

光学成像的信息量*

譚 維 翰

提 要

本文应用前文^[4]的结果,求得了光学成像的信息量的准确表式,并将信息量与光子的量子态、简并度等联系起来。在这个基础上,研究了光学系统的传递函数对信息量的影响与量子态在描述光信息传递问题上的应用,以及高简并度相干光源的信息量问题。

一、引 言

关于光学成像的信息量问题,最早由 Linfoot 应用 Shannon 定理并考虑到物面亮度等级变化,求得光学成像信息容量的表示式,这个结果后来没有得到应有的重视。

本文采用样点定理与作者前文^[4]的结果,求得光学成像信息量的准确表示式,进一步将信息量与光子的量子态、简并度等联系起来,在这个基础上,研究了传递函数对信息量的影响。值得指出的是,将量子态这一概念应用到经典光学中,可使很多问题表述更方便。例如光束中光子所占的量子态数与该光束的 Langrange 不变量仅差一个与波长 λ 有关的因子。又如一平行光束,不论其截面的大小,绝大部分光子只占据一个量子态。

二、由物面与象面亮度分布求得光学成像的信息量

如图 1 所示,物面亮度分布 $I(x)$,经光学系统成像后,得出象面分布 $I'(x')$ 。物面亮度分布可看成是沿空间 x 坐标而变化的信源,光学系统就是信息通道, $I'(x')$ 就是经过通道后象面信息。一般 $I(x)$ 与 $I'(x')$ 可展开为^[1]

$$\left. \begin{aligned} I(x) &= \sum_{-W}^W I_m e^{imx}, \\ I'(x') &= \sum_{-W}^W I'_m e^{imx'}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

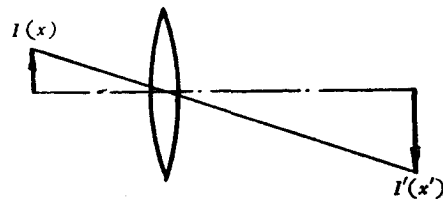


图 1

应用抽样定理, $I(x)$ 与 $I'(x')$ 的样点数为 $2W$ 个, W 决定于光学系统的数值孔径。又设 X 为物面宽度,则总的样点数正比于 $2WX$, 对于每个样点可能存在的状态数是与接收器的最小探测能量 ΔI 及视觉的灵敏度有关,若强度 I_m 之平均值为 I , 假定 I_m 的变化服从高斯分布,并设

$$N = \frac{I}{\Delta I}, \quad (2)$$

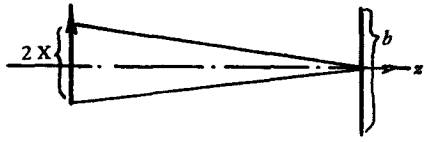
则物面信息量为 $H^{[2]}$:

$$H = 2CWX \log_2 (N + 1), \quad (3)$$

* 1963年5月24日收到。

式中 C 为比例常数。1955 年 Linfoot 用不同方式亦得到这结果^[3], 根据已有的结果^[4], $2CWX$ 可以准确地写为

$$1 + 2 \frac{b}{\lambda} \beta \doteq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{2bX}{R} \right). \quad (4)$$



括弧内数值为 Langrange 不变量, 如果将 $\frac{1}{\lambda}$ 用德布罗意关系式代替, 则(4)式可以写为

$$\frac{2Xb}{R} \cdot \frac{p}{h} = \Delta x \cdot \frac{\Delta p_x}{h}, \quad (5)$$

而

$$\Delta x = 2X, \quad \Delta p_x = |\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2| = p \frac{b}{R}.$$

物面上光子冲量在 x 方向的分量 p_x 在 Δp_x 内变化, x 在 Δx 内变化, 因此物面上光子是在边长为 Δx 与 Δp_x 包含之相体积 $\Delta x \cdot \Delta p_x$ 内变化, 而

$\frac{\Delta x \cdot \Delta p_x}{h}$ 即为总的量子态数, $N + 1$ 为每一样点所具有的水平数, 则物面信息量便是

$$H = \frac{\Delta p_x \cdot \Delta x}{h} \log_2(N + 1). \quad (6)$$

若将(6)式向二维情况推广, 并设 (x, y) 与 (x', y') 分别为物面与象面的笛卡尔坐标, z 为沿光学系统光轴方向, 而物面与象面亮度分别为 $I(x, y)$ 与 $I'(x', y')$, 经这样推广后, 信息量为

$$H = \frac{\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta x \cdot \Delta y}{h^2} \log_2(N + 1). \quad (7)$$

这时信源 $I(x, y)$ 是坐标的函数。同样推广到三度空间便有

$$H = \frac{V}{h^3} \log_2(N + 1), \quad (8)$$

V 为三维相体积 $\Delta p_x \cdot \Delta p_y \cdot \Delta p_z \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ 。这时信息 $I = I(x, y, z)$ 是分布在空间 (x, y, z) 内的, (8)式所表示的就是面积为 $\Delta x \cdot \Delta y$, 在 z 方向长度为 Δz 的一段光束 (z 为光束的传播方向) 所能负载的信息量。这数值与时间无关, 但可将 $\Delta p_x \cdot \Delta z$ 作如下的转换, 将相体积用频宽 $\Delta \nu$ 与时间间隔 Δt 表示出来, 若光束差不多沿 z 轴方向进行, 则 $\Delta z \cdot \Delta p_x$ 可近似地写为

$$\Delta z \cdot \Delta p_x = c \Delta t \cdot \Delta \left(\frac{h}{\lambda} \right) = \Delta t \cdot \Delta(h\nu) = \Delta t \cdot \Delta E,$$

即

$$\frac{\Delta z \cdot \Delta p_x}{h} = \Delta t \cdot \Delta \nu. \quad (9)$$

而物方与象方信息可改写为时间 t 之函数,

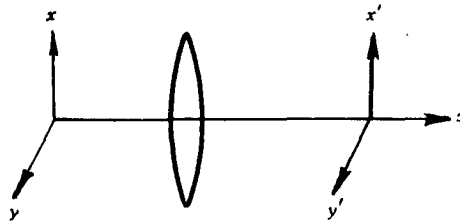


图 3

$$I(x, y, z) = I(x, y, ct),$$

$$I'(x', y', z') = I'(x', y', ct').$$

信息量 H 为

$$H = \frac{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta p_x \cdot \Delta p_y}{h^2} \Delta v \cdot \Delta t \log_2(N+1), \quad (10)$$

信息量 H 正比于频宽 Δv 。信源 $I(x, y, ct)$ 不仅依赖于物面坐标 x, y , 且依赖于时间坐标 t 。将空间坐标转换为时间坐标 t 时, 需要考虑单胞内亮度水平数 N 随着时间 t 的起伏 ΔN , 这问题比较复杂^[5], 这里不作讨论。

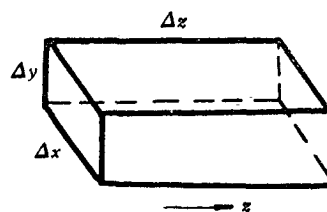


图 4

三、光学系统的传递函数对信息量的影响

由(1)式的 $I(x)$ 与 $I'(x')$ 展开式, 得物面与象面的亮度谱 I_m 及 I'_m , 在不相干情况下, 它们的联系是线性的, 即

$$I'_m = R(m)I_m \text{ 及 } N' = R(m)N. \quad (11)$$

单胞内的信息量便是由物面的

$$H = \log(N+1) \quad (12)$$

变为象方的

$$H' = \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \log_2(1 + N|R(m)|) dm, \quad (13)$$

当 $N \gg 1$ 时, 便过渡到 Shannon 的线性滤波公式^[2]

$$\begin{aligned} H' &= \log(N+1) + \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \log_2|R(m)| dm = \\ &= H + \frac{1}{2W} \int_{-W}^W \log_2|R(m)| dm. \end{aligned} \quad (14)$$

现根据 H. H. Hopkins 计算过的由于离焦而使得传递函数 $R(m)$ 下降的曲线^[6], 作出 $\log_2 R(m)$ 对 m 的图 5, 应用 (14) 式计算了离焦而引起的信息量的损失为 $\left[t = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{a}{R} \right)^2 z, z \text{ 为离焦数值} \right]$.

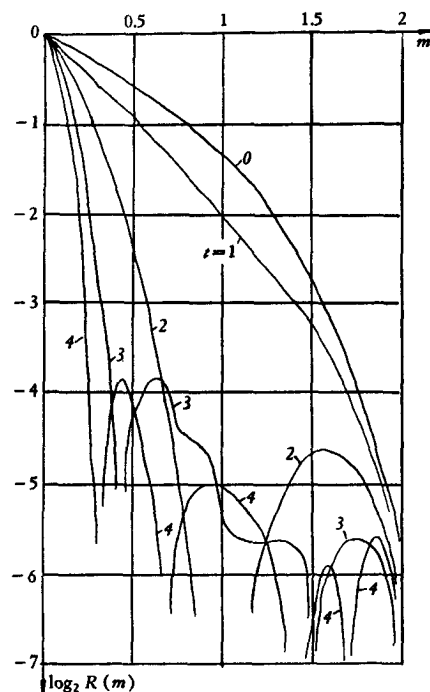


图 5

$t = 0$	3.85	bit
1	4.76	bit
2	7.05	bit
3	9.91	bit
4	10.87	bit

同样由(13)式计算 H' 得图 6 各曲线, 其中最上面一条是由(12)式算得。由图看出, 物面与象面信息量随级数 N 增加而上升, 并可看出由于离焦, 象方收到信息大为减少, 而且减少的比例随 N 不同。

下面列出不同 N 值时信息量的损失(单位 bit):

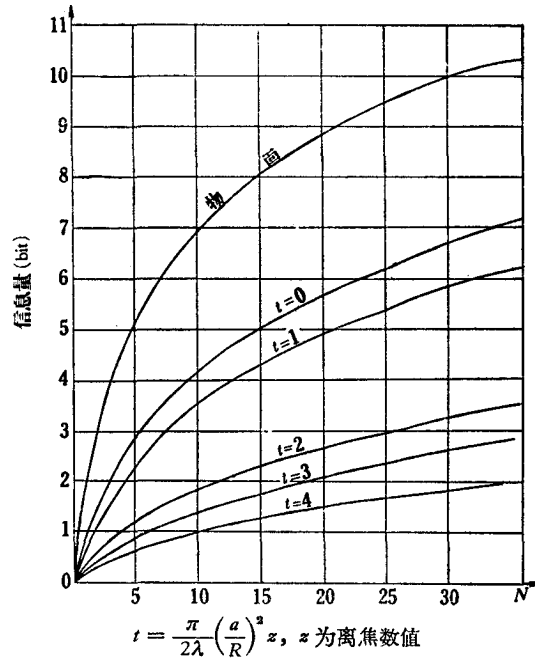


图 6

t/N	0	1	2	3	4
2	1.55	1.92	2.52	2.70	2.85
5	2.30	2.80	2.95	4.30	4.55
10	2.70	3.35	5.03	5.50	5.95
15	3.00	3.70	5.75	6.25	6.75
25	3.23	4.05	6.50	7.02	7.75
35	3.25	4.20	6.85	7.50	8.30
∞	(3.85	4.76	7.05	9.91	10.87)

上列数据最后一行是由(14)式计算得的,它显然是 N 趋于 ∞ 的情况。

四、光子在量子态间跃迁与成像的干扰问题

进一步讨论量子态在经典光学上的应用是有意义的。前面我们已经看到 Lagrange 不变量与量子态的关系。现在就从这一关系来计算任一光束的量子态数。由第一节得

$$\text{量子态数} = \frac{1}{\lambda} \times \text{Lagrange 不变量}. \quad (15)$$

这是一维的情况,推广到二维便是

$$\text{量子态数} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \times \text{Lagrange 不变量}. \quad (16)$$

利用(15)式来讨论单缝衍射情况下量子态的跃迁,如图7所示,缝宽为 $2b$,沿 θ 方向衍射振动为

$$u(\theta) = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta}.$$

$$\text{强度} \quad I(\theta) = \left(\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} b \sin \theta} \right)^2.$$

主强的第一零点满足条件

$$\frac{2b \sin \theta}{\lambda} = 1. \quad (17)$$

比较(15)即知张角为 θ 的光束占据一个量子态。由于主强只在满足上述条件 $\pm \theta$ 内,因而

绝大部分光子仍处在(17)式所决定的量子态内。然而在第一零点外还有强度起伏,一般的 n 级零点满足

$$\frac{2b \sin \theta_n}{\lambda} = n.$$

因此经过衍射后光子可能由第一量子态向第 n 量子态跃迁,跃迁几率为

$$P(n) = N \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx, \quad (18)$$

式中 N 为规格化常数,

$$N = 1 / \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \frac{2}{\pi}.$$

因而在某一瞬间,在象面接收到某一光子处在某一量子态,但不能确定它原来处在什么量子态。这样,由于光子在量子态之间跃迁所造成的信息量损失为

$$- \sum_n P(n) \log_2 P(n). \quad (19)$$

一般的象面由于衍射(或光子在量子态的跃迁)引起信息量损失为

$$- \sum_n \left\{ \int_{n-1}^n I(x - x_0) dx \right\} \log_2 \left\{ \int_{n-1}^n I(x - x_0) dx \right\}. \quad (20)$$

应用(20)式,可以计算在光学系统有象差情况下,星点成象后象面信息量的损失,并可用来作为光学系统的评价标准。这个讨论虽然仅对一维进行,显然对多维情况亦可类似地进行。

现在我们计算单缝情况下,由于光子在量子态间跃迁形成信息的损失是

$$- \sum_n P(n) \log_2 P(n) = 1.036 \text{ bit}.$$

由于表格限制,我们取了 $n = 15$ 个量子态来计算。若用公式(14)来计算同一情况下的信息损失则为

$$\frac{1}{W} \int_0^W \log_2 |R(m)| dm = \frac{1}{2} \int_0^2 \log_2 (1 - x/2) dx = 1 \text{ bit},$$

与上面结果甚相一致。这两种方法分别对应于用星点的光能分布与用光学系统的传递函数来计算信息量的损失。关于这两种方法的一致,正是 Shannon 第三定理^[2]的内容。用星点光能计算信息损失的(19), (20)式是按信息量的定义^[2]得出来的。但用传递函数进行计算的(14)式则由(3)式导来。总的样点数为 $2Wx$ 个,每一样点的状态为 $1 + N$ 个,用

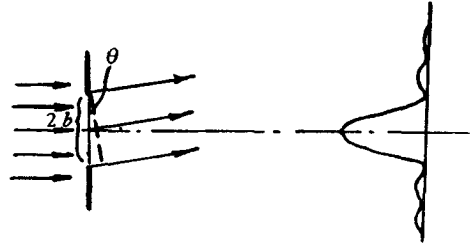


图 7

这些样点与状态能得出不同的成象的个数为 $(1+N)^{2Wx}$, 每一特定象出现的几率是

$$P = 1/(1+N)^{2Wx}.$$

如果取 $H = \log_2 1/P$, 就得到(3)式. 由 Shannon 第三定理得知, 只要样点数足够多, 与 H 的定义相比, 后一种取法的误差是可以任意小的.

五、信息量与光源简并度的关系

这一节研究与时间 t 无关的空间信息量与光源简并度的关系. 这时信源的亮度分布可以看成是长时间平均的结果, 因而单胞内光子随时间的起伏不会影响收到的信息.

按上面的定义, N 为单胞内亮度的水平数, 亦即平均信号功率与接收器噪音功率之比, 在热平衡状况下, 频率为 ν 的能量 ϵ_ν 的平均值

$$\epsilon_\nu = \frac{\hbar\nu}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}. \quad (21)$$

噪音功率为 $2\pi e\hbar\nu$, 于是有(详见附录)

$$N = \frac{\hbar\nu}{e^{\hbar\nu/kT} - 1} \cdot \frac{1}{2\pi e\hbar\nu} = \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1} \cdot \frac{1}{2\pi e}.$$

这时一个单胞内所能负载的信息量便是

$$H' = \log_2(N+1) = \log_2\left(\frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1} \cdot \frac{1}{2\pi e} + 1\right). \quad (22)$$

事实上由于物面的吸收与散射, 当射入是恒定光流 ϵ_ν 时, 由物面射出的光流便是在 0 与 ϵ_ν 之间, 因而(22)式正代表物面最大的理想信息量. (15)式中 $\frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1}$ 为光子简并度, Mandel^[7] 计算过受激发射光源的简并度为 5×10^7 , 而普通白炽光源简并度仅为 3×10^{-4} , 这样 H' 增加了

$$\frac{\log_2\left(\frac{5 \times 10^7}{2\pi e} + 1\right)}{\log_2\left(\frac{3 \times 10^{-4}}{2\pi e} + 1\right)} = 4.97 \times 10^5$$

倍, 这个数字是很可观的, 也正是由于受激发射这个特性, 应用于远距离通讯才有可能.

本文曾与王之江同志进行过讨论, 蒙王大珩先生审阅全文, 并由王润文同志协助进行计算, 在此一并致谢.

附录 接收器的噪音影响

接收器的噪音影响, 主要是由于接收器周围热辐射所引起的, 在辐射平衡的情况下, 光子服从 Bose 分布, 但 Shannon 公式 $\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$ 的适用条件是信源与噪音分布是相互独立的 gauss 分布, 当信源为 gauss 分布而噪音为 Bose 分布时, 严格来说, Shannon 公式并不适用, 但可以近似地将噪音满足 Bose 分布时的信息量等价到满足 gauss 分布的信息量, 然后求出等价噪音功率 $\bar{n}$. 根据 Bose 公式在相体积的每一单胞内具有 x 光子的几率

$$P(x) = \frac{1}{1 + \bar{n}} \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right)^x,$$

$\bar{n}$ 为平均光子数, 由接收器的温度 T 所决定,

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\nu/kT} - 1},$$

则噪音所带来的信息量损失是

$$H(x) = -\sum P(x) \ln P(x) = \ln(1 + \bar{n}) - \bar{n} \ln \left(\frac{\bar{n}}{1 + \bar{n}} \right).$$

若噪音满足 gauss 分布, 则

$$H(x) = \log_2 2\pi e \cdot n,$$

将两式相比, 求得等价的噪音功率 n 为

$$n = \frac{1}{2\pi e} (1 + \bar{n}) \left(1 + \frac{1}{\bar{n}} \right)^{\bar{n}}.$$

当接收器温度较低时, $\bar{n} \rightarrow 0$, 则 $n = \frac{1}{2\pi e}$.

这就是我们将 n 的最小值取为 $\frac{1}{2\pi e}$ 的原因.

参 考 文 献

- [1] 譚維翰, 物理学报, **16** (1960), 316.
- [2] Shannon, C. E. and Weaver, W., The Mathematical Theory of Communication (1949).
- [3] Linfoot, Trancetion Philosophical Royel Society 247—2 (1955), 370.
- [4] 譚維翰, 王之江, 物理学报, **16** (1960), 306.
- [5] Advances in Electronics and Electron Physics, **XI** (1959), 88—178.
- [6] Hopkins, H. H., Proc. Roy. Soc., **A 231** (1955), 98.
- [7] Mandel, L., J.O.S.A., **51** (1961), 797.

ВЕЛИЧИНА ИНФОРМАЦИИ В ФОРМИРОВАНИИ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Тань Вэй-хань

Резюме

Пользуясь результатами предыдущей работы^[4], в данной статье получаем точное выражение величины информации в формировании оптического изображения и устанавливали связь величины информации с квантовым состоянием фотона и вырождением фотона.

На этой основе было рассмотрено влияние передаточной функции оптической системы на величину информации и применение квантового состояния фотона в описании передачи световой информации, а также и вопрос информационной величины высоко-вырожденного когерентного света.