

关于原子核的 g_R 因子*

楊 国 琛
(天津工学院)

提 要

本文按照 Skyrme 变分法的精神,求得了原子核 g_R 因子的普遍公式。根据这个公式,并应用 Nilsson 波函数对 Lu^{175} 附近的九个原子核进行了具体的数值计算。 g_R 的计算值与质子和中子的自旋轨道耦合参数 x 的差别有关。计算结果 g_R 比 Z/A 小,比推转模型考虑了对能后的计算值大,与实验值是接近的。

一、引 言

转动惯量 $\mathcal{S}$ 和 g_R 因子这两个物理量是转动区原子核的两个重要集体参数。这两个物理量都与原子核的内部运动的细节有关。对这两个量的研究可以帮助我们了解原子核的内部性质作进一步了解。理论上计算这两个量一般利用推转模型公式^[1]。用这些公式对一系列原子核进行具体的数值计算已有不少作者做过。Nilsson 和 Prior^[2]应用这个公式并考虑对力效应对一系列原子核作了细致的数值计算。计算得到的转动惯量,与实验值相差约 5—10%。计算得到的 g_R 因子,由于实验误差较大(10—30%,甚至更大),还不能对推转模型 g_R 因子公式的精确程度作出肯定的结论。

推转模型公式的近似性质和成立条件,已有不少作者作过讨论。Lipkin, de Shelt 和 Talmi^[3]讨论过在计算 $\mathcal{S}$ 时,用在外场推动下作受迫转动的原子核去代表作自由转动的原子核,即用推转模型代表真实原子核,其中包含近似的性质和成立条件。Ikeda 等^[4]讨论了在计算 $\mathcal{S}$ 时,使用模型波函数(形变自洽场波函)所包含的近似。但是对 g_R 因子的相应的讨论还很少见。因此推转模型 g_R 因子公式的近似性质和精确程度,仍有待进一步讨论。

有鉴于此,用不同的方法,寻找一个理论上计算 g_R 因子的新的公式是有意义的。

本文的工作就是提出一个计算 g_R 因子的新公式,同时我们还应用这个公式作了具体的数值计算,得出初步结论。

推导本文所建议的公式是应用了 Skyrme 的变分方法^[6]。Skyrme 在 1957 年提出了一个处理量子力学多体系统集体运动的方法,并应用这个方法研究了原子核的转动惯量和等离子体振荡等问题。这工作曾受到人们的重视^[7]。这个方法的特点是直接面对实验事实,引进与集体运动相关的参数(“集体坐标”)和与集体运动相应的“模型”哈密顿量(模拟哈密顿量)以变分方法作为理论处理的数学工具。这样就避免了诸如集体坐标应当是粒

* 1962年5月23日收到;1962年7月26日收到第一次修改稿;1962年12月18日收到第二次修改稿;1963年4月19日收到第三次修改稿;1963年7月26日收到第四次修改稿。

子坐标的怎样的函数以及由此引起的过多变数问题等一系列十分困难的理论问题,而直接面向我们感兴趣的理论课题(如求原子核的转动惯量),并使这些问题的研究成为切实可行。从 Skyrme 本人所作的一些应用来看,这个方法还是相当有效的。日本的 Ikeda 等^[4]曾用 Bohr-Mottelson 的正则变换方法^[8]从理论上研究计算转动惯量的各种公式。按照他们的意见, Skyrme 得到的转动惯量公式在使用模型波函数方面比 Inglis 的推转模型公式更为可靠。

为了应用这个方法求 g_R 因子,我们设想原子核处在外磁场中,结果原子核的真实哈密顿量出现了磁矩有关的项,在 Skyrme 的模拟哈密顿量中出现了 g_R 因子,于是可以应用这个方法求 g_R :

$$g_R = \frac{\langle \mu_x J_x \rangle}{\langle J_x^2 \rangle}.$$

其中 $\langle \cdots \rangle$ 是对波函数 $\psi(x)$ 求期望值, $\psi(x)$ 为变分

$$\delta \int \psi^*(x) \left[\sum_i \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{i < j} v_{ij} - \frac{1}{2\mathfrak{I}} J^2 - E_0 \right] \psi(x) dx = 0$$

的解。在具体计算中,我们把 $\psi(x)$ 理解为形变自洽场中(如 Nilsson 自洽场)单粒子波函数的 Slater 行列式。Ikeda 等^[4]对这个问题的讨论。

值得注意,我们得到的公式,只与波函数有关,而核子之间的相互作用以及模型哈密顿量只有通过波函数才跟 g_R 发生关系。Goshen 和 Lipkin^[5]曾指出转动惯量 $\mathfrak{I}$ 和 g_R 因子性质上的区别。 $\mathfrak{I}$ 是与原子核的动力学性质相联系的。 $\mathfrak{I}$ 的数值不仅与原子核的波函数有关,而且还和核子之间的相互作用以及所使用的模型哈密顿量的具体形式有关。 g_R 因子却与原子核内部电荷运动等运动学性质相联系。 g_R 因子的数值,应当只与原子核的波函数有关,核子之间相互作用以及哈密顿量的具体形式,只有通过波函数才对 g_R 产生影响。可见我们得到的公式符合 Goshen 和 Lipkin 关于 g_R 性质的要求。因此从这个公式出发进行计算,以研究原子核的波函数就更为有利。

本文第二节完成了 g_R 因子公式的推导。第三节应用 Nilsson 波函数^[9]进行了数值计算。在这里,我们对 Lu^{175} 和它附近的原子核作了详细的数值计算。选择 Lu^{175} 的理由,是因为这个原子核曾为曾谨言、张庆营和楊立銘^[10]用推转模型计算过,并且有一定的代表性。我们在这儿计算了九个原子核,其中四个是奇核,有实验测量值;五个是偶偶核,Nilsson 和 Prior^[2]用推转模型并考虑对力作过计算。我们的计算结果表明, g_R 的理论值确比 Z/A 小,但比推转模型并考虑对力后的计算值大。计算中发现,对质子和中子采用不同的 Nilsson 参数 η 值,可以使 g_R 因子计算值减小。这表明 Goshen 和 Lipkin^[5]所说的质子与中子自洽场的形变差异是引起 g_R 小于 Z/A 的原因,可能是正确的。但作者认为,这更可能是质子和中子的自旋轨道耦合强度不同而引起的。因为 Mottelsson 和 Nilsson^[11]分析了很多的原子核的实验数据后,曾指出质子和中子的 Nilsson 势阱的自旋轨道耦合参数 κ 应当不同。

计算结果与实验结果比较,理论值与实验值是接近的。但理论值稍大些。作者认为进一步改进 Nilsson 波函数和充分考虑科里奥利力(Coriolis force)影响以后,可以使理

論值与实验值更接近.

二、 g_R 因子的公式

g_R 因子出现在 A. Bohr 的综合模型中^[12]. 按综合模型, 转动区原子核的磁矩可以表为

$$\boldsymbol{\mu} = g_L \mathbf{j} + g_R \mathbf{R}, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{R}$ 为集体运动角动量; $\mathbf{j}$ 为内禀运动角动量. (1) 式可作为 g_R 因子的定义. 以下我们应用 Skyrme 的变分方法求 g_R 因子的表达式.

A 个核子组成的原子核, 哈密顿量为

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{i < j} v_{ij}.$$

当原子核处在均匀外磁场中时, 哈密顿量中将有磁矩有关的项. 设外磁场在 z 轴方向, 磁场强度为 $\mathcal{H}$, 则哈密顿量为

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i \mu_z^i \mathcal{H}, \quad (2)$$

其中 μ_z^i 为第 i 个核子的磁矩在 z 轴方向的投影.

讨论原子核的能级结构. 设原子核处在转动区, 则有转动能级存在. 按 A. Bohr 模型, 集体转动动能可表为

$$T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2\mathfrak{I}} \mathbf{R}^2,$$

如用原子核的总角动量 $\mathbf{I}$ 和内禀运动角动量 $\mathbf{j}$ 表示, 则有

$$\text{偶偶核: } T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2\mathfrak{I}} \mathbf{I}^2;$$

$$\text{奇偶核: } T_{\text{Rot}} = \frac{1}{2\mathfrak{I}} \mathbf{I}^2 - \frac{1}{2\mathfrak{I}} 2\mathbf{I} \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2\mathfrak{I}} \mathbf{j}^2.$$

上式中 $\frac{1}{2\mathfrak{I}} \mathbf{I} \cdot \mathbf{j}$ 这项代表科里奥利力的影响, 如果取绝热近似, 则该项可略去; 上式 $\frac{1}{2\mathfrak{I}} \mathbf{j}^2$ 项仅与内禀运动有关. 因而在绝热近似下, 转动区原子核的能级可表为

$$E_n = \epsilon + \frac{1}{2\mathfrak{I}} I(I+1),$$

其中 ϵ 只与内禀运动有关. 在 ϵ 一定下, E_n 形成转动能带. 当原子核处在上述的均匀外磁场中时, 原子核的能级将会分裂. 也可从综合模型来讨论转动区原子核的能级分裂. 按综合模型, $\boldsymbol{\mu}$ 可表为(1)式. 该式又可表为^[13]

$$\boldsymbol{\mu} = \{(g_l - g_R)\mathbf{j} + (g_s - g_l)\mathbf{S}\} + g_R \mathbf{I},$$

式中 $\mathbf{S}$ 为单核子自旋角动量. 因而在外磁场中, 哈密顿量的附加项又可表为

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}} = -\{(g_l - g_R)\mathbf{j} + (g_s - g_l)\mathbf{S}\} \cdot \vec{\mathcal{H}} - g_R I_z \mathcal{H}.$$

上式第一项只与内禀运动有关. 故此时原子核的能级可表为

$$E_n = E_0 + \frac{1}{2\mathfrak{I}} I(I+1) - g_R M \mathcal{H}, \quad (3)$$

式中 M 为 I_z 的本征值. 上式 E_0 只与内禀运动有关. 在 E_0 一定下, E_n 形成一能带.

根据由(3)表达的原子核的实际能级, 可以设 Skyrme 的模拟哈密顿量 h 为

$$h = \frac{1}{2\mathcal{I}} \mathbf{K}^2 - g_R K_z \mathcal{H}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{K}$ 为陀螺的角动量算符; $\mathbf{K}^2$ 的本征值为 $I(I+1)$; K_z 的本征值为 M . 设陀螺的空间位置由尤勒角 $\mathcal{Q}$ 标记, h 的本征函数 $\Phi_M^I(\mathcal{Q})$ 可用对称陀螺的本征函数 $D_{KM}^I(\mathcal{Q})$ 迭加来表示:

$$\Phi_M^I(\mathcal{Q}) = \sum_K C_K D_{KM}^I(\mathcal{Q}). \quad (5)$$

如果外磁场很弱, 则 $C_K \approx \delta_{KK_0}$. 我们设 h 的本征值记为 e_n .

(4)式中 g_R 是作为参数出现的¹⁾, 只有满足下述条件, 它才等于实际原子核的 g_R 因子:

$$E_n - e_n = \text{常量} = E_0.$$

Skyrme 方法的精神就是从这个要求出发, 由变分法求实际原子核的 g_R 因子.

设在外磁场中的实际原子核的波函数为 $\Psi_M^I(x)$, 它是(2)式的 H 的本征函数, 其中 x 表 A 个核子的坐标集合, 在实验坐标系写出. 我们可以考虑一个更大的物理系统, 其波函数

$$\phi(x, \mathcal{Q}) = \sum_{IM} A_I' \Psi_M^I(x) \Phi_M^I(\mathcal{Q}) = \sum_{I,M,K} A_{IK} \Psi_M^I(x) D_{KM}^I(\mathcal{Q}),$$

式中 $A_{IK} = A_I' C_K$ 是一些常数, 其目的是以后利用形变自洽场模型波函数代替 $\phi(x, \mathcal{Q})$ (见文献[4]的讨论), 如果我们要求

$$(H - h)\Psi(x, \mathcal{Q}) = E_0 \Psi(x, \mathcal{Q}), \quad (6)$$

则 h 中出现的 g_R 等于实际原子核的 g_R 因子. 但(6)式是本征值问题, $\Psi(x, \mathcal{Q})$ 是 $H - h$ 的本征函数, E_0 为本征值. Sskyrme 方法的精神就是用变分方法解决这个问题.

设 $\mathbf{J}$ 为实际原子核的总角动量算符, 直接作用于 $\phi(x, \mathcal{Q})$ 以算符 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{J}$ 可以证明

$$\mathbf{K} \phi(x, \mathcal{Q}) = \mathbf{J} \phi(x, \mathcal{Q}).$$

因此(6)式可表为

$$\left\{ H - \frac{1}{2\mathcal{I}} \mathbf{J}^2 + g_R J_z \mathcal{H} \right\} \phi(x, \mathcal{Q}) = E_0 \phi(x, \mathcal{Q}). \quad (7)$$

因为 $\mathbf{K}$ 是相应于 $\mathcal{Q}$ 的角动量算符, $\mathbf{J}$ 是相应于 x 的角动量算符, 从(7)式可看到变量 $\mathcal{Q}$ 在这儿只是作为参量出现. 我们可以固定 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{Q}_0$, 求(7)式的解 $\phi(x, \mathcal{Q}_0)$, 而一般解 $\phi(x, \mathcal{Q})$ 可以经过转动得到. $\phi(x, \mathcal{Q}_0)$ 满足方程

$$\left\{ H - \frac{1}{2\mathcal{I}} J^2 + g_R J_z \mathcal{H} \right\} \phi(x, \mathcal{Q}_0) = E_0 \phi(x, \mathcal{Q}_0).$$

我们可以对 x 和 $\mathcal{Q}$ 同时作转动. 转动后 $\mathcal{Q}_0$ 变为 0, x 变为 x' , x' 即所谓本体坐标. 为简便起见, 可规定 $\mathcal{Q}_0$ 为这样的角度, 使 x 变为 x' 后, x' 轴与 z 轴重合, J_z 变为 $J_{x'}$. $J_{x'}$ 为角动量在本体坐标系的 x' 轴上的投影. 于是(7)变为

1) 如果避免混淆, g_R 应当记为 C , 以别于真实原子核的 g_R 因子, 只有最后由变分定出, C 才为 g_R .

$$\left(H - \frac{1}{2\mathfrak{S}} J^2 + g_R J_x \mathcal{H} \right) \psi(x', 0) = E_0 \psi(x', 0). \quad (8)$$

以下為簡單起見, 把 $\psi(x', 0)$ 簡略為 $\psi(x')$, 并把 x' 記為 x .

在(8)式中波函數 $\psi(x)$ 、 g_R 因子和能級改正 E_0 都是未知的。可以由下述變分條件求之:

$$\delta \int \psi^*(x) \left[H - \frac{1}{2\mathfrak{S}} J^2 + g_R J_x \mathcal{H} - E_0 \right]^2 \psi(x) dx = 0. \quad (9)$$

對波函數求變分, 就回到方程(8); 對 g_R 及對 E_0 求變分, 解得

$$g_R = \frac{\left\langle \left(H - \frac{1}{2\mathfrak{S}} J^2 \right) \right\rangle \langle J_x \rangle - \left\langle \left(H - \frac{1}{2\mathfrak{S}} J^2 \right) J_x \right\rangle}{\langle J_x^2 \rangle - \langle J_x \rangle^2}, \quad (10)$$

式中 $\langle \cdots \rangle$ 表示對 $\psi(x)$ 求期望值。

為了從(10)式求 g_R , 我們作進一步簡化。

首先, 可以根據 Fock-Hartree 方法從哈密頓量

$$H_0 = \sum_i \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{i < j} v_{ij} - \frac{1}{2\mathfrak{S}} J^2 \quad (11)$$

引入自洽場, 得單粒子哈密頓量 h_0 及相應的單粒子波函數 ϕ_n 。 h_0 可表為

$$h_0 = t + u - \frac{1}{2\mathfrak{S}} g, \quad (12)$$

其中 t 是單粒子動能; u 是從 $V = \sum_{i < j} v_{ij}$ 得到的 Fock-Hartree 勢; g 是從 J^2 得到的單粒子算符。令

$$H'_0 = \sum_i h_0(i), \quad (13)$$

其中 $h_0(i)$ 表示第 i 粒子的單粒子哈密頓量 h_0 。於是原子核的哈密頓量可以表為

$$H = \sum_i \frac{1}{2m} p_i^2 + \sum_{i < j} v_{ij} - \sum_i \mu_x^i \mathcal{H} = H'_0 + (V - U) + \frac{1}{2\mathfrak{S}} G - \mu_x \mathcal{H}, \quad (14)$$

其中

$$G = \sum_i g(i),$$

$$\mu_x = \sum_i \mu_x^i = \sum_i (g_S S_{ix} + g_I I_{ix}),$$

$$U = \sum_i u(i).$$

其次, 按 Skyrme 方法, $\psi(x)$ 可從變分

$$\delta \int \psi^*(x) \left[H - \frac{1}{2\mathfrak{S}} J^2 + g_R J_x \mathcal{H} - E_0 \right] \psi(x) dx = 0 \quad (15)$$

求得。考慮了(11)式後, (15)式可寫成

$$\delta \int \psi^*(x) [H_0 - E_0] \psi(x) dx + \delta \int \psi^*(x) [g_R J_x \mathcal{H} - \mu_x \mathcal{H}] \psi(x) dx = 0.$$

上式的兩項變分中, 如果我們要求模型哈密頓量所對應之原子核能級分裂與實際的能級

分裂相符,同时考虑到 $\mathcal{H}$ 可以很小,则可以假定第二项为 0, 因此得

$$\delta \int \psi^*(x) [H_0 - E_0] \psi(x) dx = 0. \quad (16)$$

(16) 式求变分的式子, 即为 Skyrme 在他的文章^[6]中求波函数的式子. 因此从 (16) 式解得的波函数可以表为由单粒子波函数 ϕ_n 构成的 Slater 行列式, 而 ϕ_n 可用轴对称形变自洽场的波函数代表.

引入这些近似后, (10) 式就可以进一步简化. (10) 式的分子可表为

$$\begin{aligned} & \left\langle H - \frac{1}{2\mathfrak{I}} J^2 \right\rangle \langle J_x \rangle - \left\langle \left(H - \frac{1}{2\mathfrak{I}} J^2 \right) J_x \right\rangle = \\ & = \{ \langle H'_0 \rangle \langle J_x \rangle - \langle H'_0 J_x \rangle \} + \{ \langle V - U \rangle \langle J_x \rangle - \langle (V - U) J_x \rangle \} + \\ & + \frac{1}{2\mathfrak{I}} \{ \langle G - J^2 \rangle \langle J_x \rangle - \langle (G - J^2) J_x \rangle \} + \mathcal{H} \{ \langle \mu_x J_x \rangle - \langle \mu_x \rangle \langle J_x \rangle \}. \end{aligned}$$

在上式中, 由于 $\psi(x)$ 所对应的态, 角动量在对称轴上投影是运动常数, 因此第一项为 0. 又 J_x 只能引起单粒子激发, 而按 G 和 U 的定义, 第二、第三项为 0. 于是剩下最后一项. 但 $\langle J_x \rangle$ 为 0, 因此分子简化为 $\mathcal{H} \langle \mu_x J_x \rangle$. 至于分母, 由 $\langle J_x \rangle$ 为 0, 简化为 $\langle J_x^2 \rangle$. 因而 (10) 简化为

$$g_R = \frac{\langle \mu_x J_x \rangle}{\langle J_x^2 \rangle}. \quad (17)$$

(17) 式已大大简化了, 就可以作为我们计算的出发点.

(17) 式与推转模型的结果是类似的. 我们知道: 对转动惯量 $\mathfrak{I}$ 来说, Skyrme 曾经指出, 当能量分母 $\Delta E = E_i - E_0$ 是常量时, 推转模型结果与 Skyrme 变分结果是一致的. 如果我们把推转模型 $\mathfrak{I}$ 代入该模型的 g_R 因子公式中去, 则立刻会发现, 在 ΔE 为常量的同样条件下, 推转模型的 g_R 因子公式就化为 (17) 式.

(17) 式表明, g_R 因子的确仅决定于所使用的模型波函数, 而与具体的模型哈密顿量以及核子之间相互作用的具体形式不是直接相关的.

最后我们简单地讨论一下得到 (17) 式以及下节应用 Nilsson 波函数进行计算时所包含的近似, 这种近似主要有三:

1. 绝热近似 在上述推导中, 我们假设能级结构为 (3) 式所示, 即集体运动和内幕运动能严格分离.

2. Skyrme 变分近似 这个变分的特点是: 求 g_R 和 E_0 时, 用变分

$$\delta \int \psi^*(x) \left[H - \frac{1}{2\mathfrak{I}} J^2 + g_R J_x \mathcal{H} - E_0 \right]^2 \psi(x) dx = 0;$$

但求波函数 $\psi(x)$ 时, 却用变分

$$\delta \int \psi^*(x) \left[H - \frac{1}{2\mathfrak{I}} J^2 + g_R J_x \mathcal{H} - E_0 \right] \psi(x) dx = 0.$$

这两个变分式子是不同的. 这样做的理由已见 Skyrme 的工作^[6]. 在本文中, 后一变分又简化为

$$\delta \int \psi^*(x) [H_0 - E_0] \psi(x) dx. \quad (16)$$

其中引入的近似, 以上已作说明.

3. 形变自洽場近似 求解(16)式,我們又采用了自洽場近似,認為 $\psi(x)$ 可表为形变自洽場中单粒子波函数 ϕ_n 的 Slater 行列式。这是一个重要的近似,相当于略去了剩余作用对波函数的影响。此外,我們在下一节具体計算中, ϕ_n 又采用与大量实验事实符合的 Nilsson 波函数。用模型波函数(例 Nilsson 波函数)以代替(16)式解出的波函数,其中包含了新的近似。类似这个问题, Ikeda 等已作了詳細討論,讀者可参考該文^[4]。

以上这些近似引起的誤差是不容易估計的,只有通过实际計算才能显出这个公式与实验的符合程度。

三、計算及結果

現在我們按照(17)式应用 Nilsson 波函数作具体的数值計算。Nilsson 波函数已經被証明为好的波函数,通过計算可以檢驗(17)式的正确性,同时还可以进一步考察这个波函数。

我們可以把(17)式写成

$$g_R = \frac{\langle \mu_x^p J_x^p \rangle + \langle \mu_x^n J_x^n \rangle}{\langle (J_x^p)^2 \rangle + \langle (J_x^n)^2 \rangle}, \quad (18)$$

其中

$$\mu_x^p = \sum_{i=1}^Z \mu_{xi}^p = \sum_{i=1}^Z (l_{xi}^p + g_S^p S_{xi}^p),$$

$$\mu_x^n = \sum_{i=1}^N \mu_{xi}^n = \sum_{i=1}^N g_S^n S_{xi}^n,$$

$$J_x^p = \sum_{i=1}^Z j_{xi}^p,$$

$$J_x^n = \sum_{i=1}^N j_{xi}^n.$$

g_S^p 与 g_S^n 分别为 5.585 及 -3.826。

把 Nilsson 波函数应用于(18)式后将发现,在求期望值 $\langle \cdots \rangle$ 时,由宇称关系填满 N 为确定值的壳层将不作貢獻。設 $|a\rangle$ 表示非滿壳层的已經被核子填充的态的 Nilsson 单粒子波函数, $|b\rangle$ 表示未被填充的态的波函数,則对于 N 为确定值的壳层說,对質子和中子均有

$$\langle \mu_x J_x \rangle = \sum_{a,b} \langle a | \mu_x | b \rangle \langle b | j_x | a \rangle \quad (19a)$$

$$= \sum_a \langle a | \mu_x j_x | a \rangle - \sum_{a'a} \langle a | \mu_x | a' \rangle \langle a' | j_x | a \rangle \quad (19b)$$

$$= \sum_b \langle b | \mu_x j_x | b \rangle - \sum_{b'b} \langle b | \mu_x | b' \rangle \langle b' | j_x | b \rangle. \quad (19c)$$

同样,

$$\langle J_x^2 \rangle = \sum_{a,b} |\langle a | j_x | b \rangle|^2 \quad (20a)$$

$$= \sum_a \langle a | j_x^2 | a \rangle - \sum_{a'a} |\langle a | j_x | a' \rangle|^2 \quad (20b)$$

$$= \sum_b \langle b | j_x^2 | b \rangle - \sum_{b'b} |\langle b | j_x | b' \rangle|^2. \quad (20c)$$

在計算时,对 N 为确定值的壳层,如果仅有少数态被占据,則可用 (19b), (20b); 如果大多数态被占据,則可用 (19c), (20c); 如果近半数态被占据,則可用 (19a), (20a).

进行具体計算时可把 Nilsson 波函数展开

$$|a_Q\rangle = \sum_{l\Lambda} a_{l\Lambda} |Nl\Lambda\Sigma\rangle \quad (\Lambda + \Sigma = Q).$$

其中系数可从 Nilsson 文章^[9]中查到. 計算时一些具体公式如下:

$$\langle a'_{Q\pm 1} | l_x | a_Q \rangle = \frac{1}{2} \sum_l \left\{ \sum_{\Lambda} a_{l\Lambda} a'_{l\Lambda\pm 1} \sqrt{(l\mp\Lambda)(l\pm\Lambda+1)} \right\} = -\langle a'_{-(Q\pm 1)} | l_x | a_{-Q} \rangle;$$

$$\langle a'_{Q\pm 1} | s_x | a_Q \rangle = \frac{1}{2} \sum_l a_{lQ\pm\frac{1}{2}} a'_{lQ\pm\frac{1}{2}} = -\langle a'_{-(Q\pm 1)} | s_x | a_{-Q} \rangle.$$

上两式并不包括 $Q = \pm \frac{1}{2}$ 之間的矩陣元:

$$\langle a'_{Q=\frac{1}{2}} | l_x | a_{Q=-\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_l (a_{l0} a'_{l1} + a'_{l0} a_{l1}) \sqrt{l(l+1)} = \langle a'_{Q=-\frac{1}{2}} | l_x | a_{Q=\frac{1}{2}} \rangle;$$

$$\langle a'_{Q=\frac{1}{2}} | s_x | a_{Q=-\frac{1}{2}} \rangle = \frac{1}{2} \sum_l a_{l0} a'_{l0} = \langle a'_{Q=-\frac{1}{2}} | s_x | a_{Q=\frac{1}{2}} \rangle.$$

又

$$\langle a | l_x^2 | a \rangle = \sum_{l,\Lambda} |a_{l\Lambda}|^2 \frac{1}{2} [l(l+1) - \Lambda^2],$$

$$\langle a | s_x^2 | a \rangle = \frac{1}{4},$$

$$\langle a | s_x l_x | a \rangle = \frac{1}{2} \sum_l a_{l\Lambda} a_{l\Lambda+1} \sqrt{(l-\Lambda)(l+\Lambda+1)}.$$

应用以上式子,我們对 Lu^{175} 进行具体的数值計算. Lu^{175} 的形变 $\delta = 0.28$. 按 Nilsson^[9]对質子和中子均取 $\eta = 6(x = 0.05)$. 采用 Mottelson 和 Nilsson^[11]的 Nilsson 能級图来确定質子和中子的組态. 这个 Nilsson 組态填充图在曾謹言等的文章^[10]中可查到. 最近 Nilsson 和 Prior^[3], Griffin 和 Rich^[14], Bés 和 Szymaski^[15]曾对 Nilsson 能級作过不同的校正,但对本文結果无影响. 按照 Lu^{175} 的情况,我們对 $N = 4$ 的質子組态和 $N = 5$ 的中子組态,应用 (19c), (20c); 对 $N = 5$ 的質子組态和 $N = 6$ 的中子組态,应用 (19b), (20b). 計算結果得

$$g_R = 0.375.$$

但是 Mottelson 和 Nilsson^[11]指出,对于 $50 \leq Z \leq 82$ 的原子核來說,由于中子和質子的自旋軌道耦合強度的差异,参数 x 应当不同,因而質子的 $\eta \approx 16\delta$, 中子的 $\eta \approx 20\delta$. 考虑了这一点,我們对質子采用 $\eta = 4$, 对中子采用 $\eta = 6$ (其他参量不变), 对 Lu^{175} 又計算一次,結果

$$g_R = 0.351.$$

由此可見, g_R 的数值随中子和質子的 η 值的差別而变。这表明 Goshen 和 Lipkin^[5] 所說的質子和中子的形变的差別是引起 g_R 小于 Z/A 的原因可能是对的。但同样可能是質子和中子的自旋軌道耦合強度不同的結果。

g_R 的数值对原子核的形变 δ 的改变是不敏感的。因为形变的变化, 以同样的趨勢影响 g_R 公式的分子和分母。为了考察形变 δ 的变化对 g_R 計算值的影响, 我們采用 Nilsson 文章^[9]中附录 B 所述的漸近波函数 $|n_z n_\perp \Lambda \Sigma\rangle$ (即 $|N n_\perp \Lambda \Sigma\rangle$, $N = n_z + n_\perp$) 对 Lu^{175} 进行了計算。計算时所用公式可在 Rassey 的文章^[20]中查到; 結果

$$g_R = 0.337.$$

采用漸近波函数 $|N n_\perp \Lambda \Sigma\rangle$ 即相当于假定形变 δ 为无限大。由計算結果可以看到, 形变作了这样大的改变后, g_R 的改变并不显著。

我們还应用 Nilsson 波函数对 Lu^{175} 附近的八个原子核进行了計算。这些核均在 Lu^{175} 附近, 因此增加的計算工作量不大。在計算中考虑了形变 δ 的改变对 g_R 計算值影响不大, 因此对質子均取 $\eta = 4$, 对中子均取 $\eta = 6$ 。計算結果列在表中。

g_R 因子的数值

原 子 核	自 旋	形 变 δ	Z/A	g_R 計算值	g_R 实验值	g_R N. P. 值
^{172}Yb	0	0.30	0.407	0.350		0.322
^{178}Yb	$\frac{5}{2}$	0.29	0.405	0.356	$0.20 \pm 0.09^{1)}$ $0.35 \pm 0.04^{2)}$	
^{174}Yb	0	0.30	0.402	0.362		0.303
^{175}Lu	$\frac{7}{2}$	0.28	0.406	0.351	$0.30 \pm 0.06^{1)}$ $0.50 \pm 0.20^{2)}$	
^{176}Hf	0	0.24	0.409	0.338		0.301
^{177}Hf	$\frac{7}{2}$	0.26	0.407	0.343	$0.215 \pm 0.014^{1)}$ $0.24 \pm 0.16^{2)}$	
^{178}Hf	0	0.26	0.404	0.347		0.285
^{179}Hf	$\frac{9}{2}$	0.27	0.402	0.359	$0.203 \pm 0.034^{1)}$	
^{180}Hf	0	0.25	0.400	0.372		0.292

表中第五列 g_R 計算值是本文計算結果, 計算时对質子取 $\eta = 4$, 对中子取 $\eta = 6$ 。表中第七列 g_R N. P. 值是 Nilsson 和 Prior^[6] 根据推轉模型考虑了对能效应后的計算值 (Case B)。 g_R 的实验值:

- 1) Bernstein, E. M. and De Boer, J., *Nuclear Phys.*, **18** (1960), 40.
- 2) Береович, Э. Е., Бониц, М. П. и Никитин, М. К., *ЖЭТФ*, **40** (1961), 749.
- 3) Manning, G. and Rogers, J. D., *Nuclear Phys.*, **19** (1960), 675; **15** (1960), 166.

我們还对 $150 \leq A \leq 188$ 的原子核应用漸近波函数 $|N n_\perp \Lambda \Sigma\rangle$ 計算了 g_R , 发现 g_R 均在 0.3—0.4 附近。把用漸近波函数計算結果与已經得到的用 Nilsson 波函数計算結果比較, 两者相差約 10%—20%。这說明对一般原子核, 用本文公式計算, g_R 在 0.3—0.4 附近。

由表可以看到, 按本文方法計算的 g_R 因子数值均在 0.35 左右。这个值比 Z/A (約 0.40) 要小, 但比推轉模型考虑了对能效应后的計算值要大。

計算值与实验值比較, 可以看到, 理論結果与实验結果是接近的, 但稍大些。特别是

并未显示如同 Bernstein 和 de Boer^[16]所指出的奇质子核的 g_R 比奇中子核的 g_R 大 0.1 左右的效应。但是必须注意到关于 g_R 因子的实验值还存在着争论。Hauser^[17]曾对 Bernstein 和 de Boer 的 g_R 实验值的计算提出怀疑。Берлович, Бониц 和 Никитин^[18]指出, 根据库仑激发结果求 g_R 因子实验值有问题。他们并根据偶极跃迁重新测定了 Tb^{159} 和 Yb^{173} 的 g_R 实验值分别为 $g_R = 0.44 \pm 0.10$ 和 $g_R = 0.35 \pm 0.04$; 但是 Bernstein 和 de Boer 的实验值却分别为 $g_R = 0.24 \pm 0.09$ 和 $g_R = 0.20 \pm 0.09$, 可见两者差别较大。

作者认为, 从以下两方面考虑可以使得理论值与实验值符合得更好: 第一是进一步改进 Nilsson 波函数。大家知道, 应用 Nilsson 波函数计算磁矩只是粗略地与实验符合, 这说明这个波函数有待于进一步改进。可以相信: 考虑了核子剩余相互作用对波函数的影响(如考虑组态混合)以及进一步调节 Nilsson 势阱的参量(上述对质子和中子取不同的 x 值即一例), 用上述公式计算 g_R 可以改善。第二是充分考虑科赖奥莱力的效应。显而易见, 上述理论是建立在绝热近似基础上的, 因此把科赖奥莱力的影响忽略了。Nilsson 和 Prior^[7]曾经指出科赖奥莱力的影响对奇偶核特别重要。Гринь 和 Павличенков^[19]在他们的计算 g_R 中把这个因素也考虑了, 理论结果与实验有较好的符合。可以相信: 在本文理论基础上, 考虑科赖奥莱力的影响, 同样会使结果改善。对于奇偶核, 改善将更为显著。

作者对刘汉昭先生的讨论表示感谢。在本文写作中, 得到了杨立铭先生和曾谨言同志的帮助, 也在这里表示谢意。

参 考 文 献

- [1] Inglis, D. R., *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1059; **97** (1955), 701.
- [2] Nilsson, S. G. and Prior, O., *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **32** (1960), No. 16.
- [3] Lipkin, H. J., De Shalrt, A. and Talmi, T., *Phys. Rev.*, **103** (1956), 1773.
- [4] Ikeda, K., Kobayasi, M., Marumori, T., Nagata, S. and Shiozaki, T., *Progr. Theoret. Phys.*, **20** (1958), 960.
- [5] Goshen, S. and Lipkin, H. J., *Comptes Rendus du Congres International de Physique Nucleaire* (1958), 743.
- [6] Skyrme, T. H. R., *Proc. Phys. Soc.*, **A 70** (1957), 433; Skyrme, T. H. R., *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A 239** (1957), 399.
- [7] Ter Haar, D., *Introduction to the Physics of Many-body System*, Interscience Publishers, Ltd. London, 1958.
- [8] Bohr, A., *Rotational States of Atomic Nuclei*, Kobenhavn, 1954.
- [9] Nilsson, S. G., *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **29** (1955), No. 16.
- [10] 曾谨言、张庆营、杨立铭, *物理学报*, **15** (1959), 565.
- [11] Mottelsson, B. R. and Nilsson, S. G., *Phys. Rev.*, **99** (1955), 1615.
- [12] Bohr, A., *Dan. Mat. Fys. Medd.*, **26** (1952), No. 14. Bohr, A. and Mottelsson, B. R., *Dan Mat. Fys. Medd.*, **27** (1953), No. 16.
- [13] 例如, Kerman, A. K., *Nuclear Reaction*, V. 1, (1959), 427.
- [14] Griffin, J. J. and Rich M., *Phys. Rev.*, **118** (1960), 850.
- [15] Bés, D. R. and Szymaski, Z., *Nuclear Phys.*, **28** (1961), 42.
- [16] Bernstein, E. M. and De Boer, J., *Nuclear Phys.*, **18** (1960), 40.
- [17] Hanser, U., *Nuclear Phys.*, **27** (1961), 632.
- [18] Берлович, Э. Е., Бониц, М. П. и Никитин, М. К., *ЖЭТФ*, **40** (1961), 749.
- [19] Гринь, Ю. Т. и Павличенков, И. М., *ЖЭТФ*, **41** (1961), 954.
- [20] Rassey, A. J., *Phys. Rev.*, **109** (1958), 949.

ON THE g_R FACTOR OF NUCLEI

YANG KUO-SHEN

(*Tientsin College of Engineering*)

ABSTRACT

A general formula for the g_R factor is derived in accordance with the spirit of Skyrme's variational method. Numerical values of g_R for nine nuclei in the neighbourhood of Lu^{175} are obtained using Nilsson's wave functions. The calculated values of g_R depend on the discrepancy of the spin-orbit coupling parameter x between the neutron and the proton. They are near to the observed values, smaller than Z/A and greater than those of the cranking model with pair-correlation interaction taken into account.