

一个具有等間隔能譜的費米系統*

余友文 張宗燁 于 敏

提 要

本文提出了一个 N 个費米子的模型系統,在这个系統中,每个粒子有三个自由度(角度 θ , φ 和自旋),退化的組态所包含的粒子軌道角动量为 $l_0, l_0 - 2, \dots, 0$ (l_0 偶)或 1 (l_0 奇)的状态,一共 $2 \sum_{0(l \leq l_0)} (2l + 1) = \Omega$ 个。在粒子之間存在着 δ 型相互作用。本文求解了模型系統的本征解,討論了解的特点及其物理形象,并与原子核的情况作了一些初步的比較。結果发现,在定性上,模型系統的特点与等間隔能譜的原子核的特点相似。

一、引 言

实验上发现,在幻数原子核与大变形原子核之間,有一系列的偶偶核在能譜和 γ 跃迁上具有共同的特性^[1],例如:

(1) 第二激发态能量 E_2 与第一激发态能量 E_1 之比約为2倍,即

$$\frac{E_2}{E_1} \approx 2,$$

并且能量在 $2E_1$ 邻近常常有几条能級出現,这几条能級的自旋和宇称一般是 2^+ , 4^+ 或 0^+ 。

(2) 从 2_1^+ 到 0_1^+ 的 $E2$ 約化跃迁几率 $B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)^{1)}$ 比相应的单粒子值大几十倍。

(3) $2_2^+ \rightarrow 2_1^+$ 的跃迁主要是 $E2$ 跃迁,約化跃迁几率与 $2_1^+ \rightarrow 0_1^+$ 同数量級,亦比单粒子值大几十倍, $M1$ 跃迁的混合很小,并且 $M1$ 的約化跃迁几率一般比单粒子值小几个数量級。

(4) $2_2^+ \rightarrow 0_1^+$ 的 $E2$ 跃迁几率很小,即

$$\frac{B(E2, 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)} \gg 1$$

等等。我們称具有这类特点的原子核为具有等間隔能譜的原子核。例如,在 $A = 90-154$,以及 $A = 190-226$ 之間,除幻数核以外,一般都有这类特性。

在这篇文章中,我們提出了一个模型系統,这个系統具有 N 个費米子,每个粒子只有三个自由度,即空間方向 θ_i , φ_i 及內禀自旋 S_i 。它的哈密頓量是

* 1962年12月31日收到。

1) 以 J_i^π 标记第 i 个角动量为 J 的、宇称为 π 的能級。以 $B(EL, J_i^{\pi_i} \rightarrow J_f^{\pi_f})$ 标记从初态 $J_i^{\pi_i}$ 到末态 $J_f^{\pi_f}$ 的 L 极电跃迁的約化跃迁几率。

$$H = H_0 - \sum_{i < j} \delta(\cos \theta_i - \cos \theta_j) \delta(\varphi_i - \varphi_j), \quad (1.1)$$

其中 H_0 是单粒子的能量；在这个系统中，我們假定它是退化的。退化态的軌道角动量由 $l_0, l_0 - 2, \dots$ 到 0 (或 1)，总态数为 Ω^0 ，

$$\Omega = \begin{cases} 2 \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) = (l_0+1)(l_0+2), & l \text{ 为偶数,} \\ 2 \sum_{l=1}^{l_0} (2l+1) = (l_0+1)(l_0+2), & l \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (1.2)$$

因子 2 是由自旋来的。H 量中的第二部分是粒子間的相互作用。为叙述方便起见，我們沿用在原子核中通用的术语，把所考虑的单粒子组态 $l_0, l_0 - 2, \dots, 0$ (或 1) 的总和称为一个大壳，并且把不考虑径向部分的 δ 型相互作用 $\delta(\cos \theta_i - \cos \theta_j) \cdot \delta(\varphi_i - \varphi_j)$ 仍然称为 δ 型相互作用 (或简称 δ 力)。感兴趣的是这个模型系统的低激发能谱在很多地方与上述等间隔能谱的原子核相似。这篇文章的目的是提出这一模型系统，给出它的本征解，讨论解的特点及产生这些特点的物理因素，并且与原子核的情况作了一些初步的比较。

二、辛弱数 (Seniority)

在这一节中我們將証明，在未滿大壳层中有 N 个全同粒子的低激发能谱可以还原为 2 个、4 个、 $\dots$ 粒子的能谱。这是由于对于哈氏量 (1.1) 辛弱数是一个好量子数。

Racah^[2] 在单组态 j 的情况下，曾利用下列群系列

$$SU(2j+1) \supset Sp(2j+1) \supset R_3$$

把波函数分类。 $SU(2j+1)$ 是么模酉群， R_3 是三維轉动群， $Sp(2j+1)$ 是辛群，它保持反对称双綫性式

$$\sum_m C_{jmj-m}^{00} \psi_{jm}(1) \psi_{j-m}(2) \quad (j \text{ 是半整数}) \quad (2.1)$$

不变。通常称波函数是这种形式的两个粒子为配成一对。

显然在 N 个粒子的波函数中，对于只有 ν 个粒子未配成对，其余 $(N - \nu)$ 偶数个粒子都是两两配成对的那些波函数，构成辛群的一个表示。这个表示和 ν 个不配对粒子波函数所构成的表示等价。未配成对的粒子数 ν 被 Racah 称为辛弱数。如果哈氏函数可以分解成辛群的元素，则显然 ν 是一个好量子数。

很多作者都曾指出^[3]，在全同粒子的情况下， δ 相互作用力可以写成两个辛群无穷小算符乘积的綫性迭加，因此辛弱数是一个好量子数。

很容易将以上結果推广到多组态 $(j_1 j_2 \dots j_0)$ 情况上去。这时辛群应该是 $\Omega = \sum_j (2j+1)$ 維的，并且是保持下列反对称双綫性式不变的：

$$\varphi_0(12) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{jm} j C_{jmj-m}^{00} \psi_{jm}(1) \psi_{j-m}(2). \quad (2.2)$$

1) Ω 也可以用粒子的总角动量 j 表示出来，即 $\Omega = \sum_j (2j+1)$ 。

其中 $\Omega^{-\frac{1}{2}}$ 是归一化因子, 符号 j 代表 $\sqrt{2j+1}$. 同样我們可以称具有这种波函数的两个粒子为配成一对. 这里与单組态情况不同之点是: 在单組态 j 情况下, 只要两个粒子耦合成总角动量 $J=0$ 就是配成一对; 而在这里, 并不是所有总角动量 $J=0$ 的两个粒子都是配成对的, 只有具有如(2.2)式那种结构的才称为一对.

和单組态情况下一样, 波函数中未成对的粒子数 ν 被称为辛弱数. 也同样可以証明, 在全同粒子情况下, δ 相互作用力可以写成两个辛羣无穷小算符乘积的綫性組合, 从而辛弱数是好量子数. 証明的方法和单組态情况下一样, 这里不贅述了. 但是在这里必須特別討論关于自能項問題. 这一問題在单組态情况下是自明的. 为了把相互作用写成辛羣无穷小算符的乘积, 必須在相互作用

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \delta(\cos \theta_i - \cos \theta_j) \delta(\varphi_i - \varphi_j) = \\ &= \frac{2}{3} \sum_{i \neq j} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \delta(\cos \theta_i - \cos \theta_j) \delta(\varphi_i - \varphi_j) = \\ &= \frac{2}{3} \sum_{\substack{i \neq j \\ L, M, \mu}} (-1)^{M+\mu} (s_\mu(i) Y_{LM}(i)) (s_{-\mu}(j) Y_{L-M}(j)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

中增加自能項, 而变成

$$H' = \frac{2}{3} \sum_{\substack{ij \\ L, M, \mu}} (-1)^{M+\mu} (s_\mu(i) Y_{LM}(i)) (s_{-\mu}(j) Y_{L-M}(j)). \quad (2.3')$$

于是发生这样一个問題, 对于(2.3'), 辛弱数是一个好量子数, 那么对于真正的相互作用(2.3), 辛弱数是不是好量子数呢? 回答是肯定的. 因为自能項是一个常数¹⁾:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \left\langle \psi_{jm} \left| \sum_{L, M, \mu} (-1)^{M+\mu} (s_\mu(i) Y_{LM}(i)) (s_{-\mu}(i) Y_{L-M}(i)) \right| \psi_{jm} \right\rangle = \\ &= \frac{2}{3} \sum_{\substack{L, M, \mu \\ j'm'}} (-1)^{M+\mu} \langle \psi_{jm} | s_\mu(i) Y_{LM}(i) | \psi_{j'm'} \rangle \langle \psi_{j'm'} | s_{-\mu}(i) Y_{L-M}(i) | \psi_{jm} \rangle = \\ &= \sum_{L, j', r} \frac{1}{4\pi} (2r+1)(2j'+1)(2l+1)(2l'+1) U^2 \begin{pmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ l' & \frac{1}{2} & j' \\ L & 1 & r \end{pmatrix} (C_{l0j0}^{L0})^2 = \\ &= \frac{1}{8\pi} \sum_{l'} (2l'+1) = \frac{1}{16\pi} \Omega. \end{aligned} \quad (2.4)$$

因此, 令 $\psi^{(\nu)}$ 是包含 ν 个粒子的哈氏函数的本征态, 本征能量为 $E^{(\nu)}$,

$$H^{(\nu)} \psi^{(\nu)} = E^{(\nu)} \psi^{(\nu)},$$

1) 注意, 由于我們把組态混合限定在一个大壳內, 因此, $Y_{LM}(i)$ 是一个有限行列的矩阵, (2.4) 式中的 j' 只能是大壳內的状态, 因而 $\sum_{L, M, \mu} (-1)^{M+\mu} (s_\mu(i) Y_{LM}(i)) (s_{-\mu}(i) Y_{L-M}(i)) \neq s_i \cdot s_i \delta(\cos \theta_i - \cos \theta_i) \delta(\varphi_i - \varphi_i)$.

則波函数

$$\Psi^{(N)} = \sqrt{\frac{1}{M_{N\nu}}} p\{\psi^{(\nu)} \varphi_0(12) \varphi_0(34) \cdots \varphi_0(N-\nu-1, N-\nu)\} \quad (2.5)$$

是包含 N 个粒子的哈氏函数 $H^{(N)}$ 的本征态

$$H^{(N)} \Psi^{(N)} = E^{(N)} \Psi^{(N)},$$

式中 p 是反对称化算符, $\sqrt{\frac{1}{M_{N\nu}}}$ 是 $\Psi^{(N)}$ 的归一化因子, 其中我們定义 $\psi^{(\nu)}$, $\varphi_0(ij)$ 都是反对称归一化的波函数¹⁾. 因此, 一个 N 个粒子的体系, 辛弱数为 ν 的波函数可以写成一部分是 ν 个不配对粒子, 另一部分是 $(N-\nu)$ 个配对粒子波函数这样两个部分的乘积.

$E^{(N)}$ 可以如下求得. 在 $H^{(\nu)}$ 及 $H^{(N)}$ 中补足自能項后的哈氏量以 $H'^{(\nu)}$ 及 $H'^{(N)}$ 表示, 則

$$\begin{aligned} H'^{(\nu)} \psi^{(\nu)} &= \left(E^{(\nu)} + \frac{1}{16\pi} \nu \Omega \right) \psi^{(\nu)}, \\ H'^{(N)} \Psi^{(N)} &= \left(E^{(N)} + \frac{1}{16\pi} N \Omega \right) \Psi^{(N)}. \end{aligned}$$

另一方面,

$$H'^{(N)} \Psi^{(N)} = \left(E^{(\nu)} + \frac{1}{16\pi} \Omega \nu \right) \Psi^{(N)},$$

所以

$$E^{(N)} = E^{(\nu)} - \frac{1}{4\pi} \Omega \cdot \frac{(N-\nu)}{4}. \quad (2.6)$$

換言之, 每增加一对粒子所增加的結合能是 $\frac{\Omega^2}{8\pi}$. 由(2.5), (2.6)两式可見, 只要我們解出 $H^{(\nu)}$ 的本征解, 就立刻可以得到 $H^{(N)}$ 的辛弱数为 ν 的本征解.

从下面可以看到, $H^{(N)}$ 的本征解中的低能部分是辛弱数小的那几个. 因此, 我們就把 N 个粒子的問題化为 $0, 2, 4, \cdots (N \text{ 偶数})$ 或 $1, 3, 5, \cdots (N \text{ 奇数})$ 个粒子的問題.

三、辛弱数 $\nu=2$ 的能譜. “对”的概念

(1) 辛弱数 $\nu=2$ 的能譜

在模型系統中, 辛弱数 $\nu=2$ 的本征解是可以严格求到的. 由于系統的哈氏量为

$$H = -\delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (3.1)$$

所以系統的总軌道角动量 L 及总自旋 S 都是好量子数. 为了計算方便, 下面我們在 $L-S$ 耦合表象中进行討論.

在这一系統中, 矩陣元可以分解为只与右边組态有关及只与左边組态有关的两个独

1) 我們这样选择反对称化因子 p , 使得每一已反对称化部分中的粒子标号是任意的.

2) 在目前超導理論中^[4], 相互作用能是所謂对能, 对能和 δ 力有很大的不同, 这一点在下面几节中我們将会看到.

这里要指出的是在对能情况下, $E_{\text{对}}^{(N)} = -\frac{1}{4} (\Omega - N - \nu + 2) \frac{(N-\nu)}{4}$. 因此每增加一对粒子, 所增加的

結合能不仅与 Ω 有关, 而且与 N, ν 有关.

立因子的乘积, 即

$$\langle \psi_{l_1 l_2 J M}(12) | H | \psi_{l'_1 l'_2 J M}(12) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \frac{l_1 l_2}{j} C_{l_1 0 l_2 0}^{J 0} \frac{l'_1 l'_2}{j} C_{l'_1 0 l'_2 0}^{J 0}. \quad (3.2)$$

用符号

$$A_{l_1 l_2 J} = \frac{l_1 l_2}{j} C_{l_1 0 l_2 0}^{J 0}, \quad (3.3)$$

則

$$\langle \psi_{l_1 l_2 J M}(12) | H | \psi_{l'_1 l'_2 J M}(12) \rangle = -\frac{1}{4\pi} A_{l_1 l_2 J} A_{l'_1 l'_2 J}. \quad (3.2')$$

对于矩陣元具有这类特性的两个粒子能譜問題是很容易求解的。解的結果为: 对于每一个 J , 相互作用集中在一条能級上, 这条能級被劈裂下来, 其余的能級仍然在原点保持退化。劈裂下来的能級的本征能量为

$$E_J = -\frac{1}{4\pi} \sum_{l_1 l_2} A_{l_1 l_2 J}^2. \quad (3.4)$$

相应的反对称归一的本征函数为

$$\varphi_{JM}(12) = \sqrt{\frac{1}{n_J}} \sum_{l_1 l_2} A_{l_1 l_2 J} \psi_{l_1 l_2 J M}(12) \chi_0(12), \quad (3.5)$$

其中 n_J 为归一化因子, $n_J = \sum_{l_1 l_2} A_{l_1 l_2 J}^2$, $\chi_0(12)$ 为单态自旋波函数。在 Q 很大 ($l_0 \gg 1$)

的近似下, 当 $J \ll l_0$ 时, 我們可以把能量用 Q 的方次表示出来。(在估計数量級时, 要用到一些 Clebsch-Gordon 系数的近似值, 又因在下面的討論中还要用到 U 系数的近似值, 因此一并把它們列于附录 I 中。)我們把(3.4)式改写一下:

$$E_J = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q}{2} - \sum_{l_1} \sum_{l_2}' \hat{l}_1 (C_{l_1 0 J 0}^{J 0})^2 \right), \quad (3.4')$$

其中“'”代表只对超过 l_0 的項求和。于是就求到了 $l_0 \gg 1$ 的极限能譜。特別地, 我們把較低的几个 $J(2, 4, 6, 8)$ 的能量給出如下:

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q}{2} - 0.75 l_0 \right), \\ E_4 &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q}{2} - 1.41 l_0 \right), \\ E_6 &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q}{2} - 2.05 l_0 \right), \\ E_8 &= -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{Q}{2} - 2.69 l_0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

此結果表明: 总相互作用能都是与 Q 成正比的, 能級間距与 $\sqrt{Q}$ 成正比, 并且低激发能譜近似是等間隔的(见图 1)。

特別感兴趣的是当 l_0 不很大时, 能譜的等間隔趋势仍被保留下来。图 2 給出了 s.d.g. 壳辛弱数为 2 的能譜, 它近似地表現出了等間隔的趋势。在第五节中, 我們將看到对于 s.d. 壳, 这个特点仍然沒有被破坏。

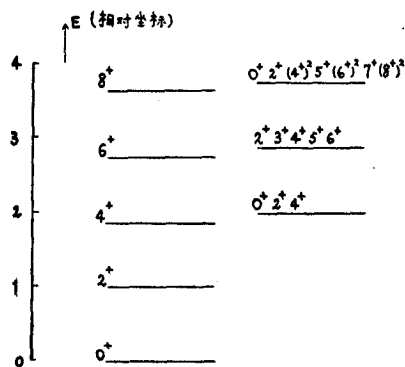


图 1

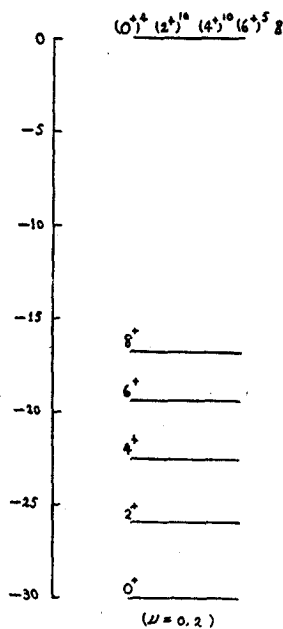


图 2

(2) “对”的概念

从辛弱数为 0, 2 的本征解中, 可以看出: 虽然总角动量等于 J 的能级数目是很多的, 但在 δ 相互作用下, 只有一条能级有相互作用, 其余的能级都无相互作用。这一条能级的结构是很特殊的。首先来看 $J = 0$ 的情形:

$$\varphi_0(12) = \sqrt{\frac{1}{n_0}} \sum_{lm} (-1)^{l-m} Y_{lm}(1) Y_{l-m}(2) \chi_0(12)$$

$$\xrightarrow{(l_0 \gg 1)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n_0}} \{ \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \delta(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2 - \pi) \} \chi_0(12). \quad (3.7)$$

上式中 $\sqrt{\frac{1}{n_0}}$ 是归一化因子, $n_0 = \sum_l A_{l0}^2 = \frac{Q}{2}$, 当 l_0 为偶数时取加号, 当 l_0 为奇数时取减号。这个式子表示出当 l_0 较大时, 这条能级的两个粒子靠在一起¹⁾。因为 δ 力的力程短, 只有两个粒子靠在一起相互作用才很强(与 Q 成正比), 因此这条能级能量特别低。也正因为力程短, 当两个粒子稍一分开, 相互作用便没有了, 所以其他能级都退化在原点。

同样, 我们可以把 $J \neq 0$ 的 $v = 2$ 的本征态 φ_{JM} 写成

$$\begin{aligned} \varphi_{JM}(12) &= \sqrt{\frac{1}{n_J}} \sum_{l_1 l_2} A_{l_1 l_2 J} \psi_{l_1 l_2 JM}(12) \chi_0(12) \\ &\xrightarrow{(l_0 \gg 1)} \sqrt{\frac{\pi n_0}{n_J}} (Y_{JM}(\theta_1 \varphi_1) + Y_{JM}(\theta_2 \varphi_2)) \varphi_0(12). \end{aligned} \quad (3.8)$$

由此可见, 结构为 (3.8) 式的 $J \neq 0$ 的两个粒子仍然靠在一起, 但它们具有一个总角动

1) 注意, 由于 pauli 原理, 这样的粒子只能处于单态。

量 J .

正因为这一套劈下来的能級具有这种特性,我們称之为“对”波函数,而称处在这种状态的两个粒子为配成一对¹⁾.

四、辛弱数 ν 的能譜

我們將証明, 当 $\Omega \gg L_1, L_2$, 和 J 时, $\nu = 4$ 低激发态的波函数趋近于 (用 $\doteq$ 表示)

$$\psi^{(\nu=4)} \doteq \psi_{L_1 L_2}^J = \sqrt{\frac{1}{n_{L_1 L_2}^J}} P(\varphi_{L_1}(12) \varphi_{L_2}(34))_J. \quad (4.1)$$

本征能量趋近于

$$E^{(\nu=4)} \doteq E_{L_1} + E_{L_2}, \quad (4.2)$$

其中 $\sqrt{\frac{1}{n_{L_1 L_2}^J}}$ 是归一化因子, P 仍然是反对称化算符. 为了了解問題的实质, 我們先考虑下面的一个问题: 即在 (12) 两个粒子配成对、(34) 两个粒子配成对、并耦合总角动量为 J 的态 $(\varphi_{L_1}(12) \varphi_{L_2}(34))_J$ 中, (13) 配成对的几率有多大?

$$\begin{aligned} & \langle \{ \varphi_{L'_1}(13) \varphi_{L'_2 L'_4}(24) \}_J | \{ \varphi_{L_1}(12) \varphi_{L_2}(34) \}_J \rangle = \\ & = \sum_{l_1 l_3} \frac{A_{l_1 l_2 L_1}}{\sqrt{n_{L_1}}} \frac{A_{l_3 l_4 L_2}}{\sqrt{n_{L_2}}} \frac{A_{l_1 l_3 L'_1}}{\sqrt{n_{L'_1}}} \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2 \cdot \hat{L}'_1 \cdot \hat{L}'_2 U \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L'_1 & L'_2 & J \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

当 $L_1 \sim L_2 \sim J \sim \Omega^{2/3}$, 由角动量耦合关系可知: $l_1 \approx l_2$, $l_3 \approx l_4$, $L'_1 \approx L'_2$. 所以当 L'_1, l_2, l_4 給定时, 在 (4.3) 中对 l_1, l_3 求和的項数当 l_0 很大时仍保持有限項. 利用附录 I 中 C 系数、 U 系数与 l_0 的关系, 可以立即得到: 当 $L'_1 \sim L'_2 \sim l_2 \sim l_4 \sim l_0$ 給定时, (4.3) 的数量級 $\lesssim \Omega^{-5/4}$, 几率是 $\Omega^{-5/2}$. 这是 (13) 配成角动量为 L'_1 的“对”, 而 2, 4 两个粒子处于 l_2, l_4 态的几率. 所以 (13) 配成“对”的总几率的数量級为

$$\lesssim \Omega^{-5/2} \cdot \Omega^{3/2} = \Omega^{-1}. \quad (4.4)^3$$

于是上面的問題得到了答案, 即当 (12) 成对、(34) 成对时, (13) 成对的几率是与 Ω 成反比的, 因此当 Ω 足够大时, 它是很小的. 根据前节已知, 不成对的粒子之間沒有相互作用, 因此, 可以猜想, 系統的低激发态就是粒子两两配成对的态, 即 $\psi_{L_1 L_2}^J$.

現在我們来証明 (4.1) 式及 (4.2) 式.

定义与“对”波函数正交的两个粒子波函数 (未归一化) 为

$$\psi_{l_1 l_2 L_1}^{\sim}(12) = \frac{1}{2} \psi_{l_1 l_2 L_1}(12) \chi_0(12) + \frac{1}{2} \psi_{l_2 l_1 L_1}(12) \chi_0(12) - \frac{A_{l_1 l_2 L_1}}{\sqrt{n_{L_1}}} \varphi_{L_1}(12). \quad (4.5)$$

由于 δ 力作用在不成对粒子上等于零, 所以 δ 力的低激发本征态一定可以用两对波函数 $\psi_{L_1 L_2}^J$ 及一对成对另一对不成对的波函数

1) 这里所定义的“对”是第二节中根据辛羣表示所定义的“对”的推广.

2) 符号“ $\sim$ ”表示相对 Ω 的数量級, $l_1 \approx l_2$ 表示 l_1 和 l_2 之差的数量級是 l_0 .

3) 符号 $\lesssim$ 代表数量級上小于或等于.

$$\psi_{L_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2}^J = \sqrt{\frac{1}{n_{L_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2}^J}} P\{\varphi_{L_1}(12)\psi_{\tilde{l}_3\tilde{l}_4 L_2}(34)\}_J \quad (4.6)$$

来展开. 其中 $\sqrt{\frac{1}{n_{L_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2}^J}}$ 是归一化因子, 即

$$\psi = \sum_{L_1 L_2} a_{L_1 L_2} \psi_{L_1 L_2}^J + \sum_{\substack{L_1 L_2 \\ \tilde{l}_3 \tilde{l}_4}} b_{L_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2} \psi_{L_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2}^J. \quad (4.7)$$

因此, 即要求解下列形式的本征解问题:

$$\begin{aligned} & \sum_{L_1' L_2'} (H_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1' L_2'}^J - E N_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1' L_2'}^J) a_{L_1' L_2'} + \\ & + \sum_{\substack{L_1' L_2' \\ \tilde{l}_3 \tilde{l}_4}} (H_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J - E N_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J) b_{L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'} = 0. \end{aligned} \quad (\text{对于任意 } \bar{L}_1, \bar{L}_2) \quad (4.8a)$$

及

$$\begin{aligned} & \sum_{L_1' L_2'} (H_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2; L_1' L_2'}^J - E N_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2; L_1' L_2'}^J) a_{L_1' L_2'} + \\ & + \sum_{\substack{L_1' L_2' \\ \tilde{l}_3 \tilde{l}_4}} (H_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J - E N_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J) b_{L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'} = \\ & = 0 \quad (\text{对于任意 } \bar{L}_1, \bar{L}_2, \tilde{l}_3, \tilde{l}_4), \end{aligned} \quad (4.8b)^{1)}$$

式中 E 是本征能量. 为了求 Q 很大的近似解, 这里先给出一些重要的矩阵元, 并在附录 II 中给出它们对于 Q 的数量级.

先把几个重要的矩阵元公式列在下面:

$$\begin{aligned} n_{L_1} &= \sum_{l_1 l_2} A_{l_1 l_2 L_1}^2, \\ n_{L_1 L_2}^J &= \langle P(\varphi_{L_1}(12)\varphi_{L_2}(34))_J | P(\varphi_{L_1}(12)\varphi_{L_2}(34))_J \rangle = \\ &= \frac{1}{n_{L_1} n_{L_2}} \left\{ 6n_{L_1} n_{L_2} (1 + (-1)^J \delta_{L_1 L_2}) - \right. \\ &\quad \left. - 12 \sum_{l_1 l_2 l_3 l_4} A_{l_1 l_2 L_1} A_{l_3 l_4 L_2} A_{l_1 l_3 L_1} A_{l_2 l_4 L_2} \hat{L}_1^2 \cdot \hat{L}_2^2 U \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L_1 & L_2 & J \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

1) 式中符号:

$$\begin{aligned} H_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1' L_2'}^J &= \langle \psi_{\bar{L}_1 \bar{L}_2}^J | H | \psi_{L_1' L_2'}^J \rangle; \\ H_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J &= \langle \psi_{\bar{L}_1 \bar{L}_2}^J | H | \psi_{L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J \rangle; \\ H_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J &= \langle \psi_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2}^J | H | \psi_{L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J \rangle; \\ N_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1' L_2'}^J &= \langle \psi_{\bar{L}_1 \bar{L}_2}^J | \psi_{L_1' L_2'}^J \rangle; \\ N_{\bar{L}_1 \bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J &= \langle \psi_{\bar{L}_1 \bar{L}_2}^J | \psi_{L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J \rangle; \\ N_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2; L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J &= \langle \psi_{\bar{L}_1(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)\bar{L}_2}^J | \psi_{L_1'(\tilde{l}_3\tilde{l}_4)L_2'}^J \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^J &\equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | \psi_{L'_1 L'_2}^J \rangle = \\
&= \sqrt{\frac{1}{n_{L_1 L_2}^J}} \sqrt{\frac{1}{n_{L'_1 L'_2}^J}} \langle P(\varphi_{L_1}(12) \varphi_{L_2}(34))_J | P(\varphi_{L'_1}(12) \varphi_{L'_2}(34))_J \rangle = \\
&= \sqrt{\frac{1}{n_{L_1 L_2}^J}} \sqrt{\frac{1}{n_{L'_1 L'_2}^J}} \sqrt{\frac{1}{n_{L_1} n_{L_2} n_{L'_1} n_{L'_2}}} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ 6n_{L_1} n_{L_2} (\delta_{L_1 L'_1} \delta_{L_2 L'_2} + (-1)^J \delta_{L_1 L'_2} \delta_{L_2 L'_1}) - \right. \\
&\quad \left. - 12 \sum_{l_1 l_2 l'_3 l'_4} A_{l_1 l_2 L_1} A_{l_3 l'_4 L_2} A_{l_1 l'_3 L'_1} A_{l_2 l'_4 L'_2} \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{L}'_1 \hat{L}'_2 U \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L'_1 & L'_2 & J \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^J &\equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | H | \psi_{L'_1 L'_2}^J \rangle = \sqrt{\frac{1}{n_{L_1 L_2}^J} \cdot \frac{1}{n_{L'_1 L'_2}^J}} \sqrt{\frac{1}{n_{L_1} n_{L_2} n_{L'_1} n_{L'_2}}} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ 6n_{L_1} n_{L_2} (E_{L_1} + E_{L_2}) (\delta_{L_1 L'_1} \delta_{L_2 L'_2} + (-1)^J \delta_{L_1 L'_2} \delta_{L_2 L'_1}) - \right. \\
&\quad - 12(E_{L_1} + E_{L_2}) \sum_{l_1 l_2 l'_3 l'_4} A_{l_1 l_2 L_1} A_{l_3 l'_4 L_2} A_{l_1 l'_3 L'_1} A_{l_2 l'_4 L'_2} \hat{L}_1 \hat{L}_2 \hat{L}'_1 \hat{L}'_2 U \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L'_1 & L'_2 & J \end{pmatrix} + \\
&\quad + 12(E_{L'_1} + E_{L'_2}) \sum_{l_1 > l_0} \sum_{l_2 l'_3 l'_4} A_{l_1 l'_2 L_1} A_{l_3 l'_4 L_2} A_{l_1 l'_3 L'_1} A_{l_2 l'_4 L'_2} \cdot \\
&\quad \cdot \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2 \cdot \hat{L}'_1 \cdot \hat{L}'_2 \cdot U \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L'_1 & L'_2 & J \end{pmatrix} + \\
&\quad + 12 \frac{1}{4\pi} \sum_{l_1 > l_0} \sum_{l_2 l'_3 l'_4} A_{l_1 l'_2 L_1} A_{l_3 l'_4 L_2} A_{l_1 l'_3 L'_1} A_{l_2 l'_4 L'_2} \cdot \\
&\quad \cdot \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2 \cdot \hat{L}'_1 \cdot \hat{L}'_2 \cdot \hat{L}_a^2 \cdot \hat{L}_b^2 \cdot U \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L_a & L_b & J \end{pmatrix} \left[A_{l'_1 l'_2 L'_1} A_{l'_3 l'_4 L'_2} U \begin{pmatrix} l'_1 & l_2 & L'_1 \\ l'_3 & l_4 & L'_2 \\ L_a & L_b & J \end{pmatrix} + \right. \\
&\quad \left. + (-1)^J A_{l'_1 l'_2 L'_2} A_{l'_3 l'_4 L'_1} U \begin{pmatrix} l'_1 & l_2 & L'_2 \\ l'_3 & l_4 & L'_1 \\ L_a & L_b & J \end{pmatrix} \right] \Big\} = \\
&= (E_{L_1} + E_{L_2}) N_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^J + \sqrt{\frac{1}{n_{L_1 L_2}^J} \cdot \frac{1}{n_{L'_1 L'_2}^J}} \sqrt{\frac{1}{n_{L_1} n_{L_2} n_{L'_1} n_{L'_2}}} \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ 12(E_{L'_1} + E_{L'_2}) \sum_{l_1 > l_0} \sum_{l_2 l_3 l_4} A_{l_1 l_2 L_1} A_{l_3 l_4 L_2} A_{l_1 l_3 L'_1} A_{l_2 l_4 L'_2} \cdot \right. \\
& \cdot \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2 \cdot \hat{L}'_1 \cdot \hat{L}'_2 \cdot U \left(\begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L'_1 & L'_2 & J \end{array} \right) + \\
& + 12 \frac{1}{4\pi} \sum_{l_1 > l_0} \sum_{\substack{l_2 l_3 l_4 \\ l'_1 l'_2 L_a L_b}} A_{l_1 l_2 L_1} A_{l_3 l_4 L_2} A_{l_1 l_3 L_a} A_{l'_1 l'_2 L_b} \cdot \\
& \cdot \hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2 \cdot \hat{L}'_1 \cdot \hat{L}'_2 \cdot \hat{L}_a^2 \cdot \hat{L}_b^2 U \left(\begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L_a & L_b & J \end{array} \right) \left[A_{l'_1 l'_2 L'_1} A_{l'_3 l'_4 L'_2} U \left(\begin{array}{ccc} l'_1 & l'_2 & L'_1 \\ l'_3 & l'_4 & L'_2 \\ L_a & L_b & J \end{array} \right) + \right. \\
& \left. + (-1)^J A_{l'_1 l'_2 L'_2} A_{l'_3 l'_4 L'_1} U \left(\begin{array}{ccc} l'_1 & l'_2 & L'_2 \\ l'_3 & l'_4 & L'_1 \\ L_a & L_b & J \end{array} \right) \right] \Bigg\}. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

当 $L_1 \sim L_2 \sim l_0^0$ 时, (4.8) 中的非对角元素至少要比对角元素小一个 $\Omega^{3/4}$ 的因子 (见附录 II). 因此, 我们用微扰理论来求解 (4.8). 设被微扰态为 $\phi_{L_1 L_2}^j (L_1 \sim L_2 \sim l_0^0)$, 则一级微扰波函数的系数为

$$\begin{aligned}
a_{L_1 L_2} &= 1, \\
a_{L'_1 L'_2} &= \frac{H_{L'_1 L'_2; L_1 L_2}^j - H_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^j N_{L'_1 L'_2; L_1 L_2}^j}{H_{L_1 L_2; L_1 L_2}^j - H_{L'_1 L'_2; L'_1 L'_2}^j}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$b_{L'_1 (l'_3 l'_4) L'_2} = \frac{H_{L'_1 (l'_3 l'_4) L'_2; L_1 L_2}^j - H_{L_1 L_2; L'_1 (l'_3 l'_4) L'_2}^j N_{L'_1 (l'_3 l'_4) L'_2; L_1 L_2}^j}{H_{L_1 L_2; L_1 L_2}^j - H_{L'_1 (l'_3 l'_4) L'_2; L'_1 (l'_3 l'_4) L'_2}^j}. \quad (4.13)$$

利用 (4.11) 可得 (4.12) 的分子的数量级为 (4.11) 式中第二项的数量级, 即

$$\begin{aligned}
& \lesssim \Omega^0 \quad (L'_1 \sim L'_2 \sim l_0), \\
& \lesssim \Omega^{-\frac{1}{2}} \quad (L'_1 \sim L'_2 \sim l_0^0).
\end{aligned}$$

(4.12) 分母的数量级, 根据附录 II 为

$$\begin{aligned}
& \sim \Omega^{\frac{1}{2}} \quad (L'_1 \sim L'_2 \sim l_0^0), \\
& \sim \Omega \quad (L'_1 \sim L'_2 \sim l_0).
\end{aligned}$$

同样, (4.13) 的分子的数量级是¹⁾

$$\lesssim \Omega^{-\frac{1}{2}},$$

(4.13) 的分母的数量级是

$$\sim \Omega^1.$$

由此可见, 一级微扰波函数的确很小.

1) 可以证明 (4.13) 式分子中数量级最高的项 $\Omega^{-1/4}$ 可以消去, 因此它的数量级是 $\lesssim \Omega^{-1/2}$.

二級微扰能量

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\substack{L'_1 L'_2 \\ (\neq L_1 L_2)}} H_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^J a_{L'_1 L'_2} + \sum_{\substack{L'_1 L'_2 \\ l_3 l_4}} H_{L_1 L_2; L'_1(l_3 l_4) L'_2}^J b_{L'_1(l_3 l_4) L'_2} \leq \\
 &\leq \sum_{\substack{L'_1 L'_2 \\ (\neq L_1 L_2)}} |H_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^J a_{L'_1 L'_2}| + \sum_{\substack{L'_1 L'_2 \\ l_3 l_4}} |H_{L_1 L_2; L'_1(l_3 l_4) L'_2}^J b_{L'_1(l_3 l_4) L'_2}| \lesssim \\
 &\lesssim \sum_{L'_1} Q^{\frac{1}{4}} Q^{-1} + \sum_{L'_1 l_3 l_4} Q^{-\frac{1}{4}} Q^{-\frac{6}{4}} \sim Q^{-\frac{1}{4}} + Q^{-\frac{1}{4}}. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

因此二級微扰能量是一个 $Q^{-\frac{1}{4}}$ 的小項, 我們知道, 当 $L_1 \sim L_2 \sim l_0^0$ 时, 能級間隔是与 $Q^{\frac{1}{2}}$ 成比例的, 所以 $\sim Q^{-\frac{1}{4}}$ 的項可以略去. 因此当 $Q \gg L_1 L_2 J$ 时,

$$\psi^{(v=4)} \doteq \psi_{L_1 L_2}^J,$$

$$E^{(v=4)} \doteq H_{L_1 L_2; L_1 L_2}^J \cong E_{L_1} + E_{L_2}.$$

附带提一下, $\psi_{L_1 L_2}^J (L_1 \sim L_2 \sim l_0^0)$ 近似是属于辛弱数 $v=4$ 的. 因为包含 $v=2$ 的几率是与 Q^{-2} 成比例的(見附录 III).

于是, 我們証明了(4.1)及(4.2)式. 在图 1 中給出了 Q 很大极限下的低激发能譜. 在原則上, 对于更大的辛弱数情况, 也可以作类似地討論, 但由于辛弱数大的能級比較高, 在此就不詳細討論了.

五、s. d. 壳

以上是 $Q \gg 1$ 的漸近情况, 很有意思的問題是当壳不大时情况如何? 为此我們严格計算了 s.d. 壳的情形(在此只計算了 $v=0, 2, 4$ 的本征解). $v=0, 2$ 的情况很簡單, 以下首先給出 $v=4$ 的严格解, 然后討論它的特点, 并将它与漸近解作比較.

(1) s.d. 壳的态数

我們知道, 空間对称性愈高, 相互作用愈大. 并且我們考虑的是低激发譜問題, 因此在下面只考虑属于对称羣分类的配分 (partition) 为 $[2, 2]$ 的情况. 配分为 $[2, 2]$ 的总自旋 $S=0$, 属于辛弱数 v 及总角动量 J 的态数列于下表中.

对称羣分类	辛 弱 数 v	总角动量 J	态 数
[2, 2]	0	0	1
		0	1
		1	0
		2	2
		3	0
		4	1
	4	0	1
		1	1
		2	3
		3	2
		4	3
		5	1
		6	1

(2) 2^+ 态和 4^+ 态的计算.

s.d. 壳中属于对称羣分类 $[2, 2] \nu = 4$ 的 2^+ 态有三个. 按附录 III, 其中有一个 ψ_1 可以用两对波函数展开, 其他两个可以选用组态各为 d^3s 和 d^4 属于 $[2, 2] \nu = 4$ 的态. 三个相互正交归一的波函数可选择为

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= 0.0632 \psi_{02}^2 + 0.643 \psi_{22}^2 + 0.540 \psi_{24}^2, \\ \psi_2 &= 1.29 \psi_1 + 1.63 \psi(d^3s [2, 2] \nu = 4 J = 2), \\ \psi_3 &= 2.31 \psi_1 + 1.83 \psi_2 - 1.73 \psi(d^4 [2, 2] \nu = 4 J = 2). \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

它们之间的相互作用矩阵元为

$$\left. \begin{aligned} \langle \psi_1 | H | \psi_1 \rangle &= -0.630, & \langle \psi_1 | H | \psi_2 \rangle &= -0.0220, \\ \langle \psi_2 | H | \psi_2 \rangle &= -0.0960, & \langle \psi_1 | H | \psi_3 \rangle &= 0.0196, \\ \langle \psi_3 | H | \psi_3 \rangle &= -0.295, & \langle \psi_2 | H | \psi_3 \rangle &= 0.0253. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

可以求出三个本征能量:

$$E = -0.631, \quad -0.296, \quad -0.0921. \quad (5.3)$$

相应于能量最低态 $E = -0.631$ 的本征函数是

$$\psi = 0.997 \psi_1 + 0.044 \psi_2 - 0.060 \psi_3. \quad (5.4)$$

从(5.4)式可见, 能量最低的那个态主要是对波函数 ψ_1 . 假如将 ψ_1 写成 ψ_{22}^2 及与它正交的 ψ' ($\langle \psi' | \psi_{22}^2 \rangle = 0$) 的迭加, 那么也可看到, ψ_1 中 80% 以上是 ψ_{22}^2 ,

$$\psi_1 = 0.90 \psi_{22}^2 + 0.44 \psi'. \quad (5.5)$$

在能量上也有类似的结果:

$$\left. \begin{aligned} \langle \psi_1 | H | \psi_1 \rangle &= -0.630, \\ \langle \psi_{22}^2 | H | \psi_{22}^2 \rangle &= -0.630, \end{aligned} \right\}$$

都与准确解的本征值 -0.631 几乎相等. 并且在 ψ_{22}^2 中约有 84% 是属于 $\nu = 4$ 的波函数.

对于 4^+ 态的计算也有类似的情况. 属于对称分类为 $[2, 2] \nu = 4$ 的 4^+ 共有三个, 其中有两个 ψ_1, ψ_2 可以写成对波函数. 另一个可选择组态为 d^4 , 属于 $[2, 2] \nu = 4$ 的 4^+ 态. 三个相互正交归一的波函数为

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= 0.393 \psi_{04}^4 + 1.074 \psi_{22}^4, \\ \psi_2 &= 1.55 \psi_1 + 1.85 \psi_a, \\ \psi_3 &= -12.1 \psi_1 - 10.9 \psi_a + 6.65 \psi_b; \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= 0.656 \psi_{04}^4 - 1.20 \psi_{24}^4, \\ \psi_b &= \psi(d^4 [2, 2] \nu = 4 J = 4). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

对应的本征能量是

$$E = -0.535, \quad -0.326, \quad -0.173. \quad (5.8)$$

相应于能量为 $E = -0.535$ 的本征解几乎完全是对波函数 ψ_1 ,

$$\psi = 1.0 \psi_1 + 0.01 \psi_2 + 0.02 \psi_3. \quad (5.9)$$

假如也将 ψ_1 写成 ψ_{22}^4 及与它正交的 ψ'' ($\langle \psi'' | \psi_{22}^4 \rangle = 0$) 的迭加, 那么也可看到 ψ_1 中 80% 以上是 ψ_{22}^4 .

$$\psi_1 = 0.92 \psi_{22}^1 + 0.37 \psi'' \quad (5.10)$$

能量也类似,

$$\langle \psi_1 | H | \psi_1 \rangle = -0.534,$$

$$\langle \psi_{22}^1 | H | \psi_{22}^1 \rangle = -0.540,$$

都几乎等于准确解 -0.535 . ψ_{22}^1 中約有 85% 是属于 $\nu = 4$ 的.

对于其他态的计算不再詳細給出了. 总的能譜結果都給出在图 3 中, 其与原子核等間隔能譜区的能譜特点是相似的.

由此亦可見, 虽然 s.d. 壳的 $Q = 12$ 并不大, 但其解已經很接近于 $Q \gg 1$ 的漸近情况. 这种接近几乎是出乎意料的.

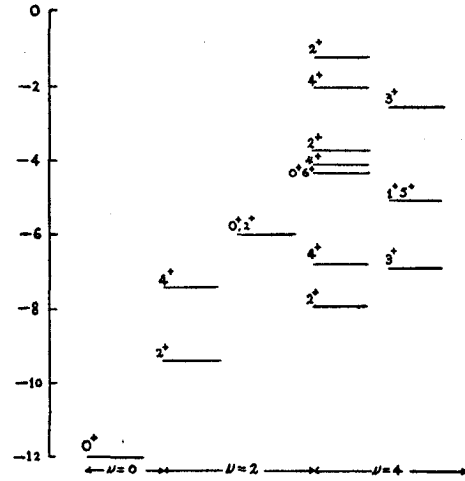


图 3

六、跃 迁

在这一节中, 我們来討論由算符

$$Q_{LM} = \sum_i Y_{LM}^*(i), \quad (6.1)$$

及

$$M_{LM}^{(1)} = (-1)^M \sqrt{\frac{L+1}{L}} \sum_{i\mu} C_{1\mu}^{L-M} Y_{L-1-M-\mu}(i) Y_{L-1-M-\mu}(i), \quad (6.2a)$$

$$M_{LM}^{(2)} = (-1)^M \sqrt{\frac{L+1}{L}} \sum_{i\mu} C_{1\mu}^{L-M} s_{\mu}(i) Y_{L-1-M-\mu}(i) \quad (6.2b)$$

(其中 $l_0 = l_z$, $l_{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}(l_x \pm il_y)$, $s_0 = s_z$, $s_{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}(s_x \pm is_y)$) 所引起的模型系統各态之間的跃迁几率. 为了叙述方便, 我們把由(6.1)引起的称为电多极 (EL) 跃迁, 由(6.2)引起的称为磁多极 (ML) 跃迁. 由于跃迁算符都是单粒子算符, 所以只有 $\Delta\nu = 0, \pm 2$ 才有跃迁.

(1) 电多极 (EL) 跃迁

首先討論辛弱数 $\nu = 2$ 与辛弱数 $\nu = 0$ 之間的 EL 跃迁. N 个粒子辛弱数为 ν 的模型系統波函数为 $\Psi_f^{(N)}(\nu)$.

$$\Psi_0^{(N)}(\nu = 0) = \sqrt{\frac{1}{M_{N0}}} P(\varphi_0(12)\varphi_0(34) \cdots \varphi_0(N-1, N)), \quad (6.3a)$$

$$\Psi_f^{(N)}(\nu = 2) = \sqrt{\frac{1}{M_{N2}}} P(\varphi_f(12)\varphi_0(34) \cdots \varphi_0(N-1, N)), \quad (6.3b)$$

其中 $\sqrt{\frac{1}{M_{N\nu}}}$ 是归一化系数, P 是反对称化算符. 于是, 跃迁矩陣元可以表成

$$\langle \Psi_f^{(N)}(\nu = 2) | \sum_i Y_{LM}^*(i) | \Psi_0^{(N)}(\nu = 0) \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{M_{N0}M_{N2}}} \frac{N}{2} \langle P(\varphi_j(12)\varphi_0(34) \cdots \varphi_0(N-1, N)) \times \\ \times |P(Y_{LM}^*(1) + Y_{LM}^*(2))| \varphi_0(12)\varphi_0(34) \cdots \varphi_0(N-1, N) \rangle. \quad (6.4)$$

由于

$$(Y_{LM}^*(1) + Y_{LM}^*(2))\varphi_0(12) = 2 \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \sqrt{\frac{1}{n_0}} (-1)^M \times \\ \times \sum_{M'} A_{LM'} \psi_{LM'-M}(12) \chi_0(12), \quad (6.5)$$

(M' 求和项)

因此

$$\langle \Psi_j^{(N)}(\nu=2) | \sum_i Y_{LM}^*(i) | \Psi_0^{(N)}(\nu=0) \rangle = \\ = \sqrt{\frac{1}{M_{N0}M_{N2}}} \cdot \frac{N}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n_j}{n_0}} (-1)^M M_{N2} \delta_{jL} = \\ = (-1)^M \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot N \cdot \sqrt{\frac{n_j M_{N2}}{n_0 M_{N0}}} \delta_{jL}. \quad (6.6)$$

由此,可以得到約化跃迁几率 $B_N \left(EL, \begin{smallmatrix} \nu=2 \rightarrow \nu=0 \\ J=L \rightarrow J=0 \end{smallmatrix} \right)$ 如下:

$$B_N \left(EL, \begin{smallmatrix} \nu=2 \rightarrow \nu=0 \\ J=L \rightarrow J=0 \end{smallmatrix} \right) = \\ = \frac{1}{2L+1} \sum_M \left| \langle \Psi_{j=L}^{(N)}(\nu=2) | \sum_i Y_{LM}^*(i) | \Psi_0^{(N)}(\nu=0) \rangle \right|^2 = \\ = \frac{1}{4\pi} N^2 \frac{n_L M_{N2}}{n_0 M_{N0}}. \quad (6.7)$$

将归一化因子

$$M_{N0} = \frac{Q!!N!!}{(Q-N)!!2^N} \cdot \frac{C_2^N \cdot C_2^{N-2} \cdots C_2^2}{n_0^{\frac{N}{2}}}, \quad (6.8a)$$

$$M_{N2} = \frac{(Q-4)!!(N-2)!!}{(Q-N-2)!!2^{N-2}} \cdot \frac{C_2^N \cdot C_2^{N-2} \cdots C_2^2}{n_0^{\frac{N-2}{2}}}. \quad (6.8b)$$

(其中 C_2^k 是組合数)代入(6.7)式中,則

$$B_N \left(EL, \begin{smallmatrix} \nu=2 \rightarrow \nu=0 \\ J=L \rightarrow J=0 \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{4\pi} 4N \cdot \frac{(Q-N)n_L}{Q(Q-2)}, \quad (6.9)$$

如果略去 $\sim \sqrt{\frac{1}{Q}}$ 的小項,則

$$B_N \left(EL, \begin{smallmatrix} \nu=2 \rightarrow \nu=0 \\ J=L \rightarrow J=0 \end{smallmatrix} \right) \simeq \frac{1}{4\pi} \cdot 2N \cdot \frac{Q-N}{Q}. \quad (6.10)^{1)}$$

1) 符号 $\simeq$ 代表略去 $\sqrt{\frac{1}{Q}}$ 的小項.

当我们定义单粒子約化跃迁几率 $B_{\#}(EL)$ 为

$$B_{\#}(EL) \equiv \sum_{l_1} \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ M}} \frac{1}{2l_2 + 1} |\langle \psi_{l_1 m_1} | Y_{LM}^* | \psi_{l_2 m_2} \rangle|^2 = \frac{1}{4\pi} (2L + 1) \quad (6.11)$$

时, 則

$$B_N \left(EL, \begin{matrix} \nu = 2 \rightarrow \nu = 0 \\ J = L \rightarrow J = 0 \end{matrix} \right) \simeq 2N \cdot \frac{Q - N}{Q} \cdot \frac{1}{2L + 1} B_{\#}(EL). \quad (6.12)$$

由此結果可以看出, 在 $N = \frac{Q}{2}$ 时, 約化跃迁几率比单粒子快 N 倍, 而当 $N \ll Q$ 时, 約化跃迁几率比单粒子快 $2N$ 倍。

对于这个結果, 可以給予一个物理的解释: $2N$ 这个因子可以看成 $4 \cdot \frac{N}{2}$, 为了方便, 我們用图来表述物理过程。在图 4(a) 中, 我們用 00 代表一对粒子耦合为 φ_0 , 00_L 代表一对粒子耦合为 φ_L , i, f 分别代表初态及末态。由于从初态的 00_L 可以跳到末态的任何一个 00 , 所以贡献一个 $\frac{N}{2}$ 的因子。另

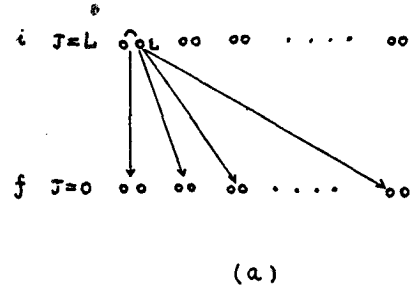


图 4

外对于每一个从 φ_L 到 φ_0 的跃迁, 由于 φ_0 及 φ_L 都近似地是一个 δ 函数[見(3.7)及(3.8)式], 因此算符 $Y_{LM}^*(1) + Y_{LM}^*(2)$ 在 φ_0 及 φ_L 的积分中, 等当于 $2Y_{LM}^*(1)$, 矩陣元經过平方以后, 就贡献了 4 倍的因子。在(6.12)式中, 还有一个 $\frac{1}{2L + 1}$ 的因子, 这是由于对初态求平均而来的。如果考虑从辛弱数为 $\nu = 0$ 到辛弱数 $\nu = 2$ 对态的几率, 那么

$$\begin{aligned} B_N \left(EL, \begin{matrix} \nu = 0 \rightarrow \nu = 2 \\ J = 0 \rightarrow J = L \end{matrix} \right) &= \\ &= \sum_M \left| \left\langle \Psi_L^{(N)}(\nu = 2) \left| \sum_i Y_{LM}^*(i) \right| \Psi_0^{(N)}(\nu = 0) \right\rangle \right|^2 = \\ &= \langle \Psi_0^{(N)}(\nu = 0) | Q_{LM}^2 | \Psi_0^{(N)}(\nu = 0) \rangle \simeq 2N \cdot \frac{Q - N}{Q} \cdot B_{\#}(EL). \end{aligned} \quad (6.13)$$

恰好就是求和极限 (sum rule limit)。因此, 由基态到 $J^\pi = L^+$ 的 EL 跃迁, 主要应该集中在最低的那个 L^+ 态上, 而到其他态的几率近似为零。这是对波函数結構表現在跃迁上的一个重要特点¹⁾。

用同样的办法, 可以計算 $\nu = 4$ 到 $\nu = 2$ 的約化跃迁几率。 $\Psi_f^{(N)}(\nu = 2)$ 已經在(6.3b)中給出了。关于 $\Psi_f^{(N)}(\nu = 4)$, 我們选用 $\nu = 4$ 的近似解, 即

$$\Psi_f^{(N)}(\nu = 4) = \sqrt{\frac{1}{M_{N4}}} P(\phi_{L_1 L_2}''(1234) \varphi_0(56) \cdots \varphi_0(N-1, N)), \quad (6.3c)$$

1) 严格說来, 电跃迁算符应该写成 $\sum_i \frac{1 + \tau_z(i)}{2} Y_{LM}^*(i)$, 其中 τ_z 是同位旋 z 分量算符。在此, 我們沒有討論 τ_z 的贡献, 原因是 τ_z 須只引起不同大壳态之間的跃迁, 而这些态是相当高的。因此文中的結論是只对較低的态而言的。

其中 $\sqrt{\frac{1}{M_{N4}}}$ 是归一化系数,

$$M_{N4} = \frac{(\Omega - 8)!!(N - 4)!!}{(\Omega - N - 4)!!2^{N-4}} \frac{C_2^N \cdot C_2^{N-2} \cdots C_2^6}{n_0^{\frac{N-4}{2}}}. \quad (6.8c)$$

图 4(b) 给出了 $\nu = 4$ 到 $\nu = 2$ 的 EL 跃迁过程. 由图可以看到: 当 L_1 (或 L_2)

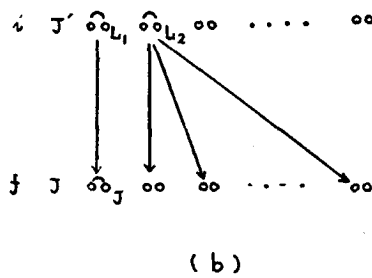


图 4

等于 J 时, 00_{L_2} 可以跳到任一个末态的 00 , 因此贡献一个 $\frac{N-2}{2}$ 的因子. (而当 $L_1 = L_2 = J$ 时, 则由于 00_{L_1} 也可以跳到末态的任一个 00 , 所以贡献的因子为 $2 \cdot \frac{N-2}{2}$.) 另外, 每一个 00_{L_2} 到 00 的跃迁仍然由于 φ_0 及 φ_{L_2} 近似是 δ 函数而贡献一个 4 倍的因子. 因此, 当 $L_1 = L_2$ 时, 比单粒子跃迁快 $4(N-2)$ 倍, 而 $L_1 \neq L_2$ 时, 只快 $2(N-2)$

倍. 用数学公式给出约化跃迁几率如下:

$$B_N \left(EL, \begin{matrix} \nu = 4 \rightarrow \nu = 2 \\ J' \rightarrow J \end{matrix} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{4(\Omega - N - 2)(N - 2) \cdot n_L}{(\Omega - 4)(\Omega - 6)} \cdot \frac{(N_{J'L;L_1L_2}^{J'})^2}{C_1^4} \cdot n_{J'L}. \quad (6.14)$$

当略去 $\sqrt{\frac{1}{\Omega}}$ 的小项, 则

$$B_N \left(BL', \begin{matrix} \nu = 4 \rightarrow \nu = 2 \\ J' \rightarrow J \end{matrix} \right) \simeq \frac{2(N-2)(\Omega-N)}{(2L+1)\Omega} B_*(EL) (\delta_{L_1J} \delta_{L_2L} + (-1)^J \delta_{JL_2} \delta_{LL_1}). \quad (6.15)$$

(6.15) 式的结果, 与从物理图象中所得的结果是一样的. 对于 $\nu = 2$ 到 $\nu = 4$ 的约化跃迁几率与 (6.15) 式完全相同.

下面讨论 $\nu = 2$ 对态到 $\nu = 2$ 对态的 EL 跃迁. 由于只有初态的 $00_{J'}$ 到末态的 00_J 才能发生跃迁[见图 4(c)], 因此不会产生与 N 有关的因子. 而由于 φ_J 及 $\varphi_{J'}$ 近似是 δ 函数, 所以与以上两种情况一样, 仍然贡献一个 4 倍的因子. 因此, $\nu = 2$ 对态到 $\nu = 2$ 对态的跃迁并不加强 N 倍, 即与单粒子跃迁同数量级. 如果略去 $\sqrt{\frac{1}{\Omega}}$ 的

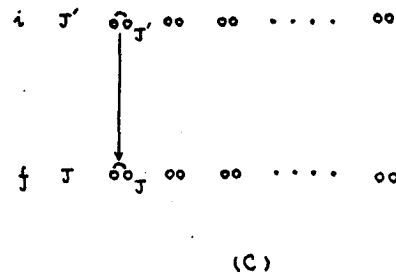


图 4

小项, 约化跃迁几率 $B_N \left(EL, \begin{matrix} \nu = 2 \rightarrow \nu = 2 \\ J' \rightarrow J \end{matrix} \right)$ 可以给出如下:

$$B_N \left(EL, \begin{matrix} \nu = 2 \rightarrow \nu = 2 \\ J' \rightarrow J \end{matrix} \right) \simeq 4 \left(1 - \frac{2N-4}{\Omega-4} \right)^2 \frac{n_J}{n_{J'}} (C_{L_0J_0}^{J_0})^2 B_*(EL). \quad (6.16)$$

同理, $\nu = 4$ 对态到 $\nu = 4$ 对态的跃迁,也是与单粒子跃迁同数量級的. 在此就不一一給出了.

(2) 磁多极 (ML) 跃迁

磁多极 (ML) 跃迁算符已在(6.2)中給出了. 首先,我們来討論由 $M_{LM}^{(2)}$ 的作用所引起的跃迁. 由于算符 $\sum_i s_\mu(i) Y_{L-1-M-\mu}(i)$ 是辛羣 Sp_Q 的无穷小算符,它一定保持辛弱数不变,因此在 $\Delta\nu = \pm 2$ 态之間, $M_{LM}^{(2)}$ 不贡献跃迁. 对于 $\Delta\nu = 0$ 态之間的跃迁,由于 φ_j 近似是 δ 函数,因此算符 $(s_\mu(1) Y_{L-1-M-\mu}(1) + s_\mu(2) Y_{L-1-M-\mu}(2))$ 与算符 $(s_\mu(1) + s_\mu(2)) Y_{L-1-M-\mu}(1)$ 等当,而当 $(s_\mu(1) + s_\mu(2))$ 作用于 $\chi_0(12)$ 时,一定得零,所以, $M_{LM}^{(2)}$ 对 $\Delta\nu = 0$ 对态之間的跃迁亦不作贡献.

其次,我們来討論 $M_{LM}^{(1)}$ 的贡献,由于

$$\sum_\mu C_{1\mu}^{L-M} Y_{L-1-M-\mu} \{l_\mu(1) Y_{L-1-M-\mu}(1) + l_\mu(2) Y_{L-1-M-\mu}(2)\} \varphi_0(12) = 0, \quad (6.17)$$

所以对于 $\Delta\nu = \pm 2$ 的情况, $M_{LM}^{(1)}$ 沒有贡献. 对于 $\Delta\nu = 0$ 的情形,如果取近似

$$\sum_{l_1 l_2} A_{l_1 l_2 J'} \psi_{l_1 l_2 J' M'}(12) \chi_0(12) \simeq \sqrt{4\pi n_0} Y_{J' M'}(1) \varphi_0(12), \quad (6.18)$$

那么可以用与計算(6.17)相类似的办法,可以証明: $M_{LM}^{(1)}$ 的贡献不为零,并且它是与单粒子跃迁同数量級的. 但是对 M1 跃迁却是一个例外,由于

$$M_{1\mu}^{(1)} = \sum_i l_\mu(i),$$

可以直接得出 $\Delta\nu = 0$ 的情况的 M1 跃迁仍为零.

由此,我們得到:在对态之間的 M1 跃迁总是被禁戒的. 而且 ML 跃迁也只能出現于 $\Delta\nu = 0$ 的态之間,并且与单粒子跃迁同数量級.

最后,我們將模型系統在能譜及跃迁上所表現出的一些主要特点与等間隔区的原子核的特点作一簡單的比較. 根据前面的討論,可以看到,在一些主要特点上,两者有很多共同之处. 在能譜上,两者都具有等間隔特点;在跃迁上, $B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$ 的加强以及

$$\frac{B(E2, 2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(E2; 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)} \approx 1$$

的特点也是一致的. 另外, $B(E2, 2_2^+ \rightarrow 0_1^+)$ 很小,以及 $B(M1, 2_2^+ \rightarrow 2_1^+) \approx 0$ 的特点也是共同的. 因此,可以說模型系統的一些主要結論,在定性上是与等間隔譜原子核的特点相符合的.

在主要特点相同的同时,也还存在着一些問題. 值得指出的是模型系統的低激发态数目比振动理論^[5]的多,例如在 $2E(2_1^+)$ 处,多了一个 4^+ . 在这里,特别感兴趣的是 $2E(2_1^+)$ 处的两个 4^+ 的問題;因为直到目前为止,实验上尚未觀測到两个 4^+ . 根据上面我們对跃迁的分析,可以看出,这两个 4^+ 虽然在能量上十分靠近,但在激发的特性上却很不相同. 为了討論方便,我們把辛弱数为 2 的 4^+ 叫 4_1^+ ,辛弱数为 4 的 4^+ 叫 $4_1'^+$. 并把它們的跃迁特点画在图 5 上. $4_1^+ \rightarrow 0_1^+$ 的 E4 跃迁是加强 N 倍的,而 $4_1'^+ \rightarrow 0_1^+$ 的 E4 是几乎禁戒的;因此,不論从核反应直接激发,或是来自 β 衰变,大部分的几率都集中于 4_1^+ ,而对 $4_1'^+$ 几乎是禁戒的. $4_1'^+ \rightarrow 2_1^+$ 的 E2 跃迁是加强 N 倍的,因此在双重庫仑激发

中,被激发的却是这条能级,所以从实验上来区分这两条 4^+ 能级看来是可能的。然而确定这两条 4^+ 是否同时存在,却是一个很感兴趣的课题,因为它将对模型系统理论是否与等间隔谱原子核的特点符合,提供一个论据。

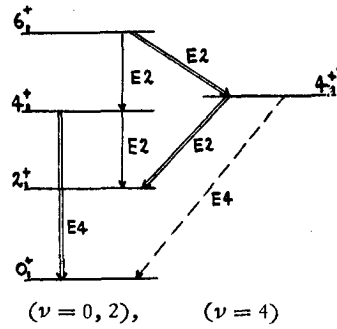


图 5

$\Rightarrow$ 代表跃迁加强 N 倍;
 $\rightarrow$ 代表跃迁与单粒子同数量级;
 $\dashrightarrow$ 代表跃迁几乎禁戒

在此我们谨向张文爱同志致以谢意,她在本工作中协助我们完成了部分数值计算工作。

附录 I. 一些 Clebsch-Gordon 系数和 U 系数渐近值相

对 $l_0 (\gg 1)$ 的数量级

利用 Stirling 公式可以证明:

当 $l_1 \sim l_2 \sim l_0^{1/2}$,

$$(C_{l_1 l_2 l_0}^{l_0})^2 \sim \begin{cases} l_0^{-\frac{1}{2}} & \text{当 } l_1 + l_2 - l \sim l_0^0, \\ l_0^{-\frac{3}{2}} & \text{当 } l_1 + l_2 - l \sim l_0^{\frac{1}{2}}, \\ l_0^{-1} & \text{其他.} \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

利用 U 系数的归一性,很容易得出:

$$U \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & L_1 \\ l_3 & l_4 & L_2 \\ L'_1 & L'_2 & J \end{pmatrix} \sim l_0^0, \quad \text{当所有角动量都} \sim l_0^0, \quad (\text{I.2})$$

$$\lesssim^2 l_0^{-1}, \quad \text{当 4 个角动量} \sim l_0^0, \quad (\text{I.3})$$

$$\lesssim l_0^{-\frac{3}{2}} \quad \text{当 6 个角动量} \sim l_0^0, \text{ 并且分布为 } \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}^3, \quad (\text{I.4})$$

1) $\sim$ 表示相对于 l_0 的数量级。

2) $\lesssim$ 代表数量级上小于或等于。

3) $\times \sim l_0^0, \cdot \sim l_0^0$ 。

$$\lesssim l_0^{-2}, \text{ 当 } 6 \text{ 个角动量 } \sim l_0^1, \text{ 并且分布为 } \begin{pmatrix} \cdot & \times & \times \\ \times & \cdot & \times \\ \times & \times & \cdot \end{pmatrix}, \quad (\text{I.5})$$

$$\lesssim l_0^{-2}, \text{ 当 } 7 \text{ 个角动量 } \sim l_0^1, \quad (\text{I.6})$$

$$\lesssim l_0^{-5/2}, \text{ 当 } 8 \text{ 个角动量 } \sim l_0^1. \quad (\text{I.7})$$

附录 II. 矩陣元 $N'_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}$, $H'_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}$ 等相对于 Ω 的数量級

首先指出,在計算矩陣元相对于 Ω 的数量級的时候,我們把求和中各項当作符号相同地相加起来,因此所得到的数量級是最高的,可能是高估了的. 估計的方法与第四节中一样,因此从略. 現將結果分別列在下面(限定 $L_1 \sim L_2 \sim l_0^0$).

$$(i) \quad n_L = \sum_{l_1 l_2} A_{l_1 l_2}^2 \sim \Omega^{\frac{1}{4}}, \quad \text{当 } 2l_0 - L \sim l_0^0;$$

$$\sim \Omega^{\frac{5}{8}}, \quad \text{当 } 2l_0 - L \sim l_0^{\frac{1}{2}};$$

$$\sim \Omega, \quad \text{其他.}$$

$$(ii) \quad n_{L_1 L_2}^J = \langle P(\varphi_{L_1}(12)\varphi_{L_2}(34))_J | P(\varphi_{L_1}(12)\varphi_{L_2}(34))_J \rangle \sim \Omega^0.$$

$$(iii) \quad N_{L_1 L_2; L_1 L_2}^J \equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | \psi_{L_1 L_2}^J \rangle = 1.$$

$$(iv) \quad N_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^J \equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | \psi_{L'_1 L'_2}^J \rangle \lesssim \Omega^{-\frac{3}{4}}.$$

可見 $\psi_{L_1 L_2}^J$ 当 Ω 很大时,趋近正交归一系.

$$(v) \quad H_{L_1 L_2; L_1 L_2}^J \equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | H | \psi_{L_1 L_2}^J \rangle \sim \begin{cases} \Omega^{\frac{1}{4}} & \text{当 } 2l_0 - L_1 \sim 2l_0 - L_2 \sim l_0^0, \\ \Omega^{\frac{5}{8}} & \text{当 } 2l_0 - L_1 \sim 2l_0 - L_2 \sim l_0^{\frac{1}{2}}, \\ \Omega & \text{其他.} \end{cases}$$

$$(vi) \quad H_{L_1 L_2; L'_1 L'_2}^J \equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | H | \psi_{L'_1 L'_2}^J \rangle \lesssim \Omega^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{非对角矩陣元})$$

$$(vii) \quad n_{L_1 (l_3 l_4) L_2}^J = \langle P(\varphi_{L_1}(12)\psi_{l_3 l_4 L_2}(34))_J | P(\varphi_{L_1}(12)\psi_{l_3 l_4 L_2}(34))_J \rangle \sim \Omega^0,$$

$$(viii) \quad N_{L_1 L_2; L'_1 (l_3 l_4) L'_2}^J \equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | \psi_{L'_1 (l_3 l_4) L'_2}^J \rangle \lesssim \Omega^{-\frac{5}{4}}.$$

$$(ix) \quad H_{L_1 L_2; L'_1 (l_3 l_4) L'_2}^J \equiv \langle \psi_{L_1 L_2}^J | H | \psi_{L'_1 (l_3 l_4) L'_2}^J \rangle \lesssim \Omega^{-\frac{3}{4}}.$$

附录 III. 滿足辛弱数 $\nu=4$ 的条件

对于对波函数 $\psi_{L_1 L_2}^J(L_1, L_2 \neq 0)$, ν 不是一个好量子数, 在这里我們把对波函数迭加起来, 使其滿足 ν 是好量子数.

$$\psi_j^{(\nu=4)} = \sum_{L_1 L_2} F_{L_1 L_2}^J \psi_{L_1 L_2}^J. \quad (\text{III.1})$$

式中对所有可能的 L_1, L_2 求和, 并且 $F_{L_1 L_2}^J = F_{L_2 L_1}^J$.

为了使它滿足 $\nu=4$, 則系数 $F_{L_1 L_2}^J$ 需要滿足下列条件:

$$\sum_i F_{ij}^J \frac{\hat{i} \cdot \hat{j}}{\hat{j}} C_{l_3 l_4}^{j_0} - \sum_{L_1 L_2} F_{L_1 L_2}^J \hat{i} \cdot \hat{j} C_{l_3 l_4}^{L_1 0} C_{l_3 l_4}^{L_2 0} (-1)^J W(L_1 l_3 L_2 l_4; l j) = 0$$

(任意 l_3, l_4), (III.2)

其中 l, l_3, l_4 都是限定在大壳内的轨道角动量. 显然 $F_{L_1 L_2}^I = \frac{\hat{L}_1 \cdot \hat{L}_2}{\hat{J}} C_{L_1 0 L_2 0}^{J 0}$ 是满足 (III.2) 的一组解, 不过这是一组虚解, 因为这时四个粒子空间部分全部对称, 波函数从而为零. 可以证明, 对不同的 $l_3, l_4, v = 4$ 所需满足的条件 (III.2) 是线性独立的 (证明略). 因此线性无关解 (III.1) 的数目是 (以 $J = 0, 1, 2, 3, 4$ 为例):

J	线性无关解的个数 (在此设 l_0 为偶)
0	$\frac{l_0}{2} - 1,$
1	$\frac{l_0}{2} - 1,$
2	$l_0 - 1,$
3	$l_0 - 1,$
4	$\frac{3}{2} l_0 - 1.$

参 考 文 献

- [1] Scharff, G.-Goldhaber and Wensler, J., *Phys. Rev.*, **98** (1955), 212.
McGowan, F. K., *Proceeding of the International conference on nuclear physics*, Paris (1958).
- [2] Racah, G., *Phys. Rev.*, **76** (1949), 1352.
- [3] French, J. B., *Nucl. Phys.*, **15** (1960), 393.
- [4] Belyaev, S. T., *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **31**, No. 11.
- [5] Bohr, A., *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **26**, No. 14.

О СВОЙСТВАХ НЕКОТОРОЙ ФЕРМИ-СИСТЕМЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ РАВНЫМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ УРОВНЯМИ

Юй Ю-вэн Чжан Чун-хуа Юй Минь

Резюме

Предложена некоторая модель для системы из N -фермионов, в которой каждая частица имеет три степени свободы (углы θ, φ и спин) и состояния отдельных частиц с орбитальными моментами $l_0, l_0 - 2, \dots, 0$ (если l_0 четный) или $l_0, l_0 - 2, \dots, 1$ (если l_0 нечетный) вырождены, причем между частицами существуют взаимодействие δ -типа. Получена структура низких уровней этой модельной системы, рассмотрены их особенность и физическое представление. Показано, что особенность данной модели качественно похожа на особенность ядра, обладающего равными промежуточными энергетическими уровнями.