

不同表面阻抗波导中耦合系数的关系及其在远程波导精确度计算中的应用*

錢 景 仁
(中国科学院)

提 要

本文从阻抗微扰的概念出发^[1,2],把 Unger^[3] 在研究 H_{01} 波通过弯曲及截面变形波导管时所得到的耦合系数,在不同表面阻抗时平方和不变的原理推广到更普遍的情况,这样,使计算相关距离十分小的各种随机公差和接头公差变得十分简便,对于不同类型波导精确度的计算,可由统一的公式出发。此外在一般情况下,得到了两两耦合系数之间的相互关系。

在计算均匀不规则波导的精确度时,利用阻抗微扰的形式,得到允许阻抗微扰量与附加衰减的关系,从而可以按照各种不规则性与阻抗微扰的关系决定均匀公差。

一、引 言

利用阻抗微扰的概念可以很成功地解决复杂的边界条件问题^[1],且在小变形的条件下,可以求出各种不规则性而引起的阻抗微扰^[2]。不规则性包括波导截面变形,介质膜波导膜厚的不均匀,螺旋波导绕线的不均匀,螺旋结构的不均匀,螺旋外介质厚度的不均匀等;因为波导中各波型之间的耦合系数是可以通过阻抗微扰来表达,因此极易求出远程 H_{01} 波波导中由于不规则性而引起的 H_{01} 波与各种寄生波的耦合系数。

Unger^[3] 曾得到这样的结果,就是在周向表面阻抗为零的螺旋波导中,由于弯曲及截面变形而引起的 H_{01} 波与其他各寄生波耦合系数的平方和与在金属波导中是一致的;这样在计算相关距离很短的随机公差时就十分方便,因为这时 H_{01} 波的附加变换损失是与耦合系数的平方和成正比。很自然会想到这一耦合系数平方和不变的原理是否可能推广到其他各种微小不规则性,而这种不规则性是以阻抗微扰的形式来体现的;另外这一结果是否对周向表面阻抗不为零时仍正确;又如果 H_{01} 波与寄生波之间相互的耦合系数不等时,形式将怎样改变。本文就将在这三方面作推广。在研究接头公差时,又将上述原理进一步推广到各波型变换系数之间的关系。

实际上往往仅知道一波型对另一波型的耦合系数而不知道相反的耦合系数,因而在这里,根据在无耗波导中两两耦合系数是互共轭的关系得到有耗波导结构中耦合系数的关系。

利用这两方面的推广,可以求出阻抗微扰量与容许附加衰减之间的关系,从而确定各种相关距离很短的随机不规则性的公差,及各种接头允许的公差。在计算螺旋线缠绕不

* 1962年7月24日收到;1962年11月30日收到修改稿。

均匀公差时, 由于这种不均匀对 H_{01} 波不能用阻抗微扰的形式来表达, 因而必须单独处理, 但仍然可得十分简洁的结果。

最后对均匀不规则的波导, 如果也把这些不规则性用阻抗微扰的形式来表达, 可以求出它与附加衰减之间的关系, 这一关系显然依赖于轴向表面阻抗, 且根据它可决定各种不规则性均匀公差。

二、Unger 结果的推广

在一周向表面阻抗为 Z_φ , 轴向表面阻抗为 Z_z 的圆波导中, 由于不规则性¹⁾而引起 H_{01} 波与寄生波之间的耦合系数可按文献[1](4.15)式求得²⁾:

$$\left. \begin{aligned} N_{1r} &= D_{1r} \frac{\Delta Z_{\varphi r, m}}{Z_0} = D_{1r} \left| \frac{\Delta Z_{\varphi r, m}}{Z_0} \right| e^{i\theta_r}, \\ N_{r1} &= D_{r1} \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} = D_{r1} \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right| e^{i\theta_1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $D_{1r} = D_{r1}$ 是与波型有关的复杂的量; 这里用 1 代表 H_{01} 波, r 代表某一周向场变化为 m 次的寄生波; Z_0 为自由空间的波阻抗; $\Delta Z_{\varphi 1, m}$ 及 $\Delta Z_{\varphi r, m}$ 分别代表 H_{01} 波及寄生波周向表面阻抗微扰的付氏展开系数, 即³⁾

$$\left. \begin{aligned} \Delta Z_{\varphi 1} &= \sum_{m=1}^p \Delta Z_{\varphi 1, m} \cos m\varphi, \\ \Delta Z_{\varphi r} &= \sum_{m=1}^p \Delta Z_{\varphi r, m} \cos m\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

今另取一参考波导, 为了方便, 令其表面阻抗 $Z_\varphi^0 = 0$, $Z_z^0 = 0$ ⁴⁾。由于同样的 H_{01} 波的阻抗微扰 $\Delta Z_{\varphi 1}$ 将引起 H_{01} 波与寄生波之间的耦合, 耦合系数由文献[1](5.13)式可得

$$K_{1r} = C_{1r} \left| \frac{\Delta Z'_{\varphi r, m}}{Z_0} \right| e^{i\theta'_r}, \quad K_{r1} = C_{r1} \left| \frac{\Delta Z'_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right| e^{i\theta'_1}, \quad (3)$$

其中

$$C_{1r} = C_{r1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x_1 x_r^2}{jK \sqrt{\gamma_1 \gamma_r}} \frac{1}{\sqrt{x_r^2 a^2 - m^2}}, \quad (4)$$

在无耗损波导中这是个正实数; 又 γ 代表波型的传输常数, 是一虚数; x 为横截面波数; K 为自由空间波数。

由于在无耗损波导管中, 耦合系数之间的关系为 $K_{1r} = -K_{r1}^*$, 故由(3), (4)可得

$$|\Delta Z'_{\varphi r, m}| = |\Delta Z'_{\varphi 1, m}|, \quad \theta'_r = -(\theta_1 + \pi). \quad (5)$$

现在来观察参考波导的波型在周向表面阻抗为 Z_φ 、轴向表面阻抗为 Z_z 的波导中的耦合机构。这可以用广义耦合波方程来表达, 其矩阵形式可表示为

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{KE}, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{E}$ 是一列矩阵, 各元代表参考波导中向前传输波的幅度, 它们是这样排列的: 先是

1) 这里不讨论有意弯曲, 但是沿波导线的微小轴偏移仍能包括在内。

2) 这里的符号与原公式稍有不同, 且仅考虑同向波之间耦合。

3) ΔZ_φ 为复量, 其幅角并非 φ 的函数。

4) 任取 $Z_\varphi^0 = 0$, $Z_z^0 = 0$ 并不失去讨论问题的一般性。

周向無場變化的波型(即圓對稱波型), 且以 H_{01} 波為首, 接着按周向變化的次序排列; $\dot{\mathbf{E}}$ 為 $\mathbf{E}$ 對波導軸向距離的微商; $\mathbf{K}$ 為一方陣, 可以表示為

$$\mathbf{K} = \hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}^{(0)} + \mathbf{K}^{(1)} + \mathbf{K}^{(2)} + \cdots + \mathbf{K}^{(p)}, \quad (7)$$

其中 $\hat{\mathbf{K}}$ 為對角綫矩陣, 其元即為參考波導中各耦合波型的傳輸常數, $\mathbf{K}^{(0)}$ 是一准對角綫矩陣, 其形式為

$$\mathbf{K}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(0,0)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{K}^{(1,1)} & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \mathbf{K}^{(p,p)} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\mathbf{K}^{(m,m)}$ 也為方陣, 各元代表周向變化為 m 次各傳輸波型之間由於 Z_s, Z_φ 而引起的耦合, 可按文獻[1](5.13)式計算, 這些方陣的行數由它們傳輸波型的數目決定; 由於 Z_s, Z_φ 是常量, 因而各元皆為常數。又

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}^{(0,1)} & 0 & & \\ \mathbf{K}^{(1,0)} & 0 & \mathbf{K}^{(1,2)} & & \\ 0 & \mathbf{K}^{(2,1)} & 0 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ \vdots & & & & \mathbf{K}^{(p-1,p)} \\ & & & \mathbf{K}^{(p,p-1)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{K}^{(0,2)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}^{(1,3)} & & \\ \mathbf{K}^{(2,0)} & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & \mathbf{K}^{(3,1)} & 0 & 0 & & \\ 0 & & & & 0 & 0 & \mathbf{K}^{(p-2,p)} \\ \vdots & & & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \mathbf{K}^{(p,p-2)} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

$\mathbf{K}^{(3)}, \mathbf{K}^{(4)}, \dots$ 的表示式可按此類推。這裡 $\mathbf{K}^{(t,s)}$ 為方陣, 其各元代表周向變化次數為 t 與 s 的各個波型之間由於 $\Delta Z_{\varphi k, m}$ 及 $\Delta Z_{s k, m}$ 而引起的耦合系數, 這裡 $m = |t - s|^{(1)}$, 耦合系數一般表示可按文獻[1](5.13)式求得; 如果 $t = 0$ 或 $s = 0$, $\mathbf{K}^{(t,s)}$ 第一行或第一列的元也可按(3)式求得。

為了研究具有表面阻抗 Z_s, Z_φ 的波導中各正規波型之間的耦合, 必須把參考波導中由於 Z_s, Z_φ 而引起的耦合波轉換為被研究波導中的正規波。為此作如下變換:

$$\mathbf{E} = \mathbf{O}\mathbf{E}', \quad (11)$$

其中 $\mathbf{O}$ 為 $(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}^{(0)})$ 的模態矩陣, 由於 $(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}^{(0)})$ 是對稱的, 因而 $\mathbf{O}$ 是正交的, 即滿足 $\mathbf{O}_t = \mathbf{O}^{-1}$; 又其中 $\mathbf{E}'$ 為列矩陣, 各元代表在表面阻抗為 Z_s, Z_φ 波導中各正規波的

1) 如果 $t \neq 0$ 又 $s \neq 0$, 則計算 $\mathbf{K}^{(t,s)}$ 各元時必須同時計及 $\Delta Z_{\varphi k, m}$ 及 $\Delta Z_{s k, m}$; 並且這裡 $\mathbf{K}^{(t,s)}$ 沒有考慮到由於 $\Delta Z_{\varphi k, t+s}$ 及 $\Delta Z_{s k, t+s}$ 而引起的耦合, 這部分耦合在某些情況(例如考慮同一波型不同極化波之間耦合)是必須考慮的。這裡我們主要討論 H_{01} 波與寄生波之間的耦合, 因而不計入這部分耦合並不影響最後結果。如果計入這部分耦合, 用本文的方法是同樣能處理的。

幅度。由于 $\mathbf{O}$ 是正交, 故规范化方式与 $\mathbf{E}$ 的各元一致, $\mathbf{E}'$ 各元的排列与 $\mathbf{E}$ 的各元相对应, 即如果 $Z_\varphi \rightarrow 0$, $Z_s \rightarrow 0$ 时, $\mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{E}$ 。由于 $(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}^{(0)})$ 是准对角线矩阵, 故其模态矩阵也是准对角线的, 即

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{O}^{(1)} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{O}^{(2)} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & & \mathbf{O}^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $\mathbf{O}^{(0)}$, $\mathbf{O}^{(1)}$ 等分别为 $(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}^{(0)})$ 各分矩阵的模态矩阵, 且各自正交。 (6) 式经 (11) 式变换后成为

$$\dot{\mathbf{E}}' = \mathbf{O}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{O} \mathbf{E}' = \mathbf{N} \mathbf{E}', \quad (13)$$

其中

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \Gamma^{(0)} & \mathbf{N}^{(0,1)} & \mathbf{N}^{(0,2)} & \cdots \\ \mathbf{N}^{(1,0)} & \Gamma^{(1)} & \mathbf{N}^{(1,2)} & \cdots \\ \mathbf{N}^{(2,0)} & \mathbf{N}^{(2,1)} & \Gamma^{(2)} & \cdots \\ \vdots & & & \mathbf{N}^{(p-1,p)} \\ \vdots & & & \mathbf{N}^{(p,p-1)} & \Gamma^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

其中 $\Gamma^{(0)}$, $\Gamma^{(1)}$, $\cdots$ 为对角线矩阵, 其元即为矩阵 $(\hat{\mathbf{K}} + \mathbf{K}^{(0)})$ 的特征值, 代表被研究波导中正规波的传输常数, 又

$$\mathbf{N}^{(i,j)} = \mathbf{O}_i^{(i)} \mathbf{K}^{(i,j)} \mathbf{O}_j^{(j)}, \quad (15)$$

这样 (13) 式就表达了具有表面阻抗 Z_s , Z_φ 的波导中的广义耦合波方程, $\mathbf{N}^{(i,j)}$ 各元就代表被研究波导中正规波之间的耦合系数。由于 $\mathbf{E}$ 第一个元是代表 H_{01} 波, 因而 H_{01} 波与周向变化为 m 次的各寄生波之间的耦合系数为 $\mathbf{N}^{(0,m)}$ 的第一行及 $\mathbf{N}^{(m,0)}$ 的第一列, 其元分别为 $N_{11}^{(0,m)}$, $N_{12}^{(0,m)}$, $\cdots$ 及 $N_{11}^{(m,0)}$, $N_{21}^{(m,0)}$, $\cdots$ 。由 (15) 式再利用 $\mathbf{O}$ 阵的正交特性对应乘积之和为

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n N_{1r}^{(0,m)} N_{r1}^{(m,0)} &= \sum_{j=1}^n [O_{j1}^{(0)}]^2 \sum_{r=1}^n K_{j1}^{(0,m)} K_{r1}^{(m,0)} + \\ &+ \sum_{i \neq j}^n O_{i1}^{(0)} O_{j1}^{(0)} \left[\sum_{r=1}^n K_{ir}^{(0,m)} K_{r1}^{(m,0)} + \sum_{r=1}^n K_{jr}^{(0,m)} K_{ri}^{(m,0)} \right], \end{aligned} \quad (16)$$

这里 $K_{ji}^{(0,m)}$ 与 $K_{ji}^{(m,0)}$ 分别为 $\mathbf{K}^{(0,m)}$ 与 $\mathbf{K}^{(m,0)}$ 的元, 而 $O_{j1}^{(0)}$ 是 $\mathbf{O}^{(0)}$ 第一列的第 j 个元; n 为 $\mathbf{O}^{(0)}$ 矩阵的行数; 又对 r 的总和应包括圆周向变化为 m 次的一切可能传输的波型。

如果 $Z_\varphi = 0$, 则 $K_{ij}^{(0,0)} = K_{ji}^{(0,0)} = 0$, 故 $O_{i1}^{(0)} = 1$, $O_{j1}^{(0)} = 0$ ($j \neq 1$), 因而由 (16) 式可得

$$\sum_{r=1}^n N_{1r}^{(0,m)} N_{r1}^{(m,0)} = \sum_{r=1}^n K_{1r}^{(0,m)} K_{r1}^{(m,0)}. \quad (17)$$

在当 $\mathbf{K}$ 为对称矩阵时, 即 $\mathbf{K}^{(i,j)} = \mathbf{K}^{(j,i)}$, 则得 $K_{1r}^{(0,m)} = K_{r1}^{(m,0)}$, 代入 (15) 式可得 $\mathbf{N}^{(i,j)} = \mathbf{N}_i^{(j,i)}$, 即 $N_{1r}^{(0,m)} = N_{r1}^{(m,0)}$; 这样 (17) 式就变为 Unger 所得到的结果^[3]。

一般實際情況是 $Z_\varphi/Z_0 \ll 1$ ，因而 $K_{ij}^{(0,0)}$ 及 $K_{ji}^{(0,0)}$ 也遠小於一，故得

$$\left. \begin{aligned} O_{11}^{(0)} &\simeq 1, \\ O_{ji}^{(0)} &\ll O_{11}^{(0)} \quad (j \neq 1), \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

故在這種情況下，(17)式近似正確。

這樣就把 Unger 在有限情況下所得到的耦合系數在不同波導中平方和不變的原理推廣到更普遍的情況。Unger 在推出這一原理時主要的一個條件是：同一大小不規則性所引起的波型耦合系數不因軸向表面阻抗而改變。這裡我們用阻抗微擾代替了不規則性，因而這條件的限制就不存在了，從而這一原理也就可以推廣到各種類型不規則性的隨機公差計算中。

根據(15)式還可以來找 H_{01} 波與寄生波及寄生波與 H_{01} 波耦合系數之間的關係，即 $N_{r1}^{(m,0)}$ 與 $N_{1r}^{(0,m)}$ 的關係。為了簡單起見，仍然是在(18)式的情況下，由(15)式可得

$$\left. \begin{aligned} N_{r1}^{(m,0)} &= \sum_{j=1}^n O_{jr}^{(m)} K_{ji}^{(m,0)}, \\ N_{1r}^{(0,m)} &= \sum_{j=1}^n O_{jr}^{(m)} K_{ji}^{(m,0)}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由(3)及(5)式可知，對於任意 j 及 m 值滿足

$$\frac{K_{ij}^{(0,m)}}{K_{ji}^{(m,0)}} = -e^{-j2\theta_1}. \quad (20)$$

把(20)式代入(19)式即可得

$$N_{r1}^{(m,0)} = -N_{1r}^{(0,m)} e^{j2\theta_1}, \quad (21)$$

其中 θ_1 為 $\Delta Z_{\varphi 1}$ 的幅角。這樣就可得到 H_{01} 波與寄生波同寄生波與 H_{01} 波之間耦合系數的乘積

$$N_{1r}^{(0,m)} N_{r1}^{(m,0)} = -[N_{r1}^{(m,0)}]^2 e^{-j2\theta_1},$$

將(1)式代入上式，就得

$$N_{1r}^{(0,m)} N_{r1}^{(m,0)} = -D_{r1}^2 \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2. \quad (22)$$

在一般情況下這是個復量。同樣也可得

$$K_{1r}^{(0,m)} K_{r1}^{(m,0)} = -C_{r1}^2 \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2. \quad (23)$$

將(22)、(23)式代入(17)式，就可得到十分簡便的形式

$$\sum_{r=1}^n D_{r1}^2 = \sum_{r=1}^n C_{r1}^2 = \sum_{r=1}^n C_{1r}^2. \quad (24)$$

Unger 結果的另一推廣是聯系在接頭處各波型變換系數的關係。如果分別具有表面阻抗為 Z_s ， Z_φ 與 $Z_s + \Delta Z_s$ ， $Z_\varphi + \Delta Z_\varphi$ 的兩波導相連接，在兩波導中分別激發起各種波型。如果忽略反向波，則兩波導中各參考波導的波型之間的關係可用如下矩陣形式表達：

$$\mathbf{E}_f = \mathbf{K} \mathbf{E}_b, \quad (25)$$

$\mathbf{E}_f$ 及 $\mathbf{E}_b$ 皆為列矩陣，其元分別代表前後兩波導中參考波導的向前傳輸波的幅度，其排列同前；又其中 $\mathbf{K}$ 可由(7)—(10)式表示，但(7)式中無 $\mathbf{K}^{(0)}$ 項，而對角綫矩陣 $\hat{\mathbf{K}}$ 各元代表

参考波导中各波型经过接头的传输系数; $\mathbf{K}^{(p)}$ ($p \neq 0$) 各元 $K_{rq}^{(p)}$ 在 $\frac{\Delta Z_{\varphi}}{Z_0} \ll 1$, $\frac{\Delta Z_s}{Z_0} \ll 1$ 的条件下可近似表示为(3)式的 $\frac{1}{j(\beta_r - \beta_q)}$ 倍^[4], 它不再是耦合系数而是变换系数. 对(25)式作(11)式的变换, 可得

$$\mathbf{E}'_j = \mathbf{N} \mathbf{E}'_b,$$

这里 $\mathbf{E}'_j$ 及 $\mathbf{E}'_b$ 的各元分别为相连的前后两波导本身各正规波的幅度, $\mathbf{N}$ 是由(14), (15)式来表达, 但其中对角线矩阵 $\Gamma^{(0)}, \Gamma^{(1)}, \dots, \Gamma^{(p)}$ 的各元代表相连波导各正规波经过接头的传输系数, 而其他各元 $N_{rq}^{(p)}$ 是代表波型之间的变换系数, 同样也可近似表为(1)式的 $\frac{1}{(\gamma'_r - \gamma'_q)}$ 倍. 这样就可以得到联系两组变换系数的关系(16)式. 同样在 $\frac{Z_{\varphi}}{Z_0} \ll 1$ 的情况下也可得(17)及(19)式, 按类似(20)–(24)的推导步骤, 最后得

$$N_{1r}^{(0,m)} N_{r1}^{(m,0)} = \left(\frac{D_{r1}}{\gamma'_r - \gamma'_1} \right)^2 \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2, \quad (26a)$$

$$\sum_{r=1} \left(\frac{D_{r1}}{\gamma'_r - \gamma'_1} \right)^2 = \sum_{r=1} \left(\frac{C_{r1}}{\gamma_r - \gamma_1} \right)^2 = \sum_{r=1} \left(\frac{C_{1r}}{\gamma_1 - \gamma_r} \right)^2. \quad (26b)$$

其中 $\gamma_r = j\beta_r$ 及 γ'_r 分别为参考波导及被研究波导中第 r 个波型的传输常数. 它们与(22)及(24)相对应, 所不同的是这里的 $N_{r1}^{(m,0)}$ 及 $N_{1r}^{(0,m)}$ 是代表 H_{01} 波变换到寄生波与寄生波变换到 H_{01} 波的变换系数.

三、应 用

按 Unger 在文献[4]中类似步骤, 在 $N_{1r}^{(0,m)}$ 的二次近似下, 可得 H_{01} 波经过距离 Z 之后的幅度为

$$E'_1 = 1 + \sum_{r=1} \int_0^Z N_{1r}^{(0,m)} e^{j\gamma'_r z'} \int_0^{z'} N_{r1}^{(m,0)} e^{-j\gamma'_r z''} dz'' dz', \quad (27)$$

这里仅考虑圆周方向变化 m 次的各寄生波与 H_{01} 波的耦合, 如果是连续的不规则性, 则将(1)式代入, 这里的 N 值是代表耦合系数. 又假定 $\Delta Z_{\varphi 1}$ 的幅角 θ_1 沿线是个常量, 再利用(22)式就得由于波型变换而引起的 H_{01} 波附加损耗:

$$\Lambda = \sum_r \int_0^Z e^{j\Delta\alpha'_r u} [\operatorname{Re}(D_{r1}^2) \cos \Delta\beta'_r u - \operatorname{Im}(D_{r1}^2) \sin \Delta\beta'_r u] du \times \\ \times \int_0^{Z-u} \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}(s)}{Z_0} \cdot \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}(s+u)}{Z_0} \right| ds,$$

其中 $\gamma'_1 - \gamma'_r = \Delta\gamma'_r = \Delta\alpha'_r + j\Delta\beta'_r$, 又 Re 及 Im 表示取实部及虚部, 如果不规则性的分布是随机的, 且其阻抗微扰有如下相关函数:

$$\left\langle \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}(s)}{Z_0} \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}(s+u)}{Z_0} \right\rangle = \left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle e^{-\frac{2\pi |u|}{L_0}},$$

其中 L_0 为相关距离. 因此就可得到在表面阻抗为 Z_s , Z_{φ} 的波导中, 由 $\Delta Z_{\varphi 1, m}$ 而引起的平均附加衰减:

$$\frac{\langle \Lambda \rangle}{Z} = L_0 \left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle \sum_r \frac{\operatorname{Re}(D_{r1}^2)(2\pi - \Delta\alpha'_r L_0) - \operatorname{Im}(D_{r1}^2) \Delta\beta'_r L_0}{\Delta\beta_r'^2 L_0^2 + (2\pi - \Delta\alpha'_r L_0)^2}.$$

如果 $\Delta\beta'_r L_0 \ll 1$, $\Delta\alpha'_r L_0 \ll 1$, 则又可写为

$$\frac{\langle A \rangle}{z} = \left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle \frac{L_0}{2\pi} \sum_r \operatorname{Re}(D_{r1}^2). \quad (28)$$

利用(24)式, 由於 C_{1r} 是實數, 故(28)可表示為

$$\frac{\langle A \rangle}{z} = \left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle \frac{L_0}{2\pi} \sum_r C_{1r}^2, \quad (29)$$

其中 C_{1r} 可按(4)式計算。這樣在相關距離十分短的情況下, 由於不規則性而引起的附加衰減就可以在任意選取的參考波導中, 按存在同一阻抗微擾來計算。因而在容許附加衰減下, 計算波導精確度的要求就在頗大程度上化簡了。首先是求出參考波導中容許的 $\left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|$ 值, 然後按文獻[2]中各種不規則性與阻抗微擾的關係, 就可以求出被研究波導中容許的公差量。

現在按上述方法來計算螺旋波導及介質膜波導的某些公差。工作波長 $\lambda = 8.2 \text{ mm}$, 波導半徑 $a = 30 \text{ mm}$, 計算結果見表1。在計算 $\left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle$ 時, 考慮到容許附加衰減不大於 H_{01} 波在純銅管中熱損耗的10%, 這裡取 $L_0 = 1 \text{ mm}$, 且考慮到 $\Delta Z_{\varphi 1, m}$ 存在二種不

表1 一些公差的計算值

m	$\sum_r C_{1r}^2$	$\left\langle \left \frac{\Delta z_{\varphi 1, m}}{z_0} \right ^2 \right\rangle$	截面變形公差 $\sqrt{\langle \delta_m^2 \rangle}$ mm	螺旋綫徑公差 mm	繞綫不均勻公差 $\sqrt{\langle \theta_m^2 \rangle}$ 度
0	1.56×10^{-4}	5.96×10^{-4}	± 0.0318	± 0.048	
1	6.59×10^{-5}	7.05×10^{-4}	± 0.0346		1.51
2	1.35×10^{-4}	3.44×10^{-4}	± 0.0242		1.06
3	6.51×10^{-5}	7.10×10^{-4}	± 0.0347		1.52

同極化。表上列出的截面變形公差(用均方根值表示)不論對螺旋波導或對介質膜波導都一樣; 螺旋綫徑公差是在這樣的螺旋波導結構中計算的: 周期 $p = 0.2 \text{ mm}$, 綫徑為 0.15 mm 。綫徑公差是按容許的周期與綫徑比的改變量求出的, 而後者引起阻抗微擾^[2]。按類似步驟可求出允許的周期改變量為 $(+0.07)$ 及 (-0.05) 。介質膜厚改變量的影響是十分微小的, 我們可以对具體的介質膜波導作一估計, 就在上述尺寸波導中塗上膜厚為 60 微米 的聚苯乙烯 ($\epsilon' = 2.5$, $\epsilon'' = 0.0025$), 即 $\delta_0 = 0.06 \text{ mm}$, 如果膜厚不均勻改變量(周向變化一次的)均方根值 $\sqrt{\langle \Delta \delta_1^2 \rangle} = 0.01 \text{ mm}$, 則按文獻[2]可求出 $\left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, 1}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle = 5.9 \times 10^{-10}$, 由(29)式並取 $L_0 = 1 \text{ mm}$ 可求得附加衰減僅 $6.17 \times 10^{-9} \text{ N/km}$ 。

繞綫不均勻而引起的阻抗微擾由文獻[2]為

$$\frac{\Delta Z_{\varphi r}}{Z_0} = - \frac{jK\psi}{s_r \gamma_r} \cdot \frac{\operatorname{tg} m\varphi}{-\operatorname{ctg} m\varphi}, \quad (30)$$

這裡 s_r 為波型的自耦合系數; ψ 角為繞綫傾角; 用 $\operatorname{tg} m\varphi$ 抑 $-\operatorname{ctg} m\varphi$ 取決於第 r 個寄生波縱向磁場分量用 $\cos m\varphi$ 極化抑 $\sin m\varphi$ 極化。(30)式僅對非 H_{0m} 波是正確的, 對 H_{01} 波不存在反映這一物理過程的阻抗微擾。如果取被研究波導的表面阻抗 $Z_\varphi = 0$, $Z_s = \infty$, 則按文獻[5]得 $s_r = \pm \frac{jK}{\gamma_r}$, 由(30)且考慮到阻抗微擾應有正的實部,

$$\frac{\Delta Z_{\varphi r, m}}{Z_0} = \theta_m, \quad (31)$$

其中 θ_m 为 ψ 角按 φ 付氏级数展开的系数。由上式可见, $\Delta Z_{\varphi, m}$ 对一切非圆对称波是相同的, 因此由(29)式就得由于绕线不均而引起的附加衰减为

$$\frac{\langle \Lambda \rangle}{z} = \langle \theta_m^2 \rangle \frac{L_0}{2\pi} \sum_r C_{1r}^2. \quad (32)$$

由文献[5]很易看出, 由于 θ_m 而引起 H_{01} 波与寄生波之间的耦合系数与轴向表面阻抗无关, 因此按(32)式, 在给定附加衰减下求出的容许公差对不同 Z_x 是一致的, $\sqrt{\langle \theta_m^2 \rangle}$ 的计算值见表1。

上述计算是在 $\Delta\beta'_r L_0 \ll 1$, $\Delta\alpha'_r L_0 \ll 1$ 的条件下求得的。在我们的例子中, 对于一些主要的寄生波来说, $\Delta\beta'_r < 0.02$ 1/mm, $\Delta\beta'_r \gg \Delta\alpha'_r$, 因而 $L_0 \leq 5$ mm 已满足(28), (29)式是正确的, 也就说明了上述公差量的正确性。

现在来计算接头公差。远程波导的接头公差包括两种类型, 一种类型是由于连接不良, 产生了波导轴在接头处的弯折与偏移; 另一种类型是指相邻两波导由于工艺上的原因, 表面阻抗不一致。这两种类型都可以认为在接头之处有一阻抗的跳跃 $\Delta Z_{\varphi 1}$ ¹⁾, 但对于前一类型, $\Delta Z_{\varphi 1}$ 只有 $\cos \varphi$ 的分量, 而对于后一类型 $\Delta Z_{\varphi 1}$ 须用(2)式展开。

如果有一远程波导, 两两接头间的距离为 l_i (i 代表波导段的次序), 而每段波导本身是直的, 且波导结构及表面特性是一致的, 也即波型变换仅仅是在接头处发生。如果 $l_i = l + \Delta l_i$ (其中 $\Delta l_i \ll l$), 又假定 Δl_i 及 $\Delta z_{\varphi 1, m}$ 是均值为零的随机变量, $\Delta Z_{\varphi 1, m}$ 的方差为 $\langle |\Delta Z_{\varphi 1, m}|^2 \rangle$ 。考虑到这些随机因素, 经过 ν 段波导后, H_{01} 波的平均变换损失按(26a)及(27)为

$$\langle \Lambda \rangle = -\frac{\nu}{2} \left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle \sum_{r=1}^N \frac{D_{r1}^2}{(\gamma'_r - \gamma'_1)^2}, \quad (33)$$

这里 N 是用变换系数代入的。将(26b)代入(33)式, 即得平均附加衰减为

$$\frac{\langle \Lambda \rangle}{\nu l} = \frac{1}{2l} \left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, m}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle \sum_{r=1}^N \frac{C_{1r}^2}{(\beta_1 - \beta_r)^2}. \quad (34)$$

利用(34)式可计算各种接头公差。

在上述的波导及工作波长下, 又 $m = 1$, 可计算出 $\sum_{r=1}^N \frac{C_{1r}^2}{(\beta_1 - \beta_r)^2} = 1.24 \times 10^{-2}$ 。令每段波导长 $l = 5$ m, 又如果按平均附加衰减为热损失的 10%, 按(34)可得 $\left\langle \left| \frac{\Delta Z_{\varphi 1, 1}}{Z_0} \right|^2 \right\rangle = 9.30 \times 10^{-4}$, 按文献[2]可算出接头容许偏移公差为 0.04 mm。

四、均匀不规则公差计算

按文献[4]类似的步骤, 但代替截面变形用阻抗微扰, 由于阻抗微扰对圆对称磁波引起的附加场必须满足边界条件

$$e_{\varphi}(a) = \Delta Z_{\varphi 1} H_{z1} e^{-i\beta_1 z}, \quad (33)$$

其中 H_{z1} 为未微扰 H_{01} 波在 $r = a$ 处之场分量; β_1 为其传输常数。满足条件(33)式的各附加场将增加耗损, 从而使 H_{01} 波引起附加衰减 α

$$\alpha = \sum_m \alpha_m. \quad (34)$$

1) 由于这里仅研究接头对 H_{01} 波传输的影响, 所以不考虑 ΔZ_x 的作用。

每一 α_m 分別與 $\Delta Z_{\varphi 1, m}$ 的對應關係為

$$\alpha_0 a = \frac{x_1^2}{\beta_1 K} \operatorname{Re} \left(\frac{\Delta Z_{\varphi 1, 0}}{Z_0} \right). \quad (35)$$

當 $m \neq 0$ 時,

$$\left| \frac{\frac{\alpha_m a}{\Delta Z_{\varphi 1, m}}}{Z_0} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{Z_s}{Z_0} \right) \frac{\beta_1 a}{(Ka)^3} \frac{m^2 \left[\frac{J_m(x_1 a)}{J'_m(x_1 a)} \right]^2}{1 + j \frac{Z_s}{Z_0} \frac{Ka}{x_1 a} \left[\frac{\beta_1^2 m^2 J_m(x_1 a)}{K^2 x_1^2 a^2 J'_m(x_1 a)} - \frac{J'_m(x_1 a)}{J_m(x_1 a)} \right]}}, \quad (36)$$

其中 $\Delta Z_{\varphi 1, m}$ 由(2)式確定; $x_1^2 = K^2 - \beta_1^2$.

表 2 中列出遠程波導公差計算, 它是在 $\lambda = 8.2 \text{ mm}$, $a = 30 \text{ mm}$ 情況下作的; 該波導表面阻抗的選擇是使 H_{12} 波有尽可能大的衰減, 按文獻[6]其值為 $Z_s/Z_0 = 0.65$; 表中阻抗微擾值是按容許附加衰減不大於 H_{01} 波在純銅管中衰減的 10% 計算的; δ_m 為截面變形公差量。按表中 $|\Delta Z_{\varphi 1, m}/Z_0|$ 同樣可以計算其他不規則性的公差要求, 且可看出周向變化兩次的公差要求十分苛刻, 具體在截面變形的情况, 就是對橢圓度要求十分嚴格。

表 2 均勻公差的計算

m	2	3	4
$ \Delta Z_{\varphi 1, m}/Z_0 ^2$	0.46×10^{-4}	4.4×10^{-4}	2.2×10^{-4}
δ_m	0.0088 mm	0.027 mm	0.019 mm

五、結 論

上面利用阻抗微擾的概念, 提出了各種不規則性在二種截然相反的分布下波導精確度的計算。這裡精確度的計算是根據容許的附加衰減出發的。如果不規則性隨機分布的相關距離十分短, 這部分衰減是由於 H_{01} 波在沿綫各點變換為寄生波的能量不斷迭加的結果; 而對於均勻的不規則性, 這部分衰減可以看作不規則波導 H_{01} 波正規波衰減的一部分。如果從波型變換的角度出發, 這部分衰減是由於規則波導 H_{01} 正規波沿綫不斷變換為寄生波, 而後者又不斷為波導吸收的結果。

計算結果表明, 相關距離極短的波導容許精確度隨相關距離的增加而提高, 且在許多情況下, 這一容許值與波導表面阻抗無關; 均勻不規則波導的容許精確度在濾波作用較好的波導中往往要求得更嚴, 且應盡量避免周向變化兩次的不規則性。

由各種不規則性的阻抗微擾表明, 除軸偏移外, 在一般情況下, 截面變形的公差要求最嚴, 而對螺旋綫徑、螺距、繞綫傾角、介質膜厚的公差要求不高, 一般都能達到。

感謝黃宏嘉教授在本文寫作中的指導與幫助, 並且對科技大學李華等同學在數字計算方面的幫助均表謝意。

參 考 文 獻

- [1] 黃宏嘉, General theory of nonconventional waveguides for long-distance transmission, *Scientia Sinica*, XI, (1962), No. 6, p. 761.
- [2] 黃宏嘉、錢景仁, The concept of impedance-perturbation as applied to imperfect waveguides, *scientia Sinica* XI, (1963), № 9, p. 1285.

- [3] Unger, H. G., Modeconversion in metallic and helix waveguide, *BSTJ*, **40** (1961), No. 2, p. 613.
- [4] Unger, H. G., Noncylindrical helix waveguide, *BSTJ* **40** (1961), No. 1, p. 233.
- [5] Unger, H. G., Winding tolerances in helix waveguide, *BSTJ*, **40** (1961), No. 2, p. 627.
- [6] Piefke, G., The influence of helix wire diameter on the modes in a helix waveguide, *PIEE*, **106B** suppl. (1959), No. 13, p. 110.

RELATIONS BETWEEN COUPLING COEFFICIENTS OF WAVEGUIDES WITH DIFFERENT SURFACE IMPEDANCES AND ITS APPLICATION

CH' IEN CHING-JEN
(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, on the basis of the concept of the impedance perturbation^[1,2], the principle of invariance of the square of the coupling coefficients proved by Unger^[3] is generalized. With this generalization, it becomes simpler to compute the random tolerances with small correlation distance and the discrete tolerances. Unified formulas are derived for computation of various tolerances of waveguides. In addition, relations between relevant pairs of coupling coefficients are obtained.

The added attenuation due to an arbitrary form of uniform irregularity is expressed in terms of the maximum allowed impedance perturbation.

Numerical examples are given.