

奇 A 核非轴对称转动波函数 与能级的计算^{* 1)}

韩文述 邵耀良 阮英超

提 要

本文给出了利用偶-偶核非轴对称转动波函数与能级,以计算奇 A 核非轴对称转动波函数与能级的方法。

在研究奇 A 核非轴对称转动态时,常要求以下方程:^[1]

$$H_T \Psi^{I,j} = \hbar^2 (8B\beta^2)^{-1} \sum_{x=1}^3 \frac{(I_x - J_x)^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi x}{3}\right)} \Psi^{I,j} = E_R^{I,j} \Psi^{I,j}, \quad (1)^2)$$

满足玻尔对称条件的本征解,按习惯分别称 $\Psi^{I,j}$ 与 $E_R^{I,j}$ 为转动波函数与能级值。 $\Psi^{I,j}$ 的形式解为

$$\Psi^{I,j} = \sum_{\mu \geq 0, \text{偶数}} \sum_{K-Q=\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} A_{KQ} [D_{MK}^I \chi_Q^j + (-1)^{I-j} D_{M-K}^I \chi_{-Q}^j], \quad (2)^3)$$

式中归一化了的 I^2 、 I_z 与 I_3 的本征函数 D_{MK}^I 与价核子角动量本征函数 χ_Q^j 常作为已知,故求 $\Psi^{I,j}$ 可归结为求系数 A_{KQ} 的问题。通常为避免在 $\mu = 0$ 时 K, Q 绝对值取和重复起见,将 $\Psi^{I,j}$ 写为

$$\Psi^{I,j} = \sum_{\mu \geq 0, \text{偶数}} \sum_{\substack{K-Q=0; K>0 \\ K-Q \geq 2; K, Q \text{ 正负不限}}} \frac{A'_{KQ}}{\sqrt{2}} [D_{MK}^I \chi_Q^j + (-1)^{I-j} D_{M-K}^I \chi_{-Q}^j], \quad (2')$$

显然有

$$A'_{KQ} = A_{KQ} + (-1)^{I-j} A_{-K-Q}, \quad \text{当 } \mu = 0 \text{ 时}. \quad (3)$$

目前文献中,求 $\Psi^{I,j}$ 与 $E_R^{I,j}$ 都是直接解方程(1)。这不单是计算繁杂,且忽视了 R 亦是好量子数这一点。例如 Давыдов 的论文^[2]中,本可严格求解该文的

$$H = \hbar^2 (8B\beta^2)^{-1} \left\{ \sum_{x=1}^3 \frac{(I_x - J_x)^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi x}{3}\right)} + \lambda \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} \right\}$$

的本征方程,但却用微扰法求了近似解。事实上只要注意到 Давыдов 等^[3,4]提出的偶-偶

* 1962年3月29日收到。

1) 吉林大学理论物理专门化1961年级毕业论文的一部分。

2) I, j, R 是总角动量 $\mathbf{I}$, 价核子角动量 $\mathbf{J}$ 与核转动角动量 $\mathbf{R}$ 的量子数。因为下面将证明 R 是好量子数,故 $E_R^{I,j}$ 附加 R 指标。又 $x = 1, 2, 3$ 表示固定在核体上的坐标轴。

3) 式中 μ 取和至 $\begin{cases} (I+j), & \text{当 } (I+j) \text{ 为偶数,} \\ (I+j-1), & \text{当 } (I+j) \text{ 为奇数.} \end{cases}$

核非轴对称转动态所满足的方程:

$$H_R \Psi^R = \hbar^2 (8B\beta^2)^{-1} \sum_{x=1}^3 \frac{R^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2x\pi}{3}\right)} \Psi^R = E(R) \Psi^R, \quad (4)^{1)}$$

及其满足玻尔对称条件的本征解:

$$\Psi^R = \sum_{\mu \geq 0; \text{偶数}} \frac{B_\mu}{\sqrt{2(1 + \delta_{\mu 0})}} [D_{\nu\mu}^R + (-1)^R D_{\nu-\mu}^R], \quad (5)^{2)}$$

应用通常的角动量加法规则,能够证明:方程(1)的解 $\Psi^{I,j}$ 及其本征值 $E_R^{I,j}$,可用方程(4)的解 Ψ^R 及其本征值 $E(R)$ 来表示.

由于

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{J}, \quad (6)$$

算符 H_r 与 H_R 是等同的. 如果论证了,对解(2)与(5)而言是附加了同样的对称条件,则 $\Psi^{I,j}$ 与 Ψ^R 是同一个本征方程的,按不同角动量本征函数线性组合构成的同一个解. 下面就来证明:对 $\Psi^{I,j}$ 与 Ψ^R 是附加了同样的对称条件.

我们注意到,方程(1)与(4)的本征解分别对 R_z 与 I_z 的量子数 ν 与 M 是退化的;故以下讨论将不涉及 ν 与 M ,而只把它们分别当作 I^2, I_3, J^2, J_3 , 及 R^2, R_3 的本征函数来处理. 将(2)与(5)写成更一般的形式:

$$\Psi^{I,j} = \sum_{\mu \geq 0; \text{偶数}} \sum_{K-Q=\mu} \frac{A_{KQ}}{\sqrt{2}} [|IK, jQ\rangle + (-1)^{I-j} |I-K, j-Q\rangle], \quad (2'')$$

$$\Psi^R = \sum_{\mu \geq 0; \text{偶数}} \frac{B_\mu}{\sqrt{2(1 + \delta_{\mu 0})}} [|R\mu\rangle + (-1)^R |R-\mu\rangle], \quad (5')$$

式中 $|IK, jQ\rangle$ 是归一化的 I^2, I_3, J^2 及 J_3 的本征函数; $|R\mu\rangle$ 是归一化的 R^2 及 R_3 的本征函数.

按照玻尔假定^[5], $\mathbf{R}, \mathbf{I}$ 与 $\mathbf{J}$ 满足如下对易关系:

$$[I_x, I_\lambda]_- = -i\hbar I_{\lambda \times \lambda}, \quad (7.1)$$

$$[J_x, J_\lambda]_- = i\hbar J_{\lambda \times \lambda}, \quad (7.2)$$

$$[R_x, R_\lambda]_- = -i\hbar R_{\lambda \times \lambda}, \quad (7.3)$$

$$[I_x, J_\lambda]_- = 0. \quad (7.4)$$

我们将式(6)改写成

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + (-\mathbf{J}) = \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{J}} \quad (6')$$

式中 $\tilde{\mathbf{J}}$ 是 $\mathbf{J}$ 的时间反演算符. 其对易关系为

$$[\tilde{J}_x, \tilde{J}_\lambda]_- = -i\hbar \tilde{J}_{\lambda \times \lambda}, \quad (7.2')$$

$$[I_x, \tilde{J}_\lambda]_- = 0, \quad (7.4')$$

1) 按习惯分别称 Ψ^R 与 $E(R)$ 为偶-偶核非轴对称转动波函数与能级值.

2) 这里 $D_{\nu\mu}^R$ 是已经归一化了的,

μ 取和至 $\begin{cases} R, & \text{当 } R \text{ 为偶数,} \\ R-1, & \text{当 } R \text{ 为奇数.} \end{cases}$

并注意到 $|j - Q\rangle$ 与它的时间反演态 $|\widetilde{jQ}\rangle$ 有如下关系¹⁾:

$$|\widetilde{jQ}\rangle = (-1)^{i+Q} |j - Q\rangle, \quad (8)$$

依照(6')、(7.1)、(7.2')、(7.3)及(7.4')可知 $\mathbf{R}$, $\mathbf{I}$ 及 $\mathbf{J}$ 的本征函数满足角动量的迭加关系, 故有²⁾

$$|IK, jQ\rangle = (-1)^{i-Q} \sum_{R=|I-j|}^{I+j} \langle IjK - Q | R\mu \rangle |R\mu\rangle, \quad (9)$$

$$|I - K, j - Q\rangle = (-1)^{2j+Q+I} \sum_{R=|I-j|}^{I+j} (-1)^R \langle IjK - Q | R\mu \rangle |R - \mu\rangle, \quad (10)$$

将(9)及(10)代入(2''), 并注意到由于 R^2 与 H_I 和 H_R 对易, R 是好量子数. 于是对选定的 R 得到

$$\Psi^{I,j} = \sum_{\mu \geq 0; \text{偶数}} \sum_{K-Q=\mu} (-1)^{i-Q} \langle IjK - Q | R\mu \rangle \frac{A_{KQ}}{\sqrt{2}} [|R\mu\rangle + (-1)^R |R - \mu\rangle], \quad (11)$$

比較(11)与(5'), 可見两者满足同样的对称条件, 于是証明完毕. 并由此可知对同一 R 而言, $\Psi^{I,j}$ 与 Ψ^R 等价, 且本征值对应相等:

$$E_R^{I,j} = E(R). \quad (12)$$

其次我們来求两种波函数系数 A_{KQ} 与 B_μ 間的簡洁关系. 由(9)与(10)式, 利用 Clebsch-Gordon 系数的么正性, 可得

$$|R\mu\rangle = \sum_{K-Q=\mu} (-1)^{i-Q} \langle IjK - Q | R\mu \rangle |IK, jQ\rangle, \quad (13)$$

$$|R - \mu\rangle = \sum_{K-Q=\mu} (-1)^{2j+I+Q-R} \langle IjK - Q | R\mu \rangle |I - K, j - Q\rangle, \quad (14)$$

将(13)及(14)式代入(5')有

$$\begin{aligned} \Psi^R = & \sum_{\mu \geq 0; \text{偶数}} \sum_{K-Q=\mu} \frac{B_\mu}{\sqrt{2(1 + \delta_{\mu 0})}} (-1)^{i-Q} \langle IjK - Q | R\mu \rangle \times \\ & \times [|IK, jQ\rangle + (-1)^{I-j} |I - K, j - Q\rangle], \end{aligned} \quad (15)$$

比較(15)与(2''), 立即求得

$$A_{KQ} = \frac{B_\mu}{\sqrt{(1 + \delta_{\mu 0})}} (-1)^{i-Q} \langle IjK - Q | R\mu \rangle. \quad (16)$$

若奇 A 核非軸对称轉动波函数 $\Psi^{I,j}$, 写成通常形如(2')的形式时, 他們的系数关系为(利用(3))

$$A'_{KQ} = \sqrt{1 + \delta_{\mu 0}} B_\mu (-1)^{i-Q} \langle IjK - Q | R\mu \rangle. \quad (17)$$

由以上論証可見, 利用已发表的(例如[1, 3, 4, 6])偶-偶核非軸对称轉动波函数及能級, 依照(12)与(17)(或(16))两式, 便可求得奇 A 核非軸对称轉动波函数与能級.

按上述方法, 我們曾計算了 $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ 的、相应于各种 γ 角度的奇 A

1) 这里所采用的 Y_{lm} 定义与通用的 Condon-Schortley 书上的定义差 i^l 因子.

2) 容易証明: 迭加系数 $\langle IjK - Q | R\mu \rangle$ 就是通常的 Clebsch-Gordon 系数.

核非轴对称转动波函数与能级;并用直接求解方程(1)的方法做了抽查,结果相一致。由于计算工作量不大,无需列出这些数据。

我们衷心地感谢导师吴式枢教授在本文证明关键处所给予的帮助,并感谢王燕生、施安顿、卜昭华、陈广文及周崑等同志在参加本文讨论时提出的可贵意见。

参 考 文 献

- [1] Давыдов, А. С., *ЖЭТФ.*, **36** (1959), 1555.
- [2] Davydov, A. S., *Nuclear Phys.*, **16** (1960), 597.
- [3] Давыдов, А. С., Филиппов, Г. Ф., *ЖЭТФ.*, **35** (1958), 440.
- [4] Давыдов, А. С., Ростовский, В. С., *ЖЭТФ.*, **36** (1959), 1788.
- [5] Bohr, A., *Dansk. Mat.-fys. Medd.*, **26**, No. 14 (1952).
- [6] Moore, R. B., White, W., *Can. J. phys.*, **38** (1960), 1149.

ON A METHOD OF CALCULATION OF NON-AXIAL ROTATIONAL WAVE FUNCTIONS AND ENERGY LEVELS OF ODD-A NUCLEI

HAN WEN-SHU, SOU YOU-LIANG, YAN ING-CHOU

ABSTRACT

In this paper, we have given a method for calculating non-axial rotational wave functions and energy levels of odd-A nuclei by means of that of even-even nuclei.