

局部坐标系中的旋量球函数及算子*

侯 伯 宇
(西安矿业学院)

提 要

本文给出了各种表象的旋量球函数在局部坐标系中的表达式及其与固定坐标系的联系,并用此式讨论了光子、电子、双光子系波函数的各种性质。利用梯度算子及无穷小转动算子在局部系中的联系将旋量方程分离变量,得到了梯度公式。最后在局部系中探讨了散射问题,计算了 γ 跃迁的角向积分。

研究标量场的中心对称问题时,最方便的是采用球极坐标系。研究旋量场时,通常仍然对固定极轴(量子化轴)取自旋矩的投影。这种不考虑具体地点的取分量方法往往掩盖了问题固有的对称性,使旋量场的表达式及计算过程不必要地复杂化。例如最简单的旋量——径向单位矢量 $\mathbf{r}_0$ 在球面上各点 (θ, φ) 的表达式为 $-\sqrt{4\pi}\phi_{1,1}^0(\theta, \varphi) = -\sqrt{4\pi} \cdot \sum_m C_{1,m;1,-m}^0 Y_{1m}(\theta, \varphi) u_{1,-m}(K)^0$,分成的三个分量 $Y_{1m}(\theta, \varphi)$ 是随点而变的,也不易看出它是纵向的。因此有些作者^[2,3]引进了局部坐标系,但他们并没有详细讨论局部坐标系与固定球极坐标系间的明显变换式,一般文献中也不大采用局部坐标系。本文在第一节中导出了普遍变换式,引进了具有一定宇称及极化的旋量球函数。在三、四、五节中指出了通常的“电”及“磁”复极场,有确定宇称及动量矩的电子波函数以及汪容^[4]的双光子系波函数都可以由第一节的统一表达式得到。并且通过这些实例说明了在局部坐标系中旋量球函数的各种性质较为明显,构成符合某些选择律的波函数较为方便。在这种坐标系中容易理解过去关于双光子系的各工作^[4,5,6,7,8],并发现有些工作中不够明确或错误的地方。

Гельфанд等^[2]及 Любарский^[3]在局部坐标系中将旋量的一阶微分方程或二阶的Maxwell方程分离了变量求解。但由于或者是采用了固定系中的微分算子,或者是虽然采用了局部系中的微分算子,而最后仍旧用固定系中的无穷小转动算子来表示,演算过程较为繁复。本文第二节引进了局部系中的无穷小转动算子,找到了它与微分算子 ∇ 的横向分量的联系,从而得到了计算旋量球函数的微商的简单方法,这时只需利用广义球函数作为转动羣不可约表示的正则基的特性,用不着具体的微分递推式。用此法将方程分离了变量,与文献[2],[3]比较,指出了其中的错误。还可以直接求得梯度公式,避免了过去(例如[9])求梯度时从固定极轴投影到局部轴再投影回固定极轴这种往返周折的过程。

第六节简单讨论了用局部坐标式计算散射问题的方法,与现有的从固定极轴球坐标

* 1961年8月14日收到;1962年7月21日收到修改稿。

1) 式中各符号的含义请参看下节(1.5)式。本文中函数 Y 、 D 系数 C 、 W 的定义及位相及Euler角均依照文献[1]。

式出发的計算結果^[10,11,12,13]符合一致。在局部坐标系中討論散射幅的有些性質(例如南氏變換^[14,15,16,17])比較方便。

最后一节在局部系中分离径向及角向变量,計算了与电子在复极場中跃迁有关的一些矩陣的角向积分。

一、旋量球函数的各种表象及其在 局部坐标系中的表达式

采用通常的球极坐标系,旋量場在球面上的基底可以选择为

$$\psi_{lm;sm_s}(\theta, \varphi) \equiv Y_{lm}(\theta, \varphi) u_{sm_s}(K), \quad (1.1)$$

式中旋量球函数 $\psi_{lm;sm_s}(\theta, \varphi)$ 由两部分的积构成,自旋部分 $u_{sm_s}(K)$ 是 s 阶旋量, s, m_s 分别表示自旋矩及其在固定极軸 K 上的投影;空間分布部分 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ 为立体角 θ, φ 的球函数, l, m 表示軌道矩及其在极軸 K 上的投影。 $\psi_{lm;sm_s}(\theta, \varphi)$ 是 $l, m; s, m_s$ 的本征态。但在空間轉动时,它属于不同阶的不可約表示,并不具有确定的总动量矩 j 。变换到局部坐标系就可以更明显地看出这一点。

經過轉动 g 将以 K 为固定极軸的坐标系轉为以 κ 为极軸的局部坐标系,就得到

$$u_{s\mu_s}(\kappa) = \sum_{m_s} u_{sm_s}(K) D_{m_s\mu_s}^s(\varphi, \theta, \gamma),$$

式中 $u_{s\mu_s}(\kappa)$ 为 s 阶旋量,其自旋在局部軸 κ 上的投影为 μ_s , $D_{m_s\mu_s}^s(\varphi, \theta, \gamma)$ 是轉动 g 在 s 阶不可約表示中的矩陣元, φ, θ, γ 是轉动 g 的 Euler 参数,这儿 φ, θ 正好是 κ 軸在 K 系中的立体角。利用 D 矩陣的 U 性質,易得逆变换 $u_{sm_s}(K) = \sum_{\mu_s} D_{m_s\mu_s}^{s*}(\varphi, \theta, \gamma) u_{s\mu_s}(\kappa)$,

式中 $*$ 表示取复共軛。将此式代入(1.1)式,用 $\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} D_{m0}^{l*}(\varphi, \theta, \gamma)$ 表示 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, 用 Clebsch-Gordan 級数展开后,再考虑到 Clebsch-Gordan 系数的对称性,就得到局部坐标系中的表达式:

$$\psi_{lm;sm_s}(\theta, \varphi) = \sum_{l', \mu_s} (-)^{s+\mu_s} C_{j, -\mu_s; s, \mu_s}^{l, 0} C_{l', m; s, m_s}^{j, m+m_s} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{m+m_s, \mu_s}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma) u_{s\mu_s}(\kappa). \quad (1.2)$$

容易証明式中各項在轉动时各自独立地变化。可見在局部坐标系中,旋量場在球面上最自然的基底是

$$\psi_s^{jM\mu}(\theta, \varphi) \equiv \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M\mu}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma) u_{s\mu}(\kappa). \quad (1.3)$$

它是总动量矩 j, j 在固定极軸 K 上的投影 M 、在局部极軸 κ 上的投影 μ ($=s$ 在此軸上的投影 μ_s) 及自旋矩 s 的本征态。利用系数 C 的正交性,易由(1.2)得 $\psi_s^{jM\mu}$ 在固定系中的式子:

$$\psi_s^{jM\mu}(\theta, \varphi) = \sum_{l', m, m_s} (-)^{s+\mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l', 0} C_{l', m; s, m_s}^{j, M} \psi_{lm;sm_s}(\theta, \varphi). \quad (1.4)$$

常采用的是具有确定 j, M, s, l 的旋量球函数^[13]:

$$\psi_{ls}^{jM}(\theta, \varphi) = \sum_{mm_s} C_{l', m; s, m_s}^{j, M} Y_{lm}(\theta, \varphi) u_{sm_s}(K). \quad (1.5)$$

将(1.2)代入即得局部系中的式子:

$$\begin{aligned}\phi_{ls}^{iM}(\theta, \varphi) &= \sum_{\mu} (-)^{s+\mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) u_{s\mu}(\kappa) = \\ &= \sum_{\mu} (-)^{s+\mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0} \phi_s^{iM\mu}(\theta, \varphi),\end{aligned}\quad (1.6)$$

逆之得

$$\phi_s^{iM\mu}(\theta, \varphi) = \sum_l (-)^{s+\mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0} \phi_{ls}^{iM}(\theta, \varphi). \quad (1.7)$$

局部坐标式(1.3)的自旋部分 $u_{s\mu}(\kappa)$ 与球极坐标系 K 的转动无关, 对于 K 的转动来说是零阶 L 张量; 空间分布部分 $D_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma)$ 则依照 j 阶不可约表示变化. 这种写法便于分别研究波函数的空间分布与转动变换性 D 及粒子的自旋极化状态 u ; 也便于根据极化条件 u 选择相应的波函数 ϕ . 虽然 $\phi_s^{iM\mu}$ 不是 l 的本征态, 但 l 并非守恒量, 因此这并不妨碍用它来描述粒子的状态. 不过它也不具有确定的宇称. 的确, 在原坐标系中在 φ, θ, γ 处的右手局部系变为在反映坐标系中在 $\varphi \pm \pi, \pi - \theta, -\gamma$ 处的左手系 κ_L (局部极轴方向不变我们约定 φ 轴不变, θ 轴反向), 故当 j 为整数时,

$$PD_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) = D_{M\mu}^{i*}(\varphi \pm \pi, \pi - \theta, -\gamma) = (-)^j D_{M, -\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma).$$

由于反映时局部系的 θ 轴反向, 故磁量子数 μ 的符号改变:

$$Pu_{s\mu}(\kappa) = p_s u_{s, \mu}(\kappa_L) = p_s u_{s, -\mu}(\kappa)$$

式中 $p_s = \pm 1$ 为粒子的内禀宇称. 整个波函数经反映变为 $P\phi_s^{iM\mu}(\theta, \varphi) = p_s (-)^j \phi_s^{iM, -\mu}(\theta, \varphi)$, 并非宇称的本征态. 可以构成有确定宇称的函数 $\phi_s^{iM\mu p}$ 如下:

$$\begin{aligned}\phi_s^{iM\mu+}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_s^{iM, -\mu}(\theta, \varphi) + \phi_s^{iM\mu}(\theta, \varphi)) = \sum_l {}^+ C_{j, \mu; s, -\mu}^{l, 0} \phi_{ls}^{iM}(\theta, \varphi), \\ \phi_s^{iM\mu-}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_s^{iM, -\mu}(\theta, \varphi) - \phi_s^{iM\mu}(\theta, \varphi)) = \sum_l {}^- C_{j, \mu; s, -\mu}^{l, 0} \phi_{ls}^{iM}(\theta, \varphi),\end{aligned}\quad (1.8)$$

式中

$$\begin{aligned}{}^{\pm} C_{j, \mu; s, -\mu}^{l, 0} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [(-)^{s-\mu} C_{j, \mu; s, -\mu}^{l, 0} \pm (-)^{s+\mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0}] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-)^{s-\mu} C_{j, \mu; s, -\mu}^{l, 0} (1 \pm (-)^{l+s+j+2\mu}),\end{aligned}$$

$\phi_s^{iM\mu p}$ 的宇称为 $p \cdot p_s (-)^j$.

根据群表示的矩阵元 $D_{M\mu}^i$ 在群上积分的正交性及其完备性^[19, 2, 3] 以及系数 C 的正交性, 不难证明本节列举的各种表象的旋量球函数(1.1)、(1.3)、(1.5)、(1.8)均构成球面上旋量场的正交归一完备基, 可用来展开各种旋量函数. 例如旋量平面波

$$\begin{aligned}u_{sm_s}(K) e^{iK \cdot r} &= \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \zeta_l(Kr) \phi_{l0; sm_s}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{lj} \sqrt{4\pi(2l+1)} \zeta_l(Kr) C_{l, 0; s, m_s}^{j, m_s} \phi_{ls}^{jm_s}(\theta, \varphi) = \\ &= \sum_{j\mu} \sqrt{4\pi(2j+1)} \left(\sum_l (-)^{\mu-m_s} C_{j, -\mu; s, m_s}^{l, 0} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0} \zeta_l(Kr) \right) \phi_s^{j m_s \mu}(\theta, \varphi) \equiv \\ &\equiv \sum_{j\mu} \sqrt{4\pi(2j+1)} \zeta_{j, s}^{m_s \mu}(Kr) \phi_s^{j m_s \mu}(\theta, \varphi),\end{aligned}\quad (1.9)$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时的渐近式为

$$u_{sm_s}(K)e^{iKr} = \sum_j \frac{\sqrt{4\pi(2j+1)}}{2i} [\psi_s^{jm_s m_s} e^{iKr} + (-)^{j+s+2m_s+1} \psi_s^{jm_s, -m_s} e^{-iKr}] / Kr, \quad (1.9a)$$

式中 $\zeta_l(Kr)$ 为 l 阶球 Bessel 函数^[1]的 i^l 倍。

用局部坐标式易求旋量球函数的积:

$$\begin{aligned} \psi_{s_1}^{j_1 M_1 \mu_1}(\theta, \varphi) \psi_{s_2}^{j_2 M_2 \mu_2}(\theta, \varphi)^* &= \sum_{jM} (-i)^{2M_2} C_{j_1, M_1; j_2, -M_2}^{j, M} C_{j_1, \mu_1; j_2, -\mu_2}^{j, \mu} C_{s_1, \mu_1; s_2, -\mu_2}^{s, \mu} \\ &\quad \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2j+1)}} \psi_s^{jM\mu}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.10)$$

求上式时, 空间部分与自旋部分分别求积。空间部分利用了 $D_{M\mu}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma) = (-)^{M-\mu} \cdot D_{-M, -\mu}^j(\varphi, \theta, \gamma)$ ^[19], 再用 Clebsch-Gordan 级数展开; 自旋部分约定了 $u_{s\mu}^*$ 的相位为 $u_{s\mu}^* = (-i)^{2\mu} u_{s, -\mu}$, 再将直接积 $u_{s_1 \mu_1} u_{s_2 \mu_2}$ 按 s 阶不可约表示展开。

例如令 $s_1 = s_2 = s'$, $s = 0$ 就得到自旋空间中的不变量:

$$\begin{aligned} \psi_{s_1}^{j_1 M_1 \mu_1}(\theta, \varphi) \psi_{s_2}^{j_2 M_2 \mu_2}(\theta, \varphi)^* &= \sum_{jM} i^{2(s'-M_2-\mu_2)} C_{j_1, M_1; j_2, -M_2}^{j, M} C_{j_1, \mu_1; j_2, -\mu_2}^{j, 0} \\ &\quad \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2s'+1)(2j+1)}} Y_{jM}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.10a)$$

在 $s' = 1$ 时, 乘以系数 $-\sqrt{3}$ 即标积。考虑到 Racah 系数 W 与系数 C 的关系式 $C_{j_1 0; j_2 0}^{j 0} W(j, j, j, j; J, 1) = C_{j_1 1; j_2 -1}^{j 0}$ 等, 容易看出与通常的结果是等价的 (例如 [8])。令 $s_1 = s_2 = s = 1$, 并乘以系数 $\sqrt{2}$ 就得到矢积。用 (1.6)、(1.10a) 并采用 Racah^[20] 的对磁量子数求和法, 即得常见的结果^[8]:

$$\begin{aligned} \psi_{s_1}^{j_1 M_1}(\theta, \varphi) \psi_{s_2}^{j_2 M_2}(\theta, \varphi) &= \sum_{jM} (-i)^{2M_2+4j_2} C_{j_1, M_1; j_2, -M_2}^{j, M} C_{j_1, 0; j_2, 0}^{j, 0} W(j_1 j_2 l_1 l_2; js) \\ &\quad \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2s+1)(2j+1)}} Y_{jM}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (1.11)$$

利用 D 的 U 性质及 D 为群的表示 $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$, 易求得下式

$$\sum_M \psi_{s_1}^{j_1 M \mu_1}(\theta_1, \varphi_1) \psi_{s_2}^{j_2 M \mu_2}(\theta_2, \varphi_2)^* = \frac{2j+1}{4\pi} D_{\mu_2 \mu_1}^{j*}(\Phi, \Theta, \Gamma) u_{s_1 \mu_1}(\kappa_1) u_{s_2 \mu_2}(\kappa_2)^*, \quad (1.12)$$

式中 Φ, Θ, Γ 为 κ_1 系在 κ_2 系中的 Euler 角。在二系重合时,

$$\sum_M \psi_{s_1}^{j_1 M \mu_1}(\theta, \varphi) \psi_{s_2}^{j_2 M \mu_2}(\theta, \varphi)^* = \frac{2j+1}{4\pi} \delta_{\mu_1 \mu_2} u_{s_1 \mu_1}(\kappa) u_{s_2 \mu_2}(\kappa)^*, \quad (1.12a)$$

由此式及 (1.6) 易得^[18]中的对 M 求和诸式。

二、局部坐标系中的微分算子

如所周知^[2,20], 对于绕固定系的转动来说, 矩阵 $D_{M\mu}^{j*}$ 的第 M 列各元构成 j 阶不可约表示的正则基, 固定系中总动量矩算子 $\mathcal{J}$ 的各分量即以 Euler 角为参数时绕相应轴的无穷小转动算子 A 乘以负 i^1 , 利用 A 在正则基中的熟知矩阵元 $\|A\|_{ij}$, 就可求得

1) 本文采用 $\hbar = C = 1$ 的自然单位制。

$$\mathcal{J}_+ D_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) = \sum_{M'} (-i) \|A_+\|_{MM'} D_{M'\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) = \alpha_{M+1}^i D_{M+1, \mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma),$$

同理

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_- D_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) &= \alpha_M^i D_{M-1, \mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma), \\ \mathcal{J}_0 D_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) &= M D_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma),\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}\alpha_M^i &= \sqrt{(j+M)(j-M+1)}, \\ \mathcal{J}_0 &= \mathcal{J}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \mathcal{J}_{\pm} &= \mathcal{J}_x \pm i \mathcal{J}_y = -ie^{\pm i\varphi} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \pm i \frac{\partial}{\partial \theta} \right\}.\end{aligned}$$

对于绕局部系的转动来说, 矩阵 $D_{M\mu}^{i*}$ 的第 M 行各元构成正则基, 总动量矩算子 J 的各分量是绕局部轴的无穷小算子 A 乘以负 i , 这时 A 在正则基中的矩阵元不变, 只是改为作用于磁量子数 μ , 故有

$$J_+ D_{M,\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) = \sum_{\mu'} (-i) D_{M,\mu'}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) \|A_+\|_{\mu'\mu} = \alpha_{\mu+1}^i D_{M,\mu+1}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma),$$

同理

$$\begin{aligned}J_- D_{M,\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) &= \alpha_{\mu+1}^i D_{M,\mu+1}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma), \\ J_0 D_{M,\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) &= \mu D_{M,\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma),\end{aligned}\quad (2.1)$$

式中

$$\begin{aligned}J_0 &= J_r = -i \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ J_{\pm} &= J_{\theta} \pm i J_{\varphi} = -ie^{\mp i\gamma} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \pm i \frac{\partial}{\partial \theta} \right\},\end{aligned}$$

本式也可由将写成微分形式的 J 作用于广义球函数而直接验证, 这就是 D 对于指标 μ 的递推关系.

在局部系中 ∇ 算子的第三分量即径向微商 $\nabla^0 = \frac{\partial}{\partial r}$, 横向部分可求得如下, 将轨道矩算子 $\mathbf{L} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ 在局部系中写成球基矢分量式

$$\mathbf{L} = \sum_{\mu} u_{1\mu}(\kappa) L^{\mu} = -iru_{1,0}(\kappa) \times \nabla = -ru_{1,1}(\kappa) \nabla^1 + ru_{1,-1}(\kappa) \nabla^{-1}, \quad (2.2)$$

式中 L^{μ} 、 ∇^{μ} 为 L 、 ∇ 在局部系中的共变球矢分量^[9]. 比较左右侧就求得

$$\begin{aligned}\nabla^1 &= \frac{-L^1}{r} = \frac{L_-}{\sqrt{2}r} = \frac{J_- - S_-}{\sqrt{2}r} \\ \nabla^{-1} &= \frac{L^{-1}}{r} = \frac{L_+}{\sqrt{2}r} = \frac{J_+ - S_+}{\sqrt{2}r}\end{aligned}\quad (2.3)$$

式中 $L_{\pm} = L_{\theta} \pm iL_{\varphi}$, 为局部系中轨道矩产生及湮没算子,

$S_{\pm} = S_{\theta} \pm iS_{\varphi}$, 为局部系中自旋矩产生及湮没算子.

从 (2.2) 还得到 $L_0 = 0$. 这是很自然的, 局部系就是 l 的磁量子数 μ 为零, j 的磁量子数 μ 与 S 的磁量子数 μ_s 相等的坐标系. 所以算子 L 在此系是横的, $L_0 = 0$, 而算子 J 与 S 的纵向分量恒相等 $J_0 = S_0$.

由(2.3)式再利用(2.1)及

$$S_+ u_{s\mu}(\kappa) = \alpha_{\mu+1}^s u_{s, \mu+1}(\kappa), \quad S_- u_{s\mu}(\kappa) = \alpha_{\mu}^s u_{s, \mu-1}(\kappa), \quad (2.4)$$

易求 $\psi_s^{iM}(r; \theta, \varphi) \equiv \sum_{\mu} f_j^{\mu}(r) \psi_s^{iM\mu}(\theta, \varphi)$ 的微商如下:

$$\begin{aligned} \nabla \psi_s^{iM}(r; \theta, \varphi) &= \sum_{\mu\nu} u_{1\nu} \nabla_{f_j^{\mu}}^{\nu}(r) \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M\mu}^{i*}(\varphi, \theta, \gamma) u_{s\mu}(\kappa) = \\ &= \sum_{s'\mu} \left\{ C_{1,0;s,\mu}^{s',\mu} \frac{df_j^{\mu}}{dr} + C_{1,1;s,\mu-1}^{s',\mu} \frac{1}{\sqrt{2}r} (\alpha_{\mu}^i f_j^{\mu-1} - \alpha_{\mu}^s f_j^{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + C_{1,-1;s,\mu+1}^{s',\mu} (\alpha_{\mu+1}^i f_j^{\mu+1} - \alpha_{\mu+1}^s f_j^{\mu}) \right\} \psi_{s'}^{iM\mu}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (2.5)$$

此式包含了通常的梯度等公式^[1,9,21].

例如取 $S = 0$, 则 $S' = 1$, 就得到梯度公式:

$$\nabla \psi_0^{iM}(r; \theta, \varphi) = \nabla f(r) Y_{iM}(\theta, \varphi) = \frac{df}{dr} \psi_1^{iM0} + \frac{\alpha_0^i}{r} f \psi_1^{iM1+}, \quad (2.5a)$$

取 $S = 1, S' = 0$, 并乘以系数 $-\sqrt{3}$ 就得到散度公式:

$$\nabla \cdot \psi_1^{iM}(r; \theta, \varphi) = \left(\frac{df^0}{dr} + \frac{2}{r} f^0 - \alpha_0^i \frac{f^{1+}}{r} \right) Y_{iM}, \quad (2.5b)$$

取 $S = 1, S' = 1$, 并乘以系数 $\sqrt{2}i$ 就得到旋度公式:

$$\begin{aligned} \nabla \times \psi_1^{iM}(r; \theta, \varphi) &= i \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) (f^{1+} \psi_1^{iM1-} + f^{1-} \psi_1^{iM1+}) - \\ &\quad - i \alpha_0^i \frac{f^0}{r} \psi_1^{iM1-} + i \alpha_0^i \frac{f^{1-}}{r} \psi_1^{iM0}, \end{aligned} \quad (2.5c)$$

式中 $f^{1\pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(f^{-1} \pm f^{+1})$. 这三式也可以直接算出. 由(2.1)、(2.3)立即得梯度公式.

求散度与旋度时可以利用

$$\nabla^{\pm 1} u_{1\mu} = -\frac{S_{\mp}}{\sqrt{2}r} u_{1\mu} = -\frac{1}{r} u_{1, \mu \mp 1}.$$

因为 $\alpha_1^i = \alpha_0^i = \sqrt{2}$, 而 $\alpha_{-1}^i = \alpha_2^i = 0$ 则可以由 $u_{1,2} = u_{1,-2} = 0$ 考虑在内.

由(2.1)(2.4)易得

$$\begin{aligned} L \psi_s^{iM}(r; \theta, \varphi) &= \sum_{s'\mu} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}} C_{1,1;s,\mu-1}^{s',\mu} (\alpha_{\mu}^i f_j^{\mu-1} - \alpha_{\mu}^s f_j^{\mu}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} C_{1,-1;s,\mu+1}^{s',\mu} (\alpha_{\mu+1}^i f_j^{\mu+1} - \alpha_{\mu+1}^s f_j^{\mu}) \right\} \psi_{s'}^{iM\mu}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (2.6)$$

例如, $S = 0$ 时,

$$L f Y_{iM} = L f \psi_0^{iM} = \sqrt{j(j+1)} f \psi_1^{iM1-}, \quad (2.6a)$$

此法易推广到二次微商. 例如 $(\nabla \nabla) \psi$ 前的算子可化简如下:

$$\begin{aligned} \nabla \nabla &= \sum_{\mu\nu} u_{1\mu} \nabla^{\mu} u_{1\nu} \nabla^{\nu} = \sum_{s'\nu} \left[\sum_{\mu} (C_{1,\mu;1,\nu}^{s',\mu+\nu} u_{s',\mu+\nu} \nabla^{\mu} \nabla^{\nu}) - \right. \\ &\quad \left. - (C_{1,1;1,\nu-1}^{s',\nu} + C_{1,-1;1,\nu+1}^{s',\nu}) \frac{u_{s',\nu}}{r} \nabla^{\nu} \right], \end{aligned}$$

取 $S' = 0$, 并乘以系数 $-\sqrt{3}$, 就得到 Laplace 算子:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla &= \sum_{\mu} (-)^{\mu} \nabla^{\mu} \nabla^{-\mu} + \frac{2}{r} \nabla^0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{2r^2} (L_+ L_- + L_- L_+) = \\ &= \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} (J^2 - J_0^2 + S^2 - S_0^2 - J_+ S_- - J_- S_+).\end{aligned}$$

作用于 ψ 得到

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \nabla) \psi_i^{jM}(r; \theta, \varphi) &= \sum_{\mu} \left[\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} [j(j+1) + S(S+1) - 2\mu^2] \right\} f_i^{\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \alpha_{\mu+1}^j \alpha_{\mu+1}^S f_i^{\mu+1} + \frac{1}{r^2} \alpha_{\mu}^j \alpha_{\mu}^S f_i^{\mu-1} \right] \psi_i^{jM\mu},\end{aligned}\quad (2.7)$$

$S = 0$ 就是通常的 Laplace 算子径向与横向分离变量的形式:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right) f_i Y_{jM}$$

$S = 1$, 则有

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \nabla \psi_i^{jM}(r; \theta, \varphi) &= \sum_{\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{j(j+1) + 2 - 2\mu^2}{r^2} \right) f_i^{\mu} \psi_i^{jM\mu} + \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \alpha_{ifj}^j \psi_i^{jM0} + \frac{2}{r^2} \alpha_{ifj}^0 \psi_i^{jM1+},\end{aligned}\quad (2.7a)$$

$\nabla(\nabla\psi)$ 类型的一般表达式需将三个表示的积展开, 也可以直接选用 (2.5) 式求得, 例如选用 (2.5c), 即得

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \psi_i^{jM}(r; \theta, \varphi)) &= \left[(\alpha_0^j)^2 \frac{f^0}{r^2} - \alpha_0^j \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (rf^{1+}) \right] \psi_i^{jM0} + \\ &\quad + \left[\alpha_0^j \frac{d}{r dr} f^0 - \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf^{1+}) \right] \psi_i^{jM1+} + \left[(\alpha_0^j)^2 \frac{f^{1-}}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf^{1-}) \right] \psi_i^{jM1-},\end{aligned}\quad (2.8)$$

用此式可将方程

$$\nabla \times (\nabla \times E) - K^2 E = 0, \quad (2.9)$$

直接分离变量求解, 用不着化为附加有无散条件的 Gordan 方程, 设 $f^{1+} = f^0 = 0$, 得解

$$E_{iM}(\text{磁}) = \frac{K^{3/2}}{R^{1/2}} \zeta_j(Kr) \psi_i^{jM1-}(\theta, \varphi), \quad (2.9a)$$

即 j 阶磁复极辐射, 式中 R 为归一化球体的半径, 由 (2.9) 易见 $\nabla \times E(\text{磁})$ 也为解, 用 (2.5c) 取 (2.9a) 的旋度后, 得

$$\begin{aligned}E_{iM}(\text{电}) &= \frac{1}{iK} \nabla \times E_{iM}(\text{磁}) = \left(\frac{K}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\alpha_0^j \frac{\zeta_j(Kr)}{r} \psi_i^{jM0}(\theta, \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \zeta_j(Kr)) \psi_i^{jM1+}(\theta, \varphi) \right],\end{aligned}\quad (2.9b)$$

代入 (2.8) 易验证为 (2.9) 的解。

本文 (2.7a) 式与 Гельфанд 等的结果 ([2], 123 页, (21)) 一样, 只是后两项的符号相反, 原因是他们的章动角 θ 是对 x 轴的旋转, 故转至局部系的转动角与本文不同, 表

示矩陣 D 的相也与本文不同,結果在相邻二磁量子数之間与我們差一正負号。由于他的散度式(22)与本文(2.5b)最后一項符号也相反,故并不影响求得的解。順便指出,利用(1.9)式可看出

$$(\nabla \cdot \nabla + K^2) \left(\sum_{\mu} f_{\mu}^{\mu}(r) \psi_{\mu}^{iM\mu}(\theta, \varphi) \right) = 0$$

有 $2S + 1$ 組独立无关的解:

$$\sum_{\mu} \zeta_{is}^{m, \mu}(Kr) \psi_{\mu}^{iM\mu}.$$

文献[2]中的两个解及本文的(2.9a), (2.9b) 均为 $S = 1$ 时 $m_s = \pm 1$ 的两解的和及差。

本文(2.5)式与文献[2] 141 頁上(18)式 $f_{\mu}^{\mu \pm 1}$ (該文符号应为 $f_{s, \mu \pm 1, \tau}$) 前符号相反, 理由同前, 但該文 $\frac{m}{r} f_{lm\tau}^{i_0}$ 前漏掉了 $\frac{1}{r}$, 此外 $d_{l+1, l, m, m}^{\tau \tau}$ 求錯了, 应更正为 $-C_{l+1, l}^{\tau \tau}(l+2) \cdot \sqrt{(l+1)^2 - m^2}$, 故其(18)式应作相应的修改。否則, 例如求散度就是錯的。

文献[3]內 Любарский^[3] 的(60.12)式中 $\alpha' u^p$ 項前的符号与本文相反, 因为他用固定系的无穷小轉动算子表示局部系中微分算符的式子錯了, 球基矢分量的指标也应改变正負号, 作相应修改后, 除前述相位的不同外与本文一致。其例中 Maxwell 方程的径向部分及解都是錯誤的。用更正符号的(60.12)式就能得到正确的方程及解。

三、光子的波函数^[21]

由前两节易得光子波函数的各种表示式及性質見表 1。

由动量空間的表可見: $jM\mu ps$ 表象(1) (及其局部坐标式(3)) 与宇称(4)及偏振(5)有自然的連系。根据宇称及偏振选择了 $jM\mu ps$ 表象的波函数后就易由(1.8)式得到 $jMls$ 表象的式子(2), 这样就統一解释了纵波、电复极輻射場及磁复极輻射場前的系数, 与(例^[13])的形式相仿, 并指出了其来源。采用局部坐标式(3), 很容易利用(2.5a)、(2.5b)及球基矢的标积、矢积式得到(6)(7)(8)栏。由(2)中的系数 C 或(3)的矩陣 D 可看出 $j = 0$ 时只有纵波。

位形空間表中 $\bar{\psi}_l^{iM\mu}(r; \theta, \varphi)$ 表示 $\psi_l^{iM\mu}(\theta, \varphi)$ 在位形空間中的像。其径向部分可由动量空間 $jMls$ 表象的固定坐标式求 Fourier 像而得(2), 再用(1.6)式求得

$$\bar{\psi}_l^{iM\mu}(r; \theta, \varphi) = \sum_{\mu'} \zeta_{l\mu'}^{\mu \mu'} \psi_l^{iM\mu'},$$

最后用 Bessel 函数的递推关系写如(3)。也可以先由动量空間的球函数式求像而得(6), 由(6)用(2.5a)、(2.6a)、(2.5c)可得(3), 再与(2)比較就相当于由 Legendre 函数的递推关系(包含在梯度等公式內)导出了 Bessel 函数(平面波的球面展式的径向函数)的递推关系。根据 Bessel 函数的幂級数展式可見 $\bar{\psi}_l^{iM0}$ 及 $\bar{\psi}_l^{iM1+}$ 在靜区是纵横波的混合。但由 Bessel 函数的漸近式可見他們仍有一定的偏振。由于 r 空間的散度与旋度对应于 K 空間与 $iK u_{10}(\kappa)$ 的标积与矢积, 故 K 空間的横波在 r 空間散度为零, K 空間的纵波在 r 空間旋度为零, K 空間二横波与 $u_{10}(\kappa)$ 构成正交系, 在 r 空間則二者互为旋度。由(8)还可見到后二函数为 $\nabla \times \nabla \times A - K^2 A = 0$ 的解。

表 1

动量空间	$jM\mu s$ 表象 1	$jMl s$ 表象 2	局部坐标式 3	宇称 4	偏振 5	球函数式 6	$u_{1,0}(\kappa) \cdot \psi$ 7	$u_{1,0}(\kappa) \times \psi$ 8
	$\phi_1^{iM0}(\theta, \varphi)$	$\sum_l (-) C_{j,0,1,0}^{l,0} \phi_{11}^{iM}(\theta, \varphi)$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M0}^{j*}(\varphi, \theta, \tau) u_{1,0}(\kappa)$	$(-)^j$	纵	$Y_{jM}(\theta, \varphi) u_{1,0}(\kappa)$	$Y_{jM}(\theta, \varphi)$	0
	$\phi_1^{iM1+}(\theta, \varphi)$	$\sum_l + C_{j,1,1,-1}^{l,0} \phi_{11}^{iM}(\theta, \varphi)$	$\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} \left(D_{M,1}^{j*}(\varphi, \theta, \tau) u_{1,1}(\kappa) + D_{M,1}^{j*}(\varphi, \theta, \tau) u_{1,1}(\kappa) \right)$	$(-)^j$	横	$\frac{\kappa \nabla_K Y_{jM}(\theta, \varphi)}{\alpha_j^0}$	0	$i \phi_1^{iM1-}$
	$\phi_1^{iM1-}(\theta, \varphi)$	$\sum_l - C_{j,1,1,-1}^{l,0} \phi_{11}^{iM}(\theta, \varphi)$	$\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} \left(D_{M,-1}^{j*}(\varphi, \theta, \tau) u_{1,-1}(\kappa) - D_{M,1}^{j*}(\varphi, \theta, \tau) u_{1,1}(\kappa) \right)$	$-(-)^j$	横	$\frac{L Y_{jM}(\theta, \varphi)}{\alpha_j^0}$	0	$i \phi_1^{iM1+}$
位形空间								
	位形空间中的像	$jMl s$ 表象	$jM\mu s$ 表象	宇称	偏振	球函数式	$\nabla \cdot \vec{\psi}$	$\nabla \times \vec{\psi}$
	$\vec{\psi}_1^{iM0}(r; \theta, \varphi)$	$\sum_l (-) C_{j,0,1,0}^{l,0} \xi_l(Kr) \phi_{11}^{iM}(\theta, \varphi)$	$-i \frac{d\xi_j(Kr)}{K dr} \phi_1^{iM0}(\theta, \varphi) - i \alpha_j^0 \frac{\xi_j(Kr)}{Kr} \phi_1^{iM1+}(\theta, \varphi)$	$(-)^j$	纵	$\frac{1}{iK} \nabla \xi_j(Kr) Y_{jM}(\theta, \varphi)$	$iK \xi_j(Kr) Y_{jM}(\theta, \varphi)$	0
	$\vec{\psi}_1^{iM1+}(r; \theta, \varphi)$	$\sum_l + C_{j,1,1,-1}^{l,0} \xi_l(Kr) \phi_{11}^{iM}(\theta, \varphi)$	$-i \frac{dr \xi_j(Kr)}{K r dr} \phi_1^{iM1+}(\theta, \varphi) - i \alpha_j^0 \frac{\xi_j(Kr)}{Kr} \phi_1^{iM0}(\theta, \varphi)$	$(-)^j$	横	$\frac{-1}{K \alpha_j^0} \nabla \times L \xi_j(Kr) Y_{jM}(\theta, \varphi)$	0	$-K \vec{\psi}_1^{iM1-}$
	$\vec{\psi}_1^{iM1-}(r; \theta, \varphi)$	$\sum_l - C_{j,1,1,-1}^{l,0} \xi_l(Kr) \phi_{11}^{iM}(\theta, \varphi)$	$\xi_j(Kr) \phi_1^{iM1-}$	$-(-)^j$	横	$\frac{1}{\alpha_j^0} L \xi_j(Kr) Y_{jM}(\theta, \varphi)$	0	$-K \vec{\psi}_1^{iM1+}$

※ 位形空间各栏省略了共同的因子 $\sqrt{\frac{K}{R}}$

四、双光子系的波函数^[4]

双光子系的偏振旋量为二光子旋量的直接积 $u_{1\mu_1}(\kappa)u_{1\mu_2}(\kappa)$, (我们选定以质心系中第一光子的运动方向为局部系的极轴 κ , 如分别以各光子的运动方向为局部轴, 则此积等于 $-u_{1\mu_1}(\kappa_1)u_{1,-\mu_2}(\kappa_2)$, 这里 $\kappa_1 = \kappa$; κ_2 与 κ 的极轴、 φ 轴反向, θ 轴同向, 简写为 $\kappa_2 = -\kappa$), 可分解为不可约表示 $u_{1\mu_1}u_{1\mu_2} = \sum_s C_{1,\mu_1;1,\mu_2}^{s,\mu_1+\mu_2} \omega_{s,\mu_1+\mu_2}$. 取其有一定对称性的组合(1), 则从系数 C 的对称性, 易见对称态的 s 为 2 或 2, 0 的混合, 反对称态的 s 为 1 (2). 由于在空间反映时 $Pu_{1,\mu}(\kappa) = u_{1,-\mu}(\kappa)$, 则由系数 C 的奇偶性可见 $P\omega_{s,\mu}(\kappa) = (-)^s \omega_{s,-\mu}(\kappa)$ (5) 只有 $\mu = 0$ 的态有确定的内禀宇称, $\mu \neq 0$ 的态反映互变. 将自旋部分乘以相应的空间部分(同行(6)栏), 用(1.8)式构成有一定宇称及 j, M, μ 的波函数如(7), 或再用(1.7)即得(8). 根据 $u_{1,\pm 1}(\kappa)$ 为横的, $u_{1,0}(\kappa)$ 为纵的, 由(1)得(9). 由(5)及(1.8)得宇称(12). Bose 条件要求偏振对称态宇称为正, 反对称态宇称为负, 由(4)及(12)得(13). j 的最小值

表

二光子的偏振旋量 1	总 旋 量 2	直角坐标式 3	对称性 4	$P\omega$ 5	空 间 部 分 6
$u_{1,1}u_{1,1}$	$\omega_{2,2}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	对称	$\omega_{2,-2}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,2}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$u_{1,-1}u_{1,-1}$	$\omega_{2,-2}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	对称	$\omega_{2,2}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,-2}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{1,1}u_{1,-1} + u_{1,-1}u_{1,1})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{2,0} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\omega_{0,0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	对称	+	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,0}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{1,1}u_{1,-1} - u_{1,-1}u_{1,1})$	$\omega_{1,0}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	反对称	-	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,0}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{1,1}u_{1,0} + u_{1,0}u_{1,1})$	$\omega_{2,1}$	$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$	对称	$\omega_{2,-1}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,1}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{1,0}u_{1,-1} + u_{1,-1}u_{1,0})$	$\omega_{2,-1}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$	对称	$\omega_{2,1}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,-1}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{1,1}u_{1,0} - u_{1,0}u_{1,1})$	$\omega_{1,1}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -i \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$	反对称	$-\omega_{1,-1}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,1}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(u_{1,0}u_{1,-1} - u_{1,-1}u_{1,0})$	$\omega_{1,-1}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$	反对称	$-\omega_{1,1}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,-1}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$
$u_{1,0}u_{1,0}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\omega_{2,0} - \frac{1}{\sqrt{3}}\omega_{0,0}$	$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	对称	+	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,0}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$

(14)从(6)中的 D 或(8)中的 C 均易見。綜合(9)、(13)、(14)就得到在一定 jM 之下滿足橫波條件及 Bose 條件的態數,與以前各工作^[4,5,6,7,8]相符。自旋張量的直角坐標式(3)見文獻[4](本文是在局部系中的)。對角綫部分對應於綫偏振平行態;對角綫外部分對應於綫偏振垂直態,故有(10)。由 $u_{1\mu_1} \cdot u_{1\mu_2} = (-)^{\mu_2} \delta_{\mu_1, -\mu_2}$ 可得(11)。

用局部系各式便於學習、理解過去關於雙光子系的工作,在個別細節上可進一步澄清。

1. Шапиро^[7] 的反对称张量 A_{iK} , 相当于本文 $s = 1$ 各态(4), 自旋部分为赝矢量 $\omega_{1\mu}$ (2)、(5)。其中滿足橫波條件的 ϕ_i^{iM0} , 如該文指出, 對應的赝矢量是縱的($\omega_{1\mu}$ 的第三分量 ω_{10})。該文根據橫波條件選擇迹為零的對稱張量 S_{iK} (自旋部分為 $\omega_{2\mu}$) 態數的討論不夠妥當。對稱張量 P_{iK} 的自旋部分為 $\frac{1}{2} (u_{10}u_{1\mu} + u_{1\mu}u_{10})$ 的綫性組合。其中含有迹非零的部分 $u_0u_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。因此, 舍去 P_{iK} 后剩下的 $S_{iK} = S'_{iK} - P_{iK}$ 不再符合迹為零

2

$jM\mu\psi$ 表象 ($j, M; s_1, \mu_1; s_2, \mu_2$) 7	$j M l s$ 表象 8	偏振 9	偏振关系		宇称 12	Bose条件允許的 13	j 可以取的最小值 14
			綫 10	圓 11			
ϕ_2^{iM2+}	$\sum_l +C_{j,2;2,-2}^{l,0} \phi_{l2}^{iM}$	橫	及⊥	正交,反向	$(-)^j$	偶	2
ϕ_2^{iM2-}	$\sum_l -C_{j,2;2,-2}^{l,0} \phi_{l2}^{iM}$	橫	及⊥	正交,反向	$-(-)^j$	奇	2
$\sqrt{\frac{2}{3}} \phi_2^{iM0} + \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_0^{iM0}$ ($\phi_{1,\pm 1;1,\mp 1}^{iM}$)	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \phi_{l0}^{iM} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_l C_{j,0;2,0}^{l,0} \phi_{l2}^{iM}$	橫		同向	$(-)^j$	偶	0
ϕ_1^{iM0}	$\sum_l C_{j,0;1,0}^{l,0} \phi_{l1}^{iM}$	橫	⊥	同向	$-(-)^j$	偶	0
ϕ_2^{iM1+}	$\sum_l +C_{j,1;2,-1}^{l,0} \phi_{l2}^{iM}$	縱橫	⊥	正交	$(-)^j$	偶	1
ϕ_2^{iM1-}	$\sum_l -C_{j,1;2,-1}^{l,0} \phi_{l2}^{iM}$	縱橫	⊥	正交	$-(-)^j$	奇	1
ϕ_1^{iM1+}	$\sum_l +C_{j,1;1,-1}^{l,0} \phi_{l1}^{iM}$	縱橫	⊥	正交	$-(-)^j$	偶	1
ϕ_1^{iM1-}	$\sum_l -C_{j,1;1,-1}^{l,0} \phi_{l1}^{iM}$	縱橫	⊥	正交	$(-)^j$	奇	1
$\sqrt{\frac{2}{3}} \phi_2^{iM0} - \sqrt{\frac{1}{3}} \phi_0^{iM0}$ ($\phi_{1,0;1,0}^{iM}$)	$\sqrt{\frac{2}{3}} \sum_l C_{j,0;2,0}^{l,0} \phi_{l2}^{iM} - \sqrt{\frac{1}{3}} \phi_{l0}^{iM}$	縱		同向	$(-)^j$	偶	0

的条件。此外,他仅指出标量 S 是偏振平行的偶态,未说明该文表 3 中的偏振平行的偶态究竟是纯 S 态,还是与 S_{iK} 的混合态,也没讨论纯 S 是否横的。我们认为较严格的方法,是从六个对称张量 S_{iK} 与 S 中,先选择偶态如文献[8] ($j = 2n$ 时为 $\phi_2^{iM2+}, \phi_2^{iM1+}, \phi_2^{iM0}, \phi_0^{iM0}$; $j = 2n + 1$ 时为 $\phi_2^{iM2-}, \phi_2^{iM1-}$ 。(4), (13)), 再去掉不符合横波条件的 P_{iK} (含 $u_{1,0}$ 的各态(1), 偶 j 时为 $\phi_2^{iM1+}, \sqrt{\frac{2}{3}}\phi_2^{iM0} - \sqrt{\frac{1}{3}}\phi_0^{iM0}$, 奇 j 时为 ϕ_2^{iM1-}), 就可得他的表中的偶态数 ($j = 0, 1$ 的讨论相仿, 请参照(14))。文献[4]中已指出 Шапиро S_{iK} (纯) 态线偏振垂直的结论是错的。Шапиро 认为 S 态光子圆偏振方向相同, S_{iK} 态方向相反也不够严密。应更正为: 纯 S_{iK} 横波的二光子圆偏振方向相反而正交, $E_j^1 \cdot E_j^2 = 0$ 。但 S_{iK} 中的 ϕ_2^{iM0} 与 S 共同构成的横波的圆偏振相同 ($E_j^1 \cdot E_j^2 \neq 0$)(11)。

2. Ахизер 及 Берестецкий^[8] 的反对称张量赝矢量形式: $\mathbf{F} = Y_{jm}^{(-1)}(n)$ 即本文 ϕ_1^{iM0} 。用对称张量 $f_{\alpha\beta}$ 构成的矢量 $G = f_{\alpha\beta}n_\beta$ 中三个不为零的即 $\phi_2^{iM1\pm} \cdot u_{1,0} = \phi_1^{iM1\pm}$ 及 $\phi_{1,0;1,0}^{iM0} \cdot u_{1,0} = \phi_1^{iM0}$, 式中左侧的 ϕ 是双光子系波函数, 右侧为单光子波函数。在 $j = 2n + 1$ 时, G 中仅 ϕ_1^{iM1-} 的 l 是偶的, 舍去相应的含纵分量的双光子 ϕ_2^{iM1-} , 剩下符合横波条件的偶态 (参看上节的讨论) 是 ϕ_2^{iM2-} , $j = 2n, 1, 0$ 时的讨论相仿。

3. Широков^[6] 得的解 $\psi^{(0)}, \psi^{(1)}$ 并分离了自旋部分与空间部分, 与本文 $\phi_{1,\pm 1;1\mp 1}^{iM}$ 及 ϕ_1^{iM0} 的(4)乘(6)的形式相当。最后求迹为零的 $\psi^{(2)}$ 时, 利用横波条件引进的 η, η_1 实质上即相当于变到局部系分离出的空间部分。的确, 由我们的 $\phi_2^{iM2\pm}$ 的局部系式, 将 $\omega_{2,\pm 2}(K)$ 变为 $\sum_{m_s} \omega_{2,m_s}(K) D_{m_s, \pm 2}^2(\varphi, \theta, \gamma)$, 依次求出他的 $\phi_{ij}^{(2)}; x_1^+, x_m^+, x_{3m}^+; \eta, \eta_1$ 就可看出 η, η_1 分别与 $D_{m,-2}^j \pm D_{m,+2}^j$ 的偶奇部对应。如果一上来就用局部系, 也可以简明地看出这点, 这时 $\phi_{ij}^{(2)} = \phi_{ij}^{(2)} = 0, x_m^+$ 分别与 $D_{m\mp 2}^{i*}$ 对应, 在他的横波条件及其推论中[他的横波条件的第二、三式应更正为 $(x_m^+ - x_m^-) + (x_{3m}^+ - x_{3m}^-) \cotg \theta = 0$ 及 $(x_m^+ + x_m^- - 2x) + (x_{3m}^+ + x_{3m}^-) \cotg \theta = 0$, 并且要用到迹为零的条件]取 $\theta = 0$ 立即得到 η, η_1 分别相当于 $D_{m,-2}^{i*} \pm D_{m,2}^{i*}$ 。这样, 他设 $m = 0$ 时得到的方程 $-\Delta\theta\eta + \frac{4}{\sin^2\theta}\eta = M_2^2\eta$ 却是磁量子数为 2 型的方程就容易理解了, 这正表示在局部系中的量子数为 ± 2 。(即 $-\Delta\theta\eta - \frac{1}{\sin^2\theta}(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - 2\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2})\eta = j(j+1)\eta$ 在 $\frac{\partial}{\partial\varphi}\eta = 0, \frac{\partial}{\partial r}\eta = \pm 2i\eta$ 时的形式)。其解即 $D_{0,\pm 2}^{i*}$ 的线性组合。

4. 楊振宁^[5] 的 $a_+^{R*}\psi_{00..}, a_+^{L*}\psi_{00..}, a_-^{R*}\psi_{00..}, a_-^{L*}\psi_{00..}$ 的自旋部分, 分别与我们的 $u_{1,1}(K_1) = u_{1,1}(K), u_{1,-1}(K_1) = u_{1,-1}(K), u_{1,1}(K_2) = u_{1,1}(-K) = -u_{1,-1}(K)$ 及 $u_{1,-1}(K_2) = -u_{1,1}(K)$ 对应。故如认为二光子可区别, 则 $\phi^{RL}, \phi^{LR}, \phi^{RR} + \phi^{LL}, \phi^{RR} - \phi^{LL}$ 依次与本文 $\phi_2^{i22}, \phi_2^{i-2,-2}, \phi_{1,\pm 1;1\mp 1}^{i0,0}, \phi_1^{i00}$ 对应(1)。易见这时绕 K 轴的转动性 R_φ 如该文。但楊振宁的反映变换包括粒子交换在内。的确 $P\phi^{RL} = P a_+^{R*} a_-^{L*} \psi_{00..} = a_-^{L*} a_+^{R*} \psi_{00..}$ 必须利用 Bose 子的对易性才能化为 $a_+^{R*} a_-^{L*} \psi_{00..} = \phi^{RL}$ 。如不考虑光子的全同性, 则与 ϕ^{RL} 对应的 ϕ_2^{i22} 经反映变为 $(-)^i \phi_2^{i2,-2}$ 不是宇称本征态。必须再交换粒子[这时 $u_{1,\mu_1}(K)u_{1,\mu_2}(K) \rightarrow u_{1,\mu_2}(-K) \cdot u_{1,\mu_1}(-K) = u_{1,-\mu_2}(K)u_{1,-\mu_1}(K)$, 因粒子的自旋 μ_1, μ_2 交换, 且轴 K 的方向也改变为指向新的粒子 1 (原来的粒子 2) 的运动方向故要反号。空间部分则由于 K 的改变而由 $D_{\mu\mu}^{i*}$ 变为 $(-)^i D_{\mu,-\mu}^{i*}$] 才又变为 ϕ_2^{i22} 。粒子交换相当于空间反映与自旋交换的积。故楊振宁的

包含粒子交换的反映变换实质上与自旋交换等价, 而楊的結論应改为 ψ^{RL} 及 ψ^{LR} 是对称态, 但无确定宇称. 必須將 ψ^{RL} 及 ψ^{LR} 相混构成对二粒子对称的波函数, 例如 $\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} [D_{2,2}^{j*}(\varphi_{12}, \theta_{12}, \gamma_{12})u_{1,1}(K_1)u_{1,-1}(K_2) + D_{2,2}^{j*}(\varphi_{21}, \theta_{21}, \gamma_{21})u_{1,1}(K_2)u_{1,-1}(K_1)]$, 这里 $\varphi_{12}, \theta_{12}, \gamma_{12}$ 及 $\varphi_{21}, \theta_{21}, \gamma_{21}$ 分别为从 K_1 系及 K_2 系观察的立体角. 取 $K = K_1 = -K_2$ 即化为 $-\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} [D_{2,2}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)\omega_{2,2}(K) + (-)^j D_{2,-2}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)\omega_{2,-2}(K)]$ 才是宇称有确定值 $(+)$ 的 $\psi_2^{j,2,2\pm}$. 轉到其他坐标系就化为 $\psi_2^{j,M,2\pm}$. 同样, 未考虑光子全同性时平面波 $\psi^{LL} \pm \psi^{RR}$ 的各球面分波宇称为 $\pm(-)^j$, 对二光子对称化后, 奇 j 分波为零, 只剩下偶 j 分波, 才有了确定的宇称.

III 节的选择律 ii 也必須考虑 Bose 条件后方成立. 如二光子可区别, 則 $\psi^{RR} \pm \psi^{LL}$ 态繞 x 軸轉 π 角后二光子对换, 并非不变的. 的确这时 $D_{00}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$ 变为 $\sum_{M'} D_{0M'}^{j*}\left(-\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}\right) D_{M'0}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma) = (-)^j D_{00}^{j*}(\varphi, \theta, \gamma)$, 自旋的局部式不变. 故 ψ_i^{j00} 变为 $(-)^j \psi_i^{j00}$. 用前一段的方法可見与交换粒子后的結果相同. 可見 R_ξ 不一定为 1. 楊的結論应改为 R_ξ 与光子的交换等价, 只有考虑了 Bose 条件, 构成对二粒子对称的 $\psi^{RR} \pm \psi^{LL}$ 禁戒了奇 j 的存在后 R_ξ 才等于 1.

5. 本文即在汪容的^[4]启发下得到的, 將 (8) 栏 $jMls$ 表象中符合选择律的前四个用 (1.5) 写为固定极軸式即与之相同.

五、半自旋粒子的波函数^[9,22]

$\psi_{\frac{1}{2}}^{jM\frac{1}{2}}$ 及 $\psi_{\frac{1}{2}}^{jM,-\frac{1}{2}}$ 具有一定的螺旋性, 可作为双分量反中微子及中微子的波函数. 二者依 Lorentz 羣的互为共轭的二表示变换^[3], 在空間反映时互变, 沒有一定的宇称. 通常分别將二者对称及反对称組合作为 Dirac 4 分量波函数的“大”“小”分量. 这时螺旋性算子 γ_5 不再是对角形的, 但內禀宇称算子 β 是对角形的. 表 3 中列的是空間部分的宇称.

在局部坐标系中易求得常用的式子:

$$\sigma_r \equiv \frac{\sigma \cdot \mathbf{r}}{r} = 2S_0, \quad (5.1)$$

$$\sigma \cdot L = \sigma \cdot (J - S) = S_+ J_- + S_- J_+ - 1, \quad (5.2)$$

$$r\sigma \cdot \nabla = \sigma_r(r\nabla_0 + 1) + S_+ J_- - S_- J_+, \quad (5.3)$$

式中 σ 为 Pauli 矩陣, $\sigma = 2S, S_\pm, J_\pm$ 都是局部系中的. 由 (5.2) 可見 $\sigma \cdot L + 1$ 是橫的, 因此易由 σ 的反对易性得到

$$\sigma_r(\sigma \cdot L + 1)\sigma_r = -(\sigma \cdot L + 1). \quad (5.4)$$

(5.2) 与 (5.1) 相乘代入 (5.3) 即得

$$\sigma \cdot \nabla = \sigma_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sigma_r \sigma \cdot L, \quad (5.5)$$

由前三式得表中后三栏.

表

$jM\mu p s$ 表象	局 部 坐 标 式	$jMl s$ 表象
$\psi_{\frac{1}{2}}^{jM\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,\frac{1}{2}}^{j*} u_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{j-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{jM} - \psi_{j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{jM})$
$\psi_{\frac{1}{2}}^{jM,-\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} D_{M,-\frac{1}{2}}^{j*} u_{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{j-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{jM} + \psi_{j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{jM})$
$\psi_{\frac{1}{2}}^{jM\frac{1}{2}+}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} (D_{M,-\frac{1}{2}}^{j*} u_{-\frac{1}{2}} + D_{M,\frac{1}{2}}^{j*} u_{\frac{1}{2}})$	$\psi_{j-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{jM}$
$\psi_{\frac{1}{2}}^{jM\frac{1}{2}-}$	$\sqrt{\frac{2j+1}{8\pi}} (D_{M,-\frac{1}{2}}^{j*} u_{-\frac{1}{2}} - D_{M,\frac{1}{2}}^{j*} u_{\frac{1}{2}})$	$\psi_{j+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{jM}$

六、局部坐标系中的散射幅

将散射幅依 $jMl s$ 表象的旋量球函数展开

$$M = \sum_{jM} \frac{2\pi}{iK} \sum_{l's'} \psi_{l's'}^{jM}(\theta', \varphi') R_{l's';ls}^j \psi_{ls}^{jM*}(\theta, \varphi), \quad (6.1)$$

式中带撇的量属于终态,无撇的量属于始态. 取极轴沿入射粒子方向,用(1.5)表 ψ_{ls}^{jM} 即通常在固定系中的散射幅. 也可以用(1.6)式求局部系中的展式. 但这时最方便的是采用 j, M, μ, p, s 表象:

$$M = \sum_{jM} \frac{2\pi}{iK} \sum_{\substack{|\mu\rangle \\ |\mu'\rangle}} \psi_{s'\mu'p'}^{jM\mu'p'}(\theta', \varphi') R_{s'\mu'p';s\mu p}^j \psi_{s\mu p}^{jM\mu p}(\theta, \varphi), \quad (6.2)$$

用(1.8)可得

$$R_{l's';ls}^j = \sum_{\substack{|\mu\rangle \\ |\mu'\rangle}} p' C_{j,\mu';s',-\mu'}^{l',0} R_{s'\mu'p';s\mu p}^j C_{j,\mu;s,-\mu}^{l,0} \quad (6.3)$$

宇称守恒要求:

$$\begin{aligned} p = p', \quad R_{p,-p} = 0, \quad \text{如果} \quad p_s = p'_s, \\ p = -p', \quad R_{p,p} = 0, \quad \text{如果} \quad p_s = -p'_s. \end{aligned} \quad (6.4)$$

代入(6.3), 易见(6.4)即通常限制 l 的宇称选择律: $l + l'$ 为偶(奇)数, 如果散射道的宇称相同(反). 选球极轴沿入射粒子方向, 可由(6.2)求得终态的密度矩阵:

$$\begin{aligned} \rho'_{s_2\mu_2';s_1\mu_1'} S_p \rho' &= S_p M \rho M^+ = \\ &= \sum_{\substack{L, l_1, l_2 \\ \mu_1, \mu_2 \\ s_1, s_2}} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4K^2} (-)^{\mu_1'-\mu_1} C_{j_1-\mu_1';j_2,\mu_2'}^{L,\mu_2'-\mu_1'} C_{j_1,-\mu_1;j_2,\mu_2}^{L,\mu_2-\mu_1} R_{s_2\mu_2';s_2\mu_2}^{j_2} \\ &\quad \rho_{s_2\mu_2;s_1\mu_1} R_{s_1\mu_1;s_1\mu_1'}^{j_1*} D_{\mu_2-\mu_1;\mu_2'-\mu_1'}^{L*}(\varphi', \theta', r'), \end{aligned} \quad (6.5)$$

设始态是非极化的, 终态未观察极化, 则可求得角分布:

3

螺旋性	空间反映	σ_r	$\frac{1}{a_{1/2}^j}(\sigma \cdot L + 1)$	$\frac{1}{a_{1/2}^j}(r\sigma \cdot \nabla - \sigma_r)$
右		+	$\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, -\frac{1}{2}}$	$\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, -\frac{1}{2}}$
左		-	$\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, \frac{1}{2}}$	$-\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, \frac{1}{2}}$
	$(-)^{j-\frac{1}{2}}$	$-\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, \frac{1}{2}-}$	+	$\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, \frac{1}{2}-}$
	$(-)^{j+\frac{1}{2}}$	$-\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, \frac{1}{2}+}$	-	$-\phi_{\frac{1}{2}}^{iM, \frac{1}{2}+}$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{Lj_1j_2|\mu||\mu'|} \frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4K^2(2S_a+1)(2S_b+1)} (-)^{\mu'-\mu} \frac{1}{2} (C_{j_1, -\mu'; j_2, \mu'}^{L, 0} + \pi C_{j_1, \mu'; j_2, -\mu'}^{L, 0})$$

$$\frac{1}{2} (C_{j_1, -\mu; j_2, \mu}^{L, 0} + \pi C_{j_1, \mu; j_2, -\mu}^{L, 0}) P_L(\cos \theta') \sum_{p_1 p_2 s'} (R_{s' \mu' p_2'; s \mu p_2}^{j_2} R_{s \mu p_1; s' \mu' p_1'}^{j_1*}), \quad (6.6)$$

式中

$$\pi = p_1 p_2 (-)^{2\mu} = p_1' p_2' (-)^{2\mu'}. \quad (6.7)$$

符号法则 (6.7) 包含选择律: $l_1 + l_2 + L$ 及 $l_1' + l_2' + L$ 为偶数, 前式中 S_a, S_b 为入射粒子 a, b 的自旋.

如果变换到 $jMls$ 表象, 对磁量子数 μ 求和, 将 C 系数积的和用 Z 系数表之, 结果与寻常从固定系出发得到的式子相同^[10], 不过我们是从局部系出发的.

例: $S_a = 0, S = S' = S_b = \frac{1}{2}$; 这时 jp 即已为完整量子数, 故有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{j_1 j_2} \frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{8K^2} (C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{L, 0})^2 \left[\frac{1}{2} (1 - (-)^{j_1+j_2+L}) (R^{j_1+} R^{j_2+*} + \right.$$

$$\left. + R^{j_1-} R^{j_2-*}) + \frac{1}{2} (1 + (-)^{j_1+j_2+L}) (R^{j_1+} R^{j_2-*} + R^{j_1-} R^{j_2+*}) \right] P_2(\cos \theta'). \quad (6.6a)$$

变换到 $jMls$ 表象的系数 ${}^{\pm}C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, -\frac{1}{2}}^{L, 0}$ 等于零或 1, 故 $R^{j\pm}$ 分别与 $l = j \mp \frac{1}{2}$ 的 R^l 相等. 而 $\sqrt{(2j_1+1)(2j_2+1)} C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{L, 0}$ 在 $j_1 + j_2 + L$ 为奇数时, 即 $Z(j_1 - \frac{1}{2}, j_1, j_2 - \frac{1}{2}, j_2; \frac{1}{2}, L) = Z(j_1 + \frac{1}{2}, j_1, j_2 + \frac{1}{2}, j_2; \frac{1}{2}, L)$, 在 $j_1 + j_2 + L$ 为偶数时即 $Z(j_1 - \frac{1}{2}, j_1, j_2 + \frac{1}{2}, j_2; \frac{1}{2}, L) = -Z(j_1 + \frac{1}{2}, j_1, j_2 - \frac{1}{2}, j_2; \frac{1}{2}, L)$.

自旋 S 粒子衰变为半自旋粒子^[23] $S = S_a$ (无 b 粒子), $S' = \frac{1}{2}$. 质心系中 $J = S, \mu$ 即总磁量子数 M, R 与之无关. 故只有 R_+^j 及 R_-^j 分别为宇称守恒或不守恒部分:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{L, \mu_2, \mu_1} \frac{2S+1}{4K^2} C_{s, -\mu_1; s, \mu_2}^{L, \mu_2-\mu_1} C_{s, -\frac{1}{2}; s, \frac{1}{2}}^{L, 0} \left[\frac{1}{2} (1 - (-)^{L+2S}) (|R_+^s|^2 + |R_-^s|^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (1 + (-)^{L+2S}) (R_+^s R_-^{s*} + R_-^s R_+^{s*}) \right] \rho_{\mu_2 \mu_1} D_{\mu_2-\mu_1, 0}^{L, s}(\varphi', \theta', \gamma'). \quad (6.6b)$$

光子的散射, 这时散射系的总动量矩 j 及其在固定系的磁量子数 M 、局部系的磁量子数 μ 、与光子的宇称 p_r 构成完整量子数, 故有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\substack{L, j_1, \mu_1, p_{r1} \\ j_2, \mu_2, p_{r2}}} \frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{8K^2(2S_a+1)} (-)^{\mu'-\mu} C_{j_1, -\mu'; j_2, \mu'}^{L, 0} C_{j_1, -\mu; j_2, \mu}^{L, 0} \times \\ \times R_{\mu_1 \mu_1 p_{r1}}^{j_1} R_{\mu_2 \mu_2 p_{r2}}^{j_2*} P_L(\cos \theta'). \quad (6.6c)$$

用 $C_{j, \mu; s_a, 1-\mu}^{j, 1} + p_r C_{j, \mu; s_a, 1-\mu}^{j, -1}$ (这里 j, S_a, j_r 为散射系总动量矩, 核自旋矩及光子总动量矩, 磁量子数都是局部系里的) 作为变换系数就可化为 [13] 中的形式.

由 (6.6) 式可以看出 R_p 与 R_{-p} 交换并不改变角分布. 这就是南氏相变换在 $jM\mu s p$ 表象中的形式. 存在此种不确定性的原因是: 只测角分布、不测极化时不能察觉绕局部轴的转动. 在 μ 为半整数时, 取此转角 $\gamma = \pi$, 则 $\psi_s^{jM\mu}$ 变为 $\psi_s^{xjM\mu} = e^{-i\pi\mu} \psi_s^{jM\mu}$ (用附标 x 表示南氏变换后的量), 而 $\psi_s^{xjM\mu p} = e^{-i\pi\mu} \psi_s^{xjM\mu, -p}$, 故 $R_{\mu\mu}^{xp} = e^{-i\pi(\mu'-\mu)} R_{\mu\mu}^p$.

由 (6.6) 式还可以看出, 只有最后的括号与 S, S' 有关. 故在非弹性散射 S 非守恒量时, 还适于采用 $\psi_{s_a \mu_a; s_b \mu_b}^{jM}$ 表象. 这时可以分别绕局部轴转动粒子 a, b 而不改变角分布. 同上有 $\psi_{s_a \mu_a; s_b \mu_b}^{xjM} = e^{-i\gamma_a \mu_a - i\gamma_b \mu_b} \psi_{s_a \mu_a; s_b \mu_b}^{jM}$, γ_a 或 (和) γ_b 取值 π 为有物理意义的变换. 将此式沿有一定 S 的态展开化为 ψ_{is}^{jM} 表象, 再用 (1.6) 化为 ψ_{is}^{jM} 表象, 就有

$$\psi_{is}^{xjM} = \sum_{\substack{s' \\ \mu_a \mu_b}} \left(\sum_{\substack{s'' \\ \mu_a \mu_b}} (-)^{s''-s} C_{j, -\mu; s'', \mu}^{l^x, 0} C_{s_a \mu_a; s_b \mu_b}^{s'', \mu} e^{-i(\gamma_a \mu_a + \gamma_b \mu_b)} C_{s_a \mu_a; s_b \mu_b}^{s, \mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0} \right) \psi_{is}^{jM},$$

于是我们得到不改变角分布的相变换 $R^x = LRL^+$ 的变换矩阵 L 的普遍式:

$$L_{i^x s^x; i s} = \sum_{\mu_a \mu_b} (-)^{s^x-s} C_{j, -\mu; s^x, \mu}^{l^x, 0} C_{s_a \mu_a; s_b \mu_b}^{s^x, \mu} e^{-i(\gamma_a \mu_a + \gamma_b \mu_b)} C_{s_a \mu_a; s_b \mu_b}^{s, \mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0}, \quad (6.8)$$

在 $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$ 时, 简化为

$$L_{i^x s^x; i s} = \sum_{\mu} C_{j, -\mu; s^x, \mu}^{l^x, 0} e^{-i\gamma\mu} C_{j, -\mu; s, \mu}^{l, 0} \delta_{s^x s}. \quad (6.8a)$$

例: π - N 散射, $S_a = 0, S = S^x = S_b = \frac{1}{2}$. 取 $\gamma = \pi$ 即南氏变换^[14].

N - N 散射, $S_a = S_b = \frac{1}{2}$, 取 $\gamma_a = \pi, \gamma_b = 0$; 或 $\gamma_a = 0, \gamma_b = \pi$; 或 $\gamma = \gamma_a = \gamma_b = \pi$ 即^[16]中的变换.

N - D 散射, $S_a = \frac{1}{2}, S_b = 1$. 取 $\gamma = \gamma_a = \gamma_b = \pi$ 即文献 [17] 中弹性散射的情况. 取 $\gamma_a = 0, \gamma_b = \pi$ 或 $\gamma_a = \pi, \gamma_b = 0$ 即非弹性散射的情况.

π - D 散射, $S_a = 0, S = S^x = S_b = 1$. 取 $\gamma = \pi$, 这时在 $jM\mu s$ 表象中只是改变 $\psi_{is}^{jM, \pm 1}$ 相对于 ψ_{is}^{jM0} 的符号, 但 $jMl s$ 表象中得到另一组新相移.

在有光子参与的散射过程中, 取 $\gamma = \pi$, 光子的宇称不改变, 而且又没有 $\mu = 0$ 的纵分量, 因此得不到新的相移. 但若取 $\gamma = \frac{\pi}{2}$ 就可以改变光子的宇称, 得到有物理意义 (因无 $\mu = 0$ 态) 的新相移: 即电、磁复极场的相彼此交换.

在粒子转变过程中, 可以采用同时改变终态和始态的宇称的变换而不致改变角分布.

文献[15]中指出在南氏变换下, 反冲核的垂直于反应面的极化要改变符号, 现在也易理解, 这正是绕局部轴转动 π 角的结果.

七、电子跃迁矩阵的分离变量及其角部分的计算

用第二节的方法分离算子的径向及横向部分, 再将三个 D 函数的积的积分表示为两个 C 系数^[19], 就可得到

$$\begin{aligned} & \left(j_2 \frac{1}{2} m_2 p_2 | \psi_1^{JM0}(r; \theta, \varphi) \cdot \mathbf{r}_0 | j_1 \frac{1}{2} m_1 p_1 \right) \\ &= (f_{j_2}^{p_2}(r) \psi_{\frac{1}{2}}^{j_2 m_2 \frac{1}{2} p_2}(\theta, \varphi) | f_{j_1}^0(r) Y_{JM}(\theta, \varphi) | f_{j_1}^{p_1}(r) \psi_{\frac{1}{2}}^{j_1 m_1 \frac{1}{2} p_1}(\theta, \varphi)) \\ &= (-)^{M+m_2+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{j_1, m_1; j_2, -m_2}^{J, -M} \frac{1}{2} [1 - p_1 p_2 (-)^{j_1+j_2+J}] \times \\ & \times C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 0} \int f_{j_2}^{p_2} f_{j_1}^0 f_{j_1}^{p_1} r^2 dr, \end{aligned} \quad (7.1)$$

求角变量积分时避免了通常^[1]先写作简化矩阵 $\left(j_2 l_2 \frac{1}{2} \| Y_J \| j_1 l_1 \frac{1}{2} \right)$ 再表为 Racah 系数与 $(l_2 \| Y_J \| l_1)$, 或与之相同的由 j_1, j_2 的耦合为 J 改为由 $l_1 l_2$ 耦合为 J ^[9] 各方法的周折.

$$\begin{aligned} & \left(j_2 \frac{1}{2} m_2 p_2 | \psi_1^{JM0}(r; \theta, \varphi) \cdot \sigma | j_1 \frac{1}{2} m_1 p_1 \right) = \\ &= (-)^{M+m_2-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{j_1, m_1; j_2, -m_2}^{J, -M} \frac{1}{2} [1 + p_1 p_2 (-)^{j_1+j_2+J}] \times \\ & \times C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 0} \int f_{j_2}^{p_2} f_{j_1}^0 f_{j_1}^{p_1} r^2 dr, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} & \left(j_2 \frac{1}{2} m_2 p_2 | \psi_1^{JM1p}(r; \theta, \varphi) \cdot \sigma | j_1 \frac{1}{2} m_1 p_1 \right) = \\ &= (-)^{M+m_2-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{j_1, m_1; j_2, -m_2}^{J, -M} \frac{1}{2} [p_1 + p_2 p (-)^{j_1+j_2+J}] \times \\ & \times C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 1} \int f_{j_2}^{p_2} f_{j_1}^p f_{j_1}^{p_1} r^2 dr, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} & \left(j_2 \frac{1}{2} m_2 p_2 | \psi_1^{JM1p}(r; \theta, \varphi) \cdot L | j_1 \frac{1}{2} m_1 p_1 \right) = \\ &= (-)^{M+m_2-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{j_1, m_1; j_2, -m_2}^{J, -M} \frac{1}{4} (1 + p_1 p_2 p (-)^{j_1+j_2+J}) \times \\ & \times [(p_1 \cdot \alpha_{\frac{1}{2}}^{j_1}) C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 1} - p_1 p_2 \alpha_{\frac{3}{2}}^{j_1} C_{j_1, \frac{3}{2}; j_2, -\frac{1}{2}}^{J, 1}] \int f_{j_2}^{p_2} f_{j_1}^p f_{j_1}^{p_1} r^2 dr, \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned}
& \left(j_2 \frac{1}{2} m_2 p_2 | \psi_1^{JM_1 p}(r; \theta, \varphi) \cdot r \nabla | j_1 \frac{1}{2} m_1 p_1 \right) = \\
& = (-)^{M+m_2+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{j_1, m_1; j_2, -m_2}^{J, -M} \frac{1}{4} (1 - p_1 p_2 (-)^{j_1+j_2+J}) \times \\
& \times \left[(p_1 \cdot \alpha_{\frac{1}{2}}^{j_1}) C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 1} - p_1 p_2 \alpha_{\frac{3}{2}}^{j_1} C_{j_1, \frac{3}{2}; j_2, -\frac{1}{2}}^{J, 1} \right] \int f_{j_2}^{p_2} f_{j_1}^{p_1} r^2 dr, \quad (7.5)
\end{aligned}$$

与(7.4)式只有 J 的奇偶性不同, 因为 $r\nabla$ 与 L 的横向分量宇称相反.

$$\begin{aligned}
& \left(j_2 \frac{1}{2} m_2 p_2 | \psi_1^{JM_0}(r; \theta, \varphi) \cdot \nabla | j_1 \frac{1}{2} m_1 p_1 \right) = \\
& = (-)^{M+m_2+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(2j_1+1)(2j_2+1)}{4\pi(2J+1)}} C_{j_1, m_1; j_2, -m_2}^{J, -M} \frac{1}{2} (1 - p_1 p_2 (-)^{j_1+j_2+J}) \times \\
& \times C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 0} \int f_{j_2}^{p_2} f_{j_1}^{p_1} \frac{d}{dr} f_{j_1}^{p_1} r^2 dr, \quad (7.6)
\end{aligned}$$

除(7.6)式外甚至用不着求电子径向函数的微商. 这样就避免了通常求 γ 辐射几率^[21]时曲折的计算. 例如求磁复极辐射几率时, 各项的径向积分都是文献[21]中的 M_{L-1} 型的, 用不着根据径向方程作繁复的变化.

利用 C 系数的递推关系:

$$\begin{aligned}
& \alpha_0^j (C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 1} \pm C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, -\frac{1}{2}}^{J, -1}) = (\alpha_{\frac{1}{2}}^{j_1} \pm \alpha_{\frac{1}{2}}^{j_2}) (C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 0} \pm C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, -\frac{1}{2}}^{J, 0}) \\
& \alpha_0^j \alpha_{\frac{3}{2}}^{j_1} (C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{3}{2}}^{J, 1} \pm C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, -\frac{3}{2}}^{J, -1}) = \left(\alpha_{\frac{3}{2}}^{j_1} \alpha_{\frac{3}{2}}^{j_2} + \left[J(J+1) - j_1(j_1+1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - j_2(j_2+1) + \frac{1}{2} \right] \mp \alpha_{\frac{1}{2}}^{j_1} \alpha_{\frac{1}{2}}^{j_2} \right) (C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 0} \pm C_{j_1, \frac{1}{2}; j_2, -\frac{1}{2}}^{J, 0})
\end{aligned}$$

及上节所述用 Racah 系数表示 $C_{j_1, -\frac{1}{2}; j_2, \frac{1}{2}}^{J, 0}$ 的式子, 即可将本节各式化成常见的形式.

参 考 文 献

- [1] Edmonds, A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics (1957).
- [2] Гельфанд, И. М., Минлос, Р. А. и Шапиро, З. Я., Представления группы вращений и группы Лоренца (1958).
- [3] Любарский, Теория групп и её применений в физике (1957). 有中译本.
- [4] 汪容, 物理学报, **15** (1959), 55.
- [5] 杨振宁, Phys. Rev., **77** (1950), 242.
- [6] Широков, Ж.Э.Т.Ф., **24** (1953), 14; **26** (1954), 128.
- [7] Шапиро, У.Ф.Н., **53** (1954), 7. 中译文: 物理译报, **5** (1958), 351.
- [8] Ахвезер и Берестецкий, Квантовая электродинамика. 1959.
- [9] Rose, Elementary Theory of Angular Momentum.
- [10] Blatt & Biedenharn, Rev. Mod. Phys., **24** (1952), 258.
- [11] Biedenharn, Rose, Rev. Mod. Phys., **25** (1953), 735.
- [12] Simon & Welton, Phys. Rev., **90** (1953), 1037.
Simon, Phys. Rev., **92** (1953), 1050.
- [13] Morita, Sugie & Yoshido, Prog. Theor. Phys., **12** (1954), 713.
- [14] Minami, Prog. Theor. Phys., **11** (1954), 213.
- [15] Hayakawa, Kawaguchi, Minami, Prog. Theor. Phys., **12** (1954), 355.
- [16] Заставенко, Рынаин, 周光召, Ж.Э.Т.Ф., **34** (1958), 526.
- [17] 时学丹, 物理学报, **18** (1962), 184.

-
- [18] Берестецкий, Долгинов, Тер-Мартirosян, *Ж.Э.Т.Ф.*, **20** (1950), 527.
[19] Wigner, *Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra* (1959).
[20] Fano, Racah, *Irreducible Tensorial Sets* (1959).
[21] Rose, *Multipole Fields* (1955).
[22] Rose, *Relativistic Electron Theory* (1961).
[23] 陈中谟、何祚庥、冼鼎昌、朱洪元, *物理学报* **15** (1959), 254.

THE SPINOR WAVE FUNCTIONS AND OPERATORS IN THE LOCAL COORDINATE SYSTEM

HOU BAI-YÜ

ABSTRACT

Spinor wave functions are expressed in terms of variables in the coordinate system carried with the particle. The properties of various simple systems are discussed with the help of wave functions or scattering functions expressed in this form. The differential operators are expressed in terms of the infinitesimal rotation operators in the coordinate system carried with the particle. A simple way of separating the variables of various spinor wave equations is given.