_{D\nu}^{(-)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-i\epsilon}{E_\nu^D - H - i\epsilon} \Phi_{D\nu}, \quad (2.12)$$

$$\langle \phi_{D'\nu'}^{(-)} | \phi_{D\nu}^{(-)} \rangle = \delta_{D'D} \delta(\nu'\nu). \quad (2.13)$$

三、散 射 矩 陣

在簡單粒子碰撞的情况下, 自由(相对)运动的波函数 $\{\Phi_n\}$ 构成正交归一完备組, 可以作为正交表象的基, 散射矩陣就是么正算符 $S \equiv U(\infty, 0)U(0, -\infty)$ 在这种表象中的矩陣. 此外, $\{\phi_n^{(+)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 或 $\{\phi_n^{(-)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 也构成正交归一完备組, 散射矩陣又可看成是么正算符 $S \equiv \sum_n |\phi_n^{(+)}\rangle \langle \phi_n^{(-)}| + \sum_{F\beta} |F\beta\rangle \langle F\beta|$ 在 $\{|\phi_n^{(+)}\rangle\} + \{|F\beta\rangle\}$ 所构成的表象中的矩陣(其中, 关于束縛态部分的子矩陣只是一个单位矩陣, 这一部分在散射問題中可不予考虑). 在多道情况下, 如前节所述, 函数組 $\{\Phi_{Cn}\}$ 也有完备性, 不过这些函数不是完全独立的, c 一般不是正交指标, 所以, 前一观点已不能采用了, 但是, $\{\phi_{Cn}^{(+)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 及 $\{\phi_{Cn}^{(-)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 仍然是正交归一完备組. 由此之故, 我們將看到, 后一观点可直接扩充到多道情况.

从跃迁几率或散射振幅的考虑可知, 在多道情况下, 以 $\langle \Phi_{C'n'} | U_C(\infty, 0) U_C(0, -\infty) | \Phi_{Cn} \rangle$ 为元素而构成的矩陣, 在物理上的重要性将与 S 算符的矩陣在簡單粒子的碰撞理論中的地位相当. 因此, 可作为散射矩陣的定义, 借(2.4)式可写成

$$S_{C'n', Cn} = \langle \phi_{C'n'}^{(-)} | \phi_{Cn}^{(+)} \rangle, \quad (3.1)$$

在涉及相同粒子时, 則

$$S_{D'\nu', D\nu} = \langle \phi_{D'\nu'}^{(-)} | \phi_{D\nu}^{(+)} \rangle. \quad (3.2)$$

注意 $\{\phi_{Cn}^{(+)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 或 $\{\phi_{Cn}^{(-)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 都是正交归一完备組, 因之可构成如下

的綫性么正算符 S :

$$S = \sum_{Cn} |\psi_{Cn}^{(+)}\rangle \langle \psi_{Cn}^{(-)}| + \sum_{F\beta} |F\beta\rangle \langle F\beta|, \quad (3.3)$$

显然

$$S^+ = \sum_{Cn} |\psi_{Cn}^{(-)}\rangle \langle \psi_{Cn}^{(+)}| + \sum_{F\beta} |F\beta\rangle \langle F\beta|,$$

$$S^+ S = S S^+ = 1,$$

而且

$$S_{C'n', Cn} = \langle \psi_{C'n'}^{(+)} | S | \psi_{Cn}^{(+)} \rangle. \quad (3.4)$$

S 算符在 H 对角化的表象中的矩陣按照 H 的連續譜状态与束縛态約化而成的两个子矩陣, 关于束縛态的子矩陣是一个单位矩陣, 另一个关于連續譜状态子矩陣就是我們所需要的散射矩陣.

以上, 是借助于一定的函数組来建立散射矩陣和 S 算符的概念的, 現在研究一下由于函数組的变换而引起散射矩陣的变换的問題, 由此可清楚地看出上述散射矩陣定义的自然性以及 S 算符的概念的重要性.

先把(3.3)改写一下, 令

$$\Gamma_C = \sum_n |\Phi_{Cn}\rangle \langle \Phi_{Cn}|, \quad (3.5)$$

$$h_C = \sum_n E_n^C |\Phi_{Cn}\rangle \langle \Phi_{Cn}| = H_C \Gamma_C, \quad (3.6)$$

$$Q_C^{(\pm)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dE' \frac{\pm i\epsilon}{E' - H \pm i\epsilon} \delta(E' - h_C), \quad (3.7)$$

則由(2.6)及(2.10)有

$$\psi_{Cn}^{(\pm)} = Q_C^{(\pm)} \Phi_{Cn}, \quad (3.8)$$

故

$$S = \sum_C Q_C^{(+)} \Gamma_C Q_C^{(-)+} + \sum_{F\beta} |F\beta\rangle \langle F\beta|. \quad (3.9)$$

設 $\{\Phi_{C\mu}\}$ 是另一套基本函数組, 在每一个 C 下均与前面的 $\{\Phi_{Cn}\}$ 张成同样的空間, 并設已正交归一化: $\langle \Phi_{C\mu'} | \Phi_{C\mu} \rangle = \delta(\mu'\mu)$. 相应地, 有

$$\psi_{C\mu}^{(\pm)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\pm i\epsilon}{E_\mu^C - H \pm i\epsilon} \Phi_{C\mu}. \quad (3.10)$$

而且, $\{\psi_{C\mu}^{(+)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 或 $\{\psi_{C\mu}^{(-)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 构成正交归一的完备組, 因此也可以作为一个表象的基矢. 而特別重要的是, 上面引进的 S 算符在这个表象中的矩陣元可表成

$$\langle \psi_{C'\mu'}^{(+)} | S | \psi_{C\mu}^{(+)} \rangle = \langle \psi_{C'\mu'}^{(-)} | \psi_{C\mu}^{(+)} \rangle, \quad (3.11)$$

这就是說, 从不同的函数組出发而按照(3.1)定义的散射矩陣, 是同一个 S 算符的表示, 只是表象不同而已. 通常的表象理論当然是完全适用的. Ekstein^[3] 由于在一种相互作用表象下不能把散射矩陣看作某种綫性算符的表示, 就一般認為做不到这一点.

(3.11)式又可这样来表述:(3.3)所定义的 S 算符可借助 $\psi_{C\mu}^{(\pm)}$ 而表成

$$S = \sum_{C\mu} |\psi_{C\mu}^{(+)}\rangle \langle \psi_{C\mu}^{(-)}| + \sum_{F\beta} |F\beta\rangle \langle F\beta|. \quad (3.12)$$

为了証明这种結果, 只需注意到以下的显然的关系式:

$$\sum_{\mu} |\Phi_{C\mu}\rangle \langle \Phi_{C\mu}| = \sum_n |\Phi_{Cn}\rangle \langle \Phi_{Cn}| = \Gamma_C,$$

$$\sum_{\mu} E_{\mu}^C |\Phi_{C\mu}\rangle \langle \Phi_{C\mu}| = h_C,$$

由此看出, (3.12) 与 (3.9) 是等同的.

在考虑到粒子相同性时, 只需把 Γ_C 及 h_C 换成

$$\begin{aligned} \Gamma_D &= \sum_{\nu} |\Phi_{D\nu}\rangle \langle \Phi_{D\nu}|, \\ h_D &= \sum_{\nu} E_{\nu}^D |\Phi_{D\nu}\rangle \langle \Phi_{D\nu}|. \end{aligned} \quad (3.13)$$

相应地,

$$\Omega_D^{(\pm)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dE' \frac{\pm i\epsilon}{E' - H \pm i\epsilon} \delta(E' - h_D), \quad (3.14)$$

$$\phi_{D\nu}^{(\pm)} = \Omega_D^{(\pm)} \Phi_{D\nu}, \quad (3.15)$$

$$S = \sum_D \Omega_D^{(+)} \Gamma_D \Omega_D^{(-)+} + \sum_{F\beta} |F\beta\rangle \langle F\beta|. \quad (3.16)$$

关于散射矩阵与跃迁几率的关系完全可以按照简单粒子碰撞問題中的方法推导出来.

考虑一个以 $\Psi_{0Cn}^{(i)}$ 为入射波包的碰撞过程. 总波函数为

$$\Psi_{Cn}^{(i)} = \Psi_{0Cn}^{(i)} + \chi_{Cn}^{(i)}. \quad (3.17)$$

由于碰撞, 每单位時間的总跃迁几率(相对几率)为

$$\begin{aligned} \overline{W}_{Cn} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \chi_{Cn}^{(i)} | \chi_{Cn}^{(i)} \rangle = - \frac{\partial}{\partial t} \langle \Psi_{0Cn}^{(i)} | \Psi_{Cn}^{(i)} \rangle + \text{c.c.} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \langle \Psi_{0Cn}^{(i)} | (H - H_C) | \Psi_{Cn}^{(i)} \rangle + \text{c.c.} \end{aligned}$$

令 $\Psi_{0Cn}^{(i)} \rightarrow \Phi_{Cn}$, 于是,

$$\overline{W}_{Cn} = \frac{i}{\hbar} \langle \Phi_{Cn} | V_C | \phi_{Cn}^{(+)} \rangle + \text{c.c.} \quad (3.18)$$

单位時間跃迁到 $\Phi_{C'n'}$ 的(相对)几率为

$$\begin{aligned} W_{Cn, C'n'} &= \frac{\partial}{\partial t} |\langle \Phi_{C'n'} | \chi_{Cn}^{(i)} \rangle|^2 = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Phi_{C'n'} | V_{C'} | \phi_{Cn}^{(+)} \rangle|^2 \delta(E_{n'}^{C'} - E_n^C), \end{aligned} \quad (3.19)$$

另一方面, 由 (3.1) 及 (2.6), 有

$$S_{C'n', Cn} = \delta_{C'C} \delta(n'n) - 2\pi i \delta(E_{n'}^{C'} - E_n^C) \langle \Phi_{C'n'} | V_{C'} | \phi_{Cn}^{(+)} \rangle \quad (3.20)$$

$$= \delta_{C'C} \delta(n'n) - 2\pi i \delta(E_{n'}^{C'} - E_n^C) \langle \phi_{C'n'}^{(-)} | V_C | \Phi_{Cn} \rangle. \quad (3.20')$$

由此就可得到通过散射矩阵来表达跃迁几率的公式. 而且, $\langle \Phi_{C'n'} | V_{C'} | \phi_{Cn}^{(+)} \rangle_{E_{n'}^{C'}=E_n^C}$ 或 $\langle \phi_{C'n'}^{(-)} | V_C | \Phi_{Cn} \rangle_{E_{n'}^{C'}=E_n^C}$ 又决定時間无关理論中的“散射振幅”, 因此, 借助 (3.20) 又可通过散射矩阵来表达散射振幅. 而 (3.18) 式則代表总截面与向前弹性振幅的虛部之間的普遍关系.

再看以 $\Psi_{D\nu}^{(i)}$ 为入射波包的情形。特别之处在于 $\Psi_{D\nu}^{(i)}$ 的时间变化不是由某个单独的哈密顿量来决定, 因为 $\Phi_{D\nu}$ 是若干个不同的 H_c 的本征函数的组合(都对应着同一个能量 E_ν^D)。 $\Psi_{D\nu}^{(i)}$ 的时间变化仍然是由总哈密顿量 H 决定的。可以注意一下, 在(3.18)–(3.20)中, V_c 及 $V_{c'}$ 可以看作 $H - h_c$ 及 $H - h_{c'}$, 现在可以形式地把 h_c 及 $h_{c'}$ 换成 h_D 及 $h_{D'}$, 这样就很容易导出与(3.18)–(3.20)相应的公式:

$$\bar{W}_{D\nu} = \frac{i}{\hbar} \langle \Phi_{D\nu} | (H - h_D) | \psi_{D\nu}^{(+)} \rangle + \text{c.c.}, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} W_{D\nu, D'\nu'} &= \frac{\partial}{\partial t} |\langle \Phi_{D'\nu'} | \chi_{D\nu}^{(i)} \rangle|^2 = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Phi_{D'\nu'} | (H - h_{D'}) | \psi_{D\nu}^{(+)} \rangle|^2 \delta(E_{\nu'}^{D'} - E_\nu^D), \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} S_{D'\nu', D\nu} &= \delta_{D'D} \delta(\nu'\nu) - 2\pi i \delta(E_{\nu'}^{D'} - E_\nu^D) \langle \Phi_{D'\nu'} | (H - h_{D'}) | \psi_{D\nu}^{(+)} \rangle = \\ &= \delta_{D'D} \delta(\nu'\nu) - 2\pi i \delta(E_{\nu'}^{D'} - E_\nu^D) \langle \psi_{D\nu}^{(-)} | (H - h_D) | \Phi_{D\nu} \rangle. \end{aligned} \quad (3.23)$$

在时间无关理论中所说的散射矩阵, 不是直接指现在的 $[S]$, 这一点, 与简单粒子碰撞的情形是相似的。 $[S]$ 按总能量约化为许多子矩阵, 在时间无关理论中涉及这些子矩阵时都经过一个积分而去掉总能量的 δ 函数因子, 结果就得到一定能量下的散射矩阵。现在举 $a + X \rightarrow Y + b$ 的过程为例, 作一说明。

这时, 指标 C 代表两个子系统的类型。令 $\Phi_{\mathbf{p}S\Sigma}^{Ca} \equiv \varphi_{\mathbf{p}}^C \phi_{S\Sigma}^{Ca}$, 其中 $\varphi_{\mathbf{p}}^C = \frac{e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_C / \hbar}}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$ 描述 C 型的两个子系统的相对运动, 指标 a 描述它们的内部性质, S 及 Σ 表示“道自旋”及其 z 分量(“道自旋”与总角量的差别在于不包括相对运动的角动量)。

以 $\Phi_{\mathbf{p}S\Sigma}^{Ca}$ 为入射波时, 射出本征态为

$$\psi_{Ca\mathbf{p}S\Sigma}^{(+)} = \Phi_{\mathbf{p}S\Sigma}^{Ca} + u,$$

其中

$$u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{E_0 - H + i\epsilon} V_C \Phi_{\mathbf{p}S\Sigma}^{Ca},$$

E_0 是 H_c 在 Φ 中的本征值, 也是 H 在 $\psi^{(+)}$ 中的本征值。用完备组 $\{\psi_{C'n'}^{(-)}\} + \{|F\beta\rangle\}$ 展开, 则

$$\begin{aligned} u &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{C'n'} \frac{1}{E_0 - E_{n'}^{C'} + i\epsilon} \psi_{C'n'}^{(-)} \langle \psi_{C'n'}^{(-)} | V_C | \Phi_{\mathbf{p}S\Sigma}^{Ca} \rangle + \\ &+ \sum_{F\beta} \frac{1}{E_0 - F} |F\beta\rangle \langle F\beta | V_C | \Phi_{\mathbf{p}S\Sigma}^{Ca} \rangle. \end{aligned}$$

在考虑位形空间的“外部”区域的渐近式时, 束缚态分量没有贡献。而且, 忽略碰撞后不是分成两个子系统的过程, 则对 $\psi_{C'n'}^{(-)}$ 的展开换成对于 $\psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(-)}$ 的展开。此外, 在每个分量 $\psi^{(-)}$ 中, 都只有 Φ 对渐近式有贡献。因此, 只需考虑

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{C'a'S'\Sigma'} \int d\mathbf{p}' \frac{1}{E_0 - E_{a'\mathbf{p}'}^{C'} + i\epsilon} \varphi_{\mathbf{p}'}^{C'}(\mathbf{r}_{C'}) \phi_{S'\Sigma'}^{C'a'} \langle \psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(-)} | V_C | \Phi_{\mathbf{p}S\Sigma}^{Ca} \rangle$$

在 $r_{C'} \rightarrow \infty$ 时的渐近式。注意 $E_{a'\mathbf{p}'}^{C'} = \frac{p'^2}{2\mu_{C'}} + \Delta_{C'a'}$, 完成对于 $\mathbf{p}'$ 的积分后, 有

$$u(C'a'S'\Sigma', \mathbf{r}_{C'}) \rightarrow \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{e^{ik_{C'a'}r_{C'}}}{r_{C'}} f_{C'a'S'\Sigma', CaS\Sigma}^{(\theta, \varphi)} \times \phi_{S'\Sigma'}^{C'a'},$$

其中 $k_{C'a'} = \frac{P_{C'a'}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu_{C'}(E_0 - \Delta_{C'a'})}$, $(\theta\varphi)$ 代表 $\mathbf{r}_{C'}$ 的方向, $f(\theta\varphi)$ 的表式为

$$\begin{aligned} f_{C'a'S'\Sigma',Ca\Sigma}^{(\theta\varphi)} &= -4\pi^2\mu_{C'}\hbar\langle\psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(-)}|V_C|\Phi_{\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^C\rangle_{E_{a'\mathbf{p}'}^{C'}=E_0} \\ &= -4\pi^2\mu_{C'}\hbar\langle\Phi_{\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{C'}|V_{C'}|\psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(+)}\rangle_{E_{a'\mathbf{p}'}^{C'}=E_0}, \end{aligned}$$

在这种表式中, $(\theta\varphi)$ 代表 $\mathbf{p}'$ 的方向. 利用(3.20), 則

$$f_{C'a'S'\Sigma',Ca\Sigma}^{(\theta\varphi)} = -2\pi i\mu_{C'}\hbar \int dE_{a'\mathbf{p}'}^{C'} \langle\psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(+)}|(S-1)|\psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(+)}\rangle, \quad (3.24)$$

其中积分范围是包括 $E_{a'\mathbf{p}'}^{C'} = E_0$ 点在内的任何区間.

注意 $|klm\rangle \equiv k(\hbar)^{3/2}(-i)^l \int |\mathbf{p}\rangle Y_{lm}^{(0)} d\Omega_p$ 是 $\mathbf{p}^2$, $\mathbf{l}^2$ 及 l_z 的共同本征态, 具有如下的正交归一性質:

$$\langle k'l'm'|klm\rangle = \delta(k'-k)\delta_{l'l'}\delta_{m'm},$$

反过来, 可把 $|\mathbf{p}\rangle$ 表成:

$$|\mathbf{p}\rangle = (\hbar)^{-3/2} \frac{1}{k} \sum_{lm} (i)^l Y_{lm}^{*(\mathbf{p}^0)} |klm\rangle,$$

令

$$|klm\rangle_C \Phi_{\Sigma\Sigma}^C = \sum_{JM} \langle lsJM|m\Sigma\rangle |(Ca)klJM\rangle,$$

$$\psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(+)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i\epsilon}{E_{a\mathbf{p}}^C - H + i\epsilon} |(Ca)klJM\rangle,$$

其中 $E_{a\mathbf{p}}^C = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu_C} + \Delta_{Ca}$, 于是

$$\psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(+)} = (\hbar)^{-3/2} \frac{1}{k} \sum_J \sum_M \sum_{l'} \sum_{m'} \psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(+)} \langle lsJM|m\Sigma\rangle i^{l'} Y_{lm}^{*(\mathbf{p}^0)}, \quad (3.25)$$

同样,

$$\psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(+)} = (\hbar)^{-3/2} \frac{1}{k'} \sum_{J'} \sum_{M'} \sum_{l'} \sum_{m'} \psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(+)} \langle l's'J'M'|m'\Sigma'\rangle i^{l'} Y_{lm}^{*(\mathbf{p}^0)}, \quad (3.26)$$

这里的函数組 $\psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(\pm)}$ 相当于(3.11)中的 $\psi_{C\mu}^{(\pm)}$, 特别是,

$$\begin{aligned} \langle\psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(+)}|S|\psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(+)}\rangle &= \langle\psi_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma'}^{(-)}|\psi_{Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma}^{(+)}\rangle = \\ &= S_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma',Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma} \delta_{J'J} \delta_{M'M}, \end{aligned}$$

这里, 由于 H 的轉动不变性, JM 已成为对角化指标, 而且 M 只出现在 $\delta_{M'M}$ 中.

把(3.25)、(3.26)代到(3.24)中, 并取入射方向 $\mathbf{p}^0$ 作为 z 軸, 于是 $Y_{lm}^{*(\mathbf{p}^0)} = \delta_{m0}$ $\left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2}$, 代入 $E_{a\mathbf{p}}^C = E_0$, $dE_{a'\mathbf{p}'}^{C'} = \frac{\hbar^2}{\mu_{C'}} k' dk'$, 对 k' 积分的范围是包括 $k' = k_{C'a'}$ 点在内的任何区間. 最后得到

$$\begin{aligned} f_{C'a'S'\Sigma',Ca\Sigma}^{(\theta\varphi)} &= \frac{\sqrt{\pi}}{ik} \sum_J \sum_M \sum_{l'} \sum_{l''} \sum_{m'} (i)^{l'-l''} (2l+1)^{1/2} \times \\ &\times \langle lsJM|0\Sigma\rangle \langle l's'JM|m'\Sigma'\rangle Y_{lm}^{(\theta\varphi)} \times \\ &\times \left[\int dk' S_{C'a'\mathbf{p}'S'\Sigma',Ca\mathbf{p}\Sigma\Sigma} - \delta_{C'C} \delta_{a'a} \delta_{l'l'} \delta_{s's} \right]. \end{aligned}$$

由此可見,

$$\left(\frac{\nu_{C'\alpha'}}{\nu_{C\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \int dk' S_{C'\alpha'k'j's',Ca kjs}$$

就是时间无关理论中所说的散射矩阵的元素 $S(E_0 J)_{C'\alpha'j's',Ca kjs}$ [例如, 参看文献[4]的公式(3.14), 该文还把散射矩阵按相对运动的宇称来约化]. 对 k' 积分的结果去掉了总能量 δ 函数因子, 并使 k' 换成 $k_{C'\alpha'}$. 后者完全由 E_0 及 C', α' 决定, k 则由 E_0 及 Ca 决定.

作者谨向他的老师杨立铭教授致以深切的谢意, 在工作过程中曾与杨先生进行过非常仔细的讨论, 从中得到了宝贵的帮助.

参 考 文 献

- [1] Lippmann, B. A. and Schwinger, J., *Phys. Rev.*, **79** (1950), 469.
- [2] Gell-Mann, M. and Goldberger, M. L., *Phys. Rev.*, **91** (1953), 398.
杨泽森, 北京大学学报(自然科学), **4:3** (1958), 293.
- [3] Ekstein, H., *Phys. Rev.*, **101** (1956), 880.
- [4] Blatt, J. M. *Rev. Mod. Phys.*, **24** (1952), 258.

THE TIME-DEPENDING SCATTERING THEORY OF MULTI-CHANNEL PROCESS

YANG TSE-SEN

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The time-depending formal theory of scattering, initiated by Lippmann and Schwinger is generalized to the case of multi-channel process.

Ekstein has attempted to construct such a theory in 1956 and pointed out the orthogonality properties of the set of multi-channel outgoing (incoming) scattering states, which is very important for the establishment of scattering matrix, but it seems to him that the quite general starting point of the L - S formalism is not appreciated. In his work the simplicity of the L - S formalism is lost. He came to the conclusion that the scattering matrix can not be regarded as the matrix of a single linear operator, because he insisted to work in one single interaction representation for all the initial and final states. Thereby the concept of scattering matrix is confused.

The present paper deals with the same generalization, but the simplicity of the L - S formalism is preserved. The explicit form of the scattering operator is given. The calculation of the various transition probability in the present case can be made in a similar way as in the original L - S theory.