

变参数系统能量近似算法*

譚 作 武

(中国科学院电工研究所)

提 要

在过渡过程时间内,由电源输送到变参数系统中之能量和该系统中之能量损耗,若直接用过渡过程时之电流和电压来决定,则会遇到求解描述系统中电流变化之变参数微分方程之困难。本文研究如何来避免对变参数微分方程求解之困难,而直接用操作前后系统中之稳态电流和稳态电压来决定上述能量的近似算法。该法适用于一般的具有稳定性振荡的变参数回路。

在电工学、自动控制、计算技术以及其他科学和技术领域中,常常遇到常参数和变参数系统。为了全面地掌握该系统之电气特性,不仅要研究其在稳态状况下电压、电流、功率、能量之分布和转换的关系;而且,还需要找出它们在暂态状况下之变化规律,其中包括在过渡过程期间内电阻之能量损耗值^[1,2]。

1883年赫维赛德指出^[3]:在过渡过程期间内,由直流电源输送到常参数系统中之能量等于稳态时系统中电容器和电感所储藏之能量差的两倍,和在这一时间内,设想只有稳态电流通过电阻时所产生之能量损耗值。这一论断后被洛仑兹根据麦克斯韦电磁场理论予以证明^[4]。作者从拉氏变换理论出发,不仅证实了上述论断,而且,研究出具有任意复杂波形的电源输送到常参数系统中之能量和系统中之能量损耗的近似算法^[2]。

然而,在过渡过程时间内,由电源输送到变参数系统中之能量和系统中之能量损耗计算,仍是一个悬而未决的问题。如果这一能量直接由其在过渡过程时之电流和电压来决定,那么,不可避免地联系到要求解变参数微分方程。这样,不仅对于复杂系统,就是对于简单回路所描写的变参数微分方程也难以求得解。本文研究如何避免对变参数微分方程式求解之困难,而直接由其操作前后系统中之稳态电流和电压来决定上述能量的近似算法。

为分析方便起见,本文只限于讨论一个由电阻,电容和随时间变化的电感所组成的振荡回路。但所获得之结论可推广到带有任意多个可变参数之复杂系统上。

图1示由电阻(R),电容(C)和随时间变化的电感 $[L(t)]$ 组成的回路。为分析研究方便起见,设令电感随时间作周期性的变化。当 $t=0$ 时将开关 K 闭合。令闭合前回路中之电流为 $i(0-)$,电容器上之电压为 $u(0-)$ 。从闭

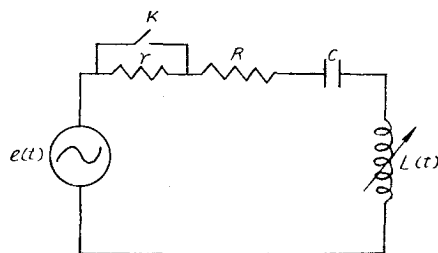


图 1

$$e(t) = E \cos(\omega t + \varphi),$$
$$L(t) = L[1 + 2m \cos(\Omega t + \beta)].$$

* 1962年6月4日收到; 1962年8月20日收到修改稿。

合后到迴路中出现稳态电流时为止的过渡过程时间 τ 内, 迴路中的能量关系可用下式描述:

$$\int_0^{\tau} i(t) \frac{d}{dt} [L(t)i(t)] dt + \int_0^{\tau} [i(t)]^2 R dt + \int_0^{\tau} cu(t) \frac{du(t)}{dt} dt = \int_0^{\tau} e(t)i(t) dt, \quad (1)$$

式中 $i(t)$ 为过渡过程时迴路中之电流; $u(t)$ 为过渡过程时电容器上的电压; $\int_0^{\tau} i(t) \frac{d}{dt} [L(t)i(t)] dt$ 为在过渡过程时间 τ 内, 迴路中电感所储藏之能量. 该能量等于开关闭合后迴路出现稳态电流时电感所储藏能量 ($W_{L,y}$) 和闭合前电感所储藏能量 ($W_{L,0}$) 之差; $\int_0^{\tau} [i(t)]^2 R dt$ 为在过渡过程时间 τ 内, 迴路中电阻能量损耗值. 为简便计, 下用 (W_R) 表示之; $\int_0^{\tau} cu(t) \frac{du(t)}{dt} dt$ 为在过渡过程时间 τ 内, 迴路中电容器所储藏之能量. 该能量等于开关闭合后迴路出现稳态电流时电容器所储藏能量 ($W_{c,y}$) 和闭合前电容器所储藏能量 ($W_{c,0}$) 之差; $e(t)$ 为电源电压; $\int_0^{\tau} e(t)i(t) dt$ 为在过渡过程时间 τ 内, 由电源输送到迴路中之能量值. 为简便计, 下用 (W) 表示之.

众所周知, 变参数迴路中过渡过程时之电流, 也和常参数迴路中之电流一样, 由其在开关闭合后迴路中电流之稳态分量 $i_y(t)$ 和电流之自由分量 $i_{cb}(t)$ 组成. 这样, 由电源输送到迴路中之能量可写成下列形式:

$$W = \int_0^{\tau} e(t)i_y(t) dt + \int_0^{\tau} e(t)i_{cb}(t) dt \quad (2)$$

式中:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} e(t)i_y(t) dt &= W_{R,y} + [W_{L,y} - W_{L,y(0)}] + [W_{c,y} - W_{c,y(0)}], \\ \int_0^{\tau} e(t)i_{cb}(t) dt &= W_{R,cb}. \end{aligned}$$

$W_{R,y}$ 和 $W_{R,cb}$ 表示在过渡过程时间 τ 内, 电流 $i_y(t)$ 和 $i_{cb}(t)$ 分别通过电阻时所产生的能量损耗值; $W_{L,y(0)}$ 和 $W_{c,y(0)}$ 表在开关进入 ($\tau = 0$) 时, 若迴路中只有稳态电流在电感和电容器中所储藏之能量.

根据以上所述, 式(1)可写成下列形式:

$$\begin{aligned} [W_{L,y} - W_{L,0}] + W_R + [W_{c,y} - W_{c,0}] &= \\ = W_{R,y} + [W_{L,y} - W_{L,y(0)}] + [W_{c,y} - W_{c,y(0)}] + W_{R,cb}, \end{aligned} \quad (3)$$

化简后即得

$$W_R = W_{L,0} + W_{c,0} + W_{R,y} - [W_{L,y(0)} + W_{c,y(0)}] + W_{R,cb}. \quad (4)$$

由(4)式可以看出: 在过渡过程时间 τ 内, 耗散在电阻中之能量为开关闭合前迴路中电感和电容器所储藏之能量与开关闭合后由于迴路中电流之稳态分量和电流之自由分量分别通过电阻时所耗散的能量之代数和. 由于式(4)中前五項能量计算是在开关闭合前后稳态状态下进行, 因此, 它们的求解并不困难. 问题在于如何求得 $W_{R,cb}$ 值.

值得注意的是, 这里我们只研究具有稳定性振荡之变参数迴路. 该迴路电流之自由

分量具有衰减特性, 易言之, 当时间 $\tau \rightarrow \infty$ 时, 电流之自由分量为 $i_{cb}(\tau) \rightarrow 0$. 这样, 在过渡过程时间 τ 内, 仅由电流之自由分量通过回路时所产生之能量损耗值, 可近似的写成下列形式:

$$\begin{aligned} W_{R,cb} &= \int_0^\tau e(t) i_{cb}(t) dt \approx \int_0^\infty e(t) i_{cb}(t) e^{-pt} dt, \quad \text{当 } p = 0, \\ &= \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty E e^{j(\omega t + \varphi)} i_{cb}(t) e^{-pt} dt \right], \quad \text{当 } p = 0, \\ &= \operatorname{Re} [E e^{j\varphi} I_{cb}(p - j\omega)], \quad \text{当 } p = 0, \\ &= \operatorname{Re} [E e^{j\varphi} I_{cb}(-j\omega)], \end{aligned} \quad (5)$$

φ 为开关闭合瞬间电源电压之初始角.

由(5)式可以看出, 在交流电源作用下, $W_{R,cb}$ 的求解实质上就归结为求电源电压和回路电流自由分量乘积之拉普拉斯 p 的表示式, 然后, 将式中之 p 用 $-j\omega$ 代换之.

有趣的是 $I_{cb}(-j\omega)$ 与 $i_y(0)$ 密切相关. 为了求得二者关系表达式, 首先探求变参数回路中稳态电压之解答.

在过渡过程状态下, 图 1 所示回路中之电流可用下列微分方程描述之:

$$\frac{d}{dt} [L(t)i(t)] + i(t)R + \frac{\int_0^t i(t)dt}{c} = \operatorname{Re} [E e^{j(\omega t + \varphi)}], \quad (6)$$

式中

$$L(t) = L[1 + 2m \cos(\Omega t + \beta)] = L + [(mLe^{j\beta})e^{j\Omega t} + (mLe^{-j\beta})e^{-j\Omega t}], \quad (7)$$

将(7)式代入(6)式后, 则得

$$\begin{aligned} &[mLe^{j\beta}] \left[\frac{d}{dt} i(t) e^{j\Omega t} \right] + \left[L \frac{di(t)}{dt} + i(t)R + \frac{\int_0^t i(t)dt}{c} \right] + \\ &+ [mLe^{-j\beta}] \left[\frac{d}{dt} i(t) e^{-j\Omega t} \right] = \operatorname{Re} [E e^{j(\omega t + \varphi)}]. \end{aligned} \quad (8)$$

方程式(8)之解答为

$$i(t) = i_y(t) + i_{cb}(t). \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式后, 则得

$$\begin{aligned} &[mLe^{j\beta}] \left[\frac{d}{dt} i_y(t) e^{j\Omega t} \right] + \left[L \frac{di_y(t)}{dt} + i_y(t)R + \frac{\int_0^t i_y(t)dt}{c} \right] + \\ &+ [mLe^{-j\beta}] \left[\frac{d}{dt} i_y(t) e^{-j\Omega t} \right] = \operatorname{Re} [E e^{j(\omega t + \varphi)}], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &[mLe^{j\beta}] \left[\frac{d}{dt} i_{cb}(t) e^{j\Omega t} \right] + \left[L \frac{di_{cb}(t)}{dt} + i_{cb}(t)R + \frac{\int_0^t i_{cb}(t)dt}{c} \right] + \\ &+ [mLe^{-j\beta}] \left[\frac{d}{dt} i_{cb}(t) e^{-j\Omega t} \right] = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

方程(10)之解答可写成为一谐波级数之形式:

$$i_y(t) = \operatorname{Re} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \dot{I}_{y,K} e^{j(\omega + K\Omega)t}, \quad (12)$$

$\dot{I}_{y,K}$ 表示具有振荡频率为 $(\omega + K\Omega)$ 稳态电流之复数振幅值。将(12)式代入(10)式, 则可求得

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} \left\{ j[\omega + (K+1)\Omega][mLe^{i\beta}]\dot{I}_{y,K}e^{j[\omega+(K+1)\Omega]t} + \right. \\ \left. + \left[j(\omega + K\Omega)L + R + \frac{1}{j(\omega + K\Omega)c} \right] \dot{I}_{y,K}e^{j(\omega+K\Omega)t} + \right. \\ \left. + j[\omega + (K-1)\Omega][mLe^{-i\beta}]\dot{I}_{y,K}e^{j[\omega+(K-1)\Omega]t} \right\} = Ee^{i\varphi}e^{j\omega t}. \quad (13)$$

将(13)式展开后, 把其中具有同样频率之各项排列在一起, 则可获得下列形式:

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & + \left\{ [j(\omega + \Omega)(mLe^{i\beta})]\dot{I}_{y,0} + \left[j(\omega + \Omega)L + R + \frac{1}{j(\omega + \Omega)c} \right] \dot{I}_{y,1} + \right. \\ & + [j(\omega + \Omega)(mLe^{-i\beta})]\dot{I}_{y,2} \left. \right\} e^{j(\omega+\Omega)t} + \\ & + \left\{ [j\omega(mLe^{i\beta})]\dot{I}_{y,-1} + \left[j\omega L + R + \frac{1}{j\omega c} \right] \dot{I}_{y,0} + \right. \\ & + [j\omega(mLe^{-i\beta})]\dot{I}_{y,1} \left. \right\} e^{j\omega t} + \\ & + \left\{ [j(\omega - \Omega)(mLe^{i\beta})]\dot{I}_{y,-2} + \left[j(\omega - \Omega)L + R + \frac{1}{j(\omega - \Omega)c} \right] \dot{I}_{y,-1} + \right. \\ & + [j(\omega - \Omega)(mLe^{-i\beta})]\dot{I}_{y,0} \left. \right\} e^{j(\omega-\Omega)t} + \\ & + \dots\dots\dots = Ee^{i\varphi}e^{j\omega t}. \end{aligned}$$

为以下分析方便计, 可将上式写成下列级数和的形式:

$$\sum_{K=-\infty}^{\infty} \left\{ [j(\omega + K\Omega)(mLe^{i\beta})]\dot{I}_{y,K-1} + \right. \\ \left. + \left[j(\omega + K\Omega)L + R + \frac{1}{j(\omega + K\Omega)c} \right] \dot{I}_{y,K} + \right. \\ \left. + [j(\omega + K\Omega)(mLe^{-i\beta})]\dot{I}_{y,K+1} \right\} e^{j(\omega+K\Omega)t} = Ee^{i\varphi}e^{j\omega t}, \quad (13)'$$

$\dot{I}_{y,K-1}$ 和 $\dot{I}_{y,K+1}$ 表示具有振荡频率为 $[\omega + (K-1)\Omega]$ 和 $[\omega + (K+1)\Omega]$ 稳态电流之复数振幅值。

式(13)' 对任意时间 t 皆相应地满足。为分析研究方便起见, 我们将式(13)' 写成具有无限个递演方程之方程组, 该方程组之通式为

$$\begin{aligned} & [j(\omega + K\Omega)(mLe^{i\beta})]\dot{I}_{y,K-1} + \\ & + \left[j(\omega + K\Omega)L + R + \frac{1}{j(\omega + K\Omega)c} \right] \dot{I}_{y,K} + \\ & + [j(\omega + K\Omega)(mLe^{-i\beta})]\dot{I}_{y,K+1} = \dot{E}(K), \end{aligned} \quad (14)$$

$$K = (0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$$

当 $K = 0$ 时,

$$\dot{E}(K) = Ee^{i\varphi},$$

当 $K \neq 0$ 时,

$$\dot{E}(K) = 0,$$

由上式可求得

$$\dot{I}_{y,K} = E e^{j\varphi} \frac{\Delta_K(j\omega)}{\Delta(j\omega)}, \quad (15)$$

式中 $\Delta(j\omega)$ 为具有无限个递演方程 (14) 之各系数组成的行列式, $\Delta_K(j\omega)$ 为相应于 $0, K$ 行列式元素上的行列式子式.

将 (15) 式代入 (13)' 式, 则可求得该回路中电流之稳态分量为

$$i_y(t) = \operatorname{Re} \sum_{K=-\infty}^{\infty} E e^{j\varphi} \frac{\Delta_K(j\omega)}{\Delta(j\omega)} e^{j(\omega+K\Omega)t}, \quad (16)$$

在开关闭合瞬间 ($t = 0$), 回路中电流之稳态分量为

$$i_y(0) = \operatorname{Re} \sum_{K=-\infty}^{\infty} E e^{j\varphi} \frac{\Delta_K(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \operatorname{Re}[\dot{I}_y(0) e^{j\varphi}]. \quad (17)$$

同理, 可求得在开关闭合瞬间 ($t = 0$) 电容器上电压之稳态分量为

$$u_y(0) = \operatorname{Re} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{E e^{j\varphi}}{j(\omega + K\Omega)_c} \frac{\Delta_K(j\omega)}{\Delta(j\omega)} = \operatorname{Re}[\dot{U}_y(0) e^{j\varphi}]. \quad (18)$$

下面我们将探讨电流的自由分量之拉普拉斯 p 表示式的求解法.

前已指出, 令在开关闭合前回路中之电流为 $i(0-)$, 电容器上之电压为 $u(0-)$. 由于在开关闭合瞬间 ($t = 0$) 回路中之电流和电容器上之电压不能发生跃变. 因而, 可求得在开关闭合瞬间回路中电流之自由分量 $i_{cb}(0)$ 和电容器上电压之自由分量 $u_{cb}(0)$ 之值为

$$\left. \begin{aligned} i_{cb}(0) &= i(0-) - i_y(0), \\ u_{cb}(0) &= u(0-) - u_y(0). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

在考虑到 (19) 式的条件下, 将式 (11) 两边各乘以 e^{-pt} , 并在 0 和 ∞ 的极限内进行积分之后, 则可求得式 (11) 之拉普拉斯 p 的表示式为

$$\begin{aligned} p[(mLe^{j\beta})I_{cb}(p-j\Omega)] + \left[pL + R + \frac{1}{pC}\right]I_{cb}(p) + \\ + p[(mLe^{-j\beta})I_{cb}(p+j\Omega)] = \\ = L_0[i(0-) - i_y(0)] - \frac{1}{p}[u(0-) - u_y(0)], \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $L_0 = L(1 + 2m\cos\beta)$ 为开关闭合瞬间 ($t = 0$) 回路中电感值.

由方程 (20) 可以看出, 变参数微分方程之拉普拉斯 p 的表示式和常系数微分方程之拉普拉斯 p 的表示式不一样. 前者不能直接确定 $I_{cb}(p)$, 因为它同时包含有三个未知量 $[I_{cb}(p-j\Omega), I_{cb}(p)$ 和 $I_{cb}(p+j\Omega)]$. 因此, 为求得 $I_{cb}(p)$ 值, 进行下列变换. 前已指出, 如果将式 (11) 两边乘以 e^{-pt} , 并在 0 和 ∞ 的极限内进行积分之后, 则可求得式 (20); 同样, 如果将式 (11) 两边分别乘以 $e^{-(p\pm j\Omega)t}$, $e^{-(p\pm j2\Omega)t}$, $\dots$ 或者 $e^{-(p\pm jK\Omega)t}$, 并在 0 和 ∞ 极限内进行积分后, 则式 (11) 就可变换成由无限个递演方程之拉普拉斯表示式组成之方程组, 该方程组之通式为

$$\begin{aligned}
& [(p + jK\Omega)(mLe^{i\beta})][I_{cb}(p + j\{K-1\}\Omega)] + \\
& + \left[(p + jK\Omega)L + R + \frac{1}{(p + jK\Omega)c} \right] [I_{cb}(p + jK\Omega)] + \\
& + [(p + jK\Omega)(mLe^{-i\beta})][I_{cb}(p + j\{K+1\}\Omega)] \\
& = L_0[i(0-) - i_y(0)] - \frac{1}{(p + jK\Omega)} [u(0-) - u_y(0)]. \quad (21)
\end{aligned}$$

$K = (0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$

由(21)式經若干变换后,則可求得

$$\begin{aligned}
I_{cb}(p) = & \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_K(p)}{\Delta(p)} L_0[i(0-) - i_y(0)] - \\
& - \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(p + jK\Omega)} \frac{\Delta_K(p)}{\Delta(p)} [u(0-) - u_y(0)], \quad (22)
\end{aligned}$$

式中 $\Delta(p)$ 为具有无限个递演方程(21)之各系数組成的行列式, $\Delta_K(p)$ 为相应于 $0, K$ 行列式元素上行列式的子式.

将(22)式代入(5)式,則可求得仅由电流之自由分量通过电阻时所产生的能量损耗值为:

$$\begin{aligned}
W_{R,cb} \approx & \operatorname{Re} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{Ee^{i\varphi}}{\Delta(-j\omega)} \frac{\Delta_K(-j\omega)}{\Delta(-j\omega)} L_0[i(0-) - i_y(0)] - \\
& - \operatorname{Re} \sum_{K=-\infty}^{\infty} \frac{Ee^{i\varphi}}{-j(\omega + K\Omega)c} \frac{\Delta_K(-j\omega)}{\Delta(-j\omega)} c[u(0-) - u_y(0)]. \quad (23)
\end{aligned}$$

将(17)式和(18)式代入(23)式,則可求得

$$\begin{aligned}
W_{R,cb} \approx & L_0 \{ \operatorname{Re} [I_y(0)e^{i\varphi}] \} \{ i(0-) - \operatorname{Re} [\dot{I}_y(0)e^{i\varphi}] \} - \\
& - c \{ \operatorname{Re} [\dot{U}_y(0)e^{i\varphi}] \} \{ u(0-) - \operatorname{Re} [\dot{U}_y(0)e^{i\varphi}] \}, \quad (24)
\end{aligned}$$

$I_y(0)$ 和 $U_y(0)$ 分别表示迴路中电流之稳态分量复数振幅值 $[i(0)]$ 和电容器上电压之稳态分量复数振幅值 $[\dot{U}(0)]$ 之共轭复数振幅值.

将(24)式代入(4)式,則可求得在过渡过程時間 τ 內迴路电阻所耗散之能量为

$$\begin{aligned}
W_R \approx & W_{L,0} + W_{c,0} + W_{R,y} - [W_{L,y(0)} + W_{c,y(0)}] + \\
& + L_0 \{ \operatorname{Re} [I_y(0)e^{i\varphi}] \} \{ i(0-) - \operatorname{Re} [\dot{I}_y(0)e^{i\varphi}] \} - \\
& - c \{ \operatorname{Re} [\dot{U}_y(0)e^{i\varphi}] \} \{ u(0-) - \operatorname{Re} [\dot{U}_y(0)e^{i\varphi}] \}. \quad (25)
\end{aligned}$$

若开关闭合前迴路中之电流和电容器上之电压为零 (如图 2 所示), 則 (25) 式就具有較简单的形式:

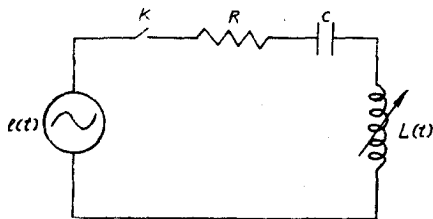


图 2

$$\begin{aligned}
e(t) &= E \cos(\omega t + \varphi), \\
L(t) &= L(1 + 2m \cos(\Omega t + \beta)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_R \approx & W_{R,y} - \\
& - [W_{L,y(0)} + W_{c,y(0)}] + \\
& + c \{ \operatorname{Re} [\dot{U}(0)e^{i\varphi}] \} \{ \operatorname{Re} [\dot{U}_y(0)e^{i\varphi}] \} - \\
& - L_0 \{ \operatorname{Re} [\dot{I}_y(0)e^{i\varphi}] \} \{ \operatorname{Re} [\dot{I}_y(0)e^{i\varphi}] \}. \quad (26)
\end{aligned}$$

应该指出, 式(25)和(26)是在开关闭合时开

始到迴路中电流之自由分量完全衰减到零值为止的过渡过程时间 τ 内获得的。理论上, 这个时间等于无限大。因此, 时间选取愈长, 计算结果就愈准确。然而, 往往考虑有限时间。为了获得较准确的结果, 过渡过程时间 τ 最好选取为迴路时间常数 3—4 倍, 此时, 电流自由分量值几近于零值^[2]。

根据以上分析, 可以得出如下结论: 在过渡过程时间 τ 内, 由电源输送到变参数迴路中之能量和该迴路中电阻之能量损耗值, 可直接由其操作前迴路中之电流和电容器上的电压, 操作后迴路中之稳态电流和电容器上之稳态电压决定之。而不需要去求解用以描述迴路中在过渡过程时间内电流变化之变参数微分方程, 从而大大的简化计算手续。

兹举例说明如何利用近似计算法来确定变参数系统中电阻能量损耗值。同时, 也用古典计算法求得之结果进行比较。

图 3 示由电阻和周期性变化的电感组成的迴路。在 $t = 0$ 时将开关 K 闭合。在过渡过程时间内迴路中电流可用下列微分方程描述之:

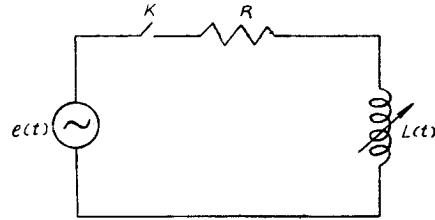


图 3

$$\begin{aligned} e(t) &= 1000 \cos(\omega t - 90^\circ) \text{ 伏,} \\ L(t) &= 1 + 0.1 \cos 2\omega t \text{ 亨,} \\ R &= 10 \text{ 欧, } \omega = 314 \text{ 赫.} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} [(1 + 0.1 \cos 2\omega t) i(t)] + 10 i(t) = 1000 \cos(\omega t - 90^\circ). \quad (27)$$

为研究方便计, (27) 式又可写成下列形式:

$$\begin{aligned} 0.05 \frac{d}{dt} [i(t) e^{j2\omega t}] + \left[\frac{di(t)}{dt} + 10 i(t) \right] + 0.05 \frac{d}{dt} [i(t) e^{-j2\omega t}] = \\ = \operatorname{Re}[1000 e^{j\omega t} e^{-j90^\circ}], \end{aligned} \quad (28)$$

(28) 式为 (8) 式在 $c = \infty$ 时之特殊情形。因此, (28) 式可用 (8) 式同样的方法求解。将 (9) 式代入 (8) 式, 则得

$$\begin{aligned} 0.05 \frac{d}{dt} [i_y(t) e^{j2\omega t}] + \left[\frac{di_y(t)}{dt} + 10 i_y(t) \right] + 0.05 \frac{d}{dt} [i_y(t) e^{-j2\omega t}] = \\ = \operatorname{Re}[1000 e^{j\omega t} e^{-j90^\circ}]. \end{aligned} \quad (29)$$

$$0.05 \frac{d}{dt} [i_{cb}(t) e^{j2\omega t}] + \left[\frac{di_{cb}(t)}{dt} + 10 i_{cb}(t) \right] + 0.05 \frac{d}{dt} [i_{cb}(t) e^{-j2\omega t}] = 0. \quad (30)$$

由于 $e^{\pm j2\omega t}$ 项之系数甚小, 故电流之稳态分量和电流之自由分量中高次谐波幅值与低次谐波和基本波幅值相较甚小。故在以下计算中, 设令 $K > 2$ 以上各次谐波之电流幅值为零。这可大大简化计算手续, 而结果影响甚微。

这样, 按公式 (12) — (17) 由 (29) 式可求得电流之稳态分量为

$$\begin{aligned} i_y(t) &\approx \operatorname{Re}\{[3.18 e^{j(\omega t - 88.3^\circ)} - 0.16 e^{j[(\omega + 2\omega)t - 88^\circ]} - 0.16 e^{j[(\omega - 2\omega)t - 90.1^\circ]}] e^{-j90^\circ}\}, \\ i_y(t) &\approx 3.18 \cos(\omega t - 178.3^\circ) - 0.16 \cos(3\omega t - 178^\circ) - \\ &\quad - 0.16 \cos(\omega t + 180.1^\circ), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\dot{i}_y(t) \approx 3.18 e^{j(\omega t - 88.3^\circ)} - 0.16 e^{j(3\omega t - 88^\circ)} - 0.16 e^{-j(\omega t + 90.1^\circ)}. \quad (32)$$

在 $t = 0$ 时, 迴路中之电流为零。故由 (19) 式得知 $i_{cb}(0) = -i_y(0) \approx 2.86$ 和 $L(0) =$

= 1.1. 因此, (30) 式之拉普拉斯 p 的表示式为

$$0.05 p I_{cb}(p - j2\omega) + [p + 10] I_{cb}(p) + 0.05 I_{cb}(p + j2\omega) = 3.14. \quad (33)$$

按公式(21)和(22)由(33)式, 可求得电流之自由分量为

$$i_{cb}(t) \approx 3.1 e^{-10t} - 0.31 e^{-10t} \cos(2\omega t + 1^\circ). \quad (34)$$

在忽略了 $K > 2$ 以上各次谐波情况下, 过渡过程时电流之近似值为

$$i(t) = i_y(t) + i_{cb}(t) \approx 3.18 \cos(\omega t - 178.3^\circ) - 0.16 \cos(3\omega t - 178^\circ) + 0.16 \cos(\omega t - 0.1^\circ) + 3.1 e^{-10t} - 0.31 e^{-10t} \cos(2\omega t + 1^\circ). \quad (35)$$

1, 古典算法:

$$\begin{aligned} W_R(\tau) &= \int_0^\tau [i(t)]^2 R dt \approx \int_0^\tau [3.18 \cos(\omega t - 178.3^\circ) - 0.16 \cos(3\omega t - 178^\circ) + \\ &\quad + 0.16 \cos(\omega t - 0.1^\circ) + 3.1 e^{-10t} - 0.31 e^{-10t} \cos(2\omega t + 1^\circ)]^2 10 dt \approx \\ &\approx 45.7 \tau + 4.64 - (0.019 e^{-10\tau} + 4.83 e^{-20\tau}) \text{ 焦耳}. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\tau = \frac{n\pi}{\omega}, \quad n \text{——正整数}.$$

2, 近似算法:

$$\begin{aligned} W_R(\tau) &\approx \int_0^\tau e(t) i_y(t) dt - \frac{1}{2} L(\tau) [i_y(\tau)]^2 - \\ &\quad - L(0) \{ \operatorname{Re}[\dot{I}_y(0) e^{-j90^\circ}] \operatorname{Re}[\dot{I}_y^*(0) e^{-j90^\circ}] \}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\int_0^\tau e(t) i_y(t) dt - \frac{1}{2} L(\tau) [i_y(\tau)]^2 \approx 45.7 \tau - 4.51, \quad (38)$$

$$L(0) \{ \operatorname{Re}[\dot{I}_y(0) e^{-j90^\circ}] \operatorname{Re}[\dot{I}_y^*(0) e^{-j90^\circ}] \} = -9.02. \quad (39)$$

将(38)和(39)式代入(37)式, 得

$$W_R(\tau) \approx 45.7 \tau + 4.51 \text{ 焦耳}. \quad (40)$$

$$\tau = \frac{n\pi}{\omega}, \quad n \text{ 为正整数}.$$

从以上计算可以看出, 近似算法较古典算法大为简便, 因前法不需要去求电流之自由分量和过渡过程时电流平方后之积分.

图 4 表示古典算法(36 式)和近似算法(40 式)变参数系统中电阻能量损耗值对过渡过程时间的关系. 为计算准确起见, 过渡过程时间应取为回路时间常数之 3—4 倍.

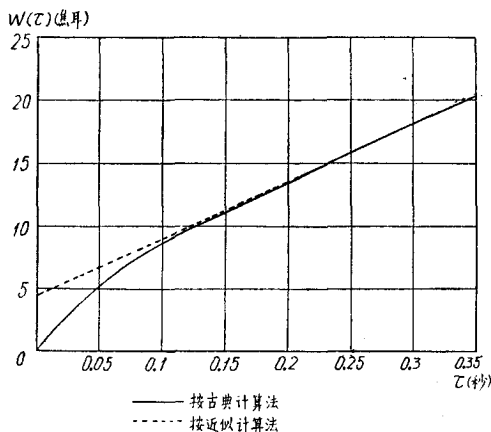


图 4

参 考 文 献

- [1] Тафт, В. А. Вопросы теории электрических цепей с переменными параметрами и синтеза импульсных и цифровых автоматических регуляторов. Изд-во АН СССР, (1960).
- [2] Тянь Цзо-у, "Электроэнергетика" ЭНИН АН СССР, вып. 2, (1960), 61.

- [3] Heaviside, O., Electric Paper. 2, 412.
[4] Lorentz, H. A. *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, 8 (1922), 333.

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ЭНЕРГИИ, РАССЕВАЕМОЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Тань Цзо-у

(Электротехнический институт, академия наук Китая)

Резюме

Непосредственное определение количества энергии, поступающей в цепь с переменными параметрами от источника за время переходного процесса, и потерь энергии в активных сопротивлениях за то же время по переходному току и напряжению, затрудняется в связи с решением дифференциальных уравнений с переменными параметрами цепи, которое весьма трудоемко даже для цепи средней сложности. В работе показано, как можно обойти трудности решения дифференциальных уравнений с переменными параметрами и приближенно оценить энергию по установившемуся току и напряжению до и после коммутации. Данный метод применяется к стабильной колебательной цепи с переменными параметрами.