

光学成像的分辨与相关*

譚維翰 王潤文

提 要

本文从光振动的相关函数出发,研究光学成像的分辨問題。首先将两个点的相关定义,推广到两个点集的相关,然后应用了 H. H. Hopkins 关于两点的分辨与相关的結果求得了两个点集的分辨,并且計算了綫与綫、綫与半无限大平面、点与圓环等的分辨,由計算結果看出各种情况的差异是比較大的。

一、引 言

从对相关函数所进行的研究已經看出,光学成像中能否分辨这个概念,是与相关概念紧密地关联在一起的,但这个关联主要是从两点間的分辨与相关問題表現出来。在两点的相关函数中,有相干范围这个概念^[1],而在两点的分辨問題中,也有最小分辨距离这一概念。从成像的过程来看,物面上的两个点(不論它靠得多么近),原則上是可以完全分辨的点,也是完全不相干(完全独立)的两个点。經過光学系統成像影响后,两个点(不論它們分得多么开)的完全不相干性遭到破坏,变为部分相干了,同时这两个点的完全可以分辨也受到一定影响。

由于分辨与相关这样的紧密联系,实际上就可以用相关来定义分辨,来描写分辨,即愈不相关愈能分辨,愈相关愈不能分辨。标志基本上相关或不相关的閾值——相关范围也可以看成是基本上能分辨与不能分辨的标志。有意义的是这样做不仅能解决两点間的分辨相关問題,而且能解决两个点集間的分辨相关問題,因为实际上除了两个点的分辨問題外,还有两个点集的分辨問題。例如,在瞄准与測量时,經常需要知道分辨两条綫是重合还是分开,这就属于两个点集的分辨問題。本文首先将两点的相关函数推广成为两个点集的相关函数,进而定义了两个点集間的分辨函数作为两个点集能否被分辨的依据。最后用这分辨函数解决綫与綫、綫与点、圓环与点、半无限大平面与綫的分辨問題。

二、两个点集間的相关函数

設有点集1与2,关于它們的相关函数可以这样来考虑:先从点集1中抽出一个点与点集2求相关函数,然后求点集1中各个点与点集2的相关函数之和,这是点集1对点集2的相关函数。設点集1中的 p_1 点与点集2中的 p_2 点的距离为 p_1p_2 , p_1 , p_2 点的相关函数記为 $J(p_1p_2)$,則点1,2的相关函数 $J_{12}(\tau)$ 可定义为

$$J_{12}(\tau) = \int_{(1)} \int_{(2)} J(p_1p_2) dp_1 dp_2. \quad (1)$$

* 1963年5月24日收到。

举一个例子来说明这式子的意义,物面上有两条相互平行的无限长的直线 1 与 2. 假定照明系统是属于 Köhler 的,由图 1 知,直线 1 的 p_1 点与直线 2 p_2 点的距离为

$$\overline{p_1 p_2} = d \sec \theta = \sqrt{d^2 + y^2}.$$

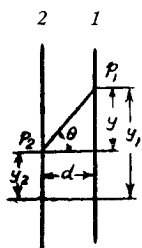


图 1

并记 $\sigma = n_c \sin \theta_c =$ 聚光系统相对孔径,则 p_1 与 p_2 点之相关函数为

$$J(p_1 p_2) = \frac{2J_1\left(\frac{2\pi}{\lambda} \overline{p_1 p_2} \sigma\right)}{\frac{2\pi}{\lambda} \overline{p_1 p_2} \sigma} = \frac{2J_1(K\sqrt{y^2 + d^2})}{K\sqrt{y^2 + d^2}}, \quad (2)$$

式中 $K = \frac{2\pi}{\lambda} \sigma$.

应用(1)式可得两直线 1 与 2 间的相关函数为

$$J_{12}(d) = C \iint_{-\infty}^{\infty} dy_1 dy_2 \frac{2J_1(K\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + d^2})}{K\sqrt{(y_1 - y_2)^2 + d^2}}, \quad (3)$$

式中 C 为规格化常数,按 Sonienc 积分^[2]并适当取定规格化常数 C ,则上式可以写为

$$J_{12}(d) = \frac{\sin Kd}{Kd}. \quad (4)$$

(4)式就代表两条线间的相关函数,它与两个点间的相关函数是有区别的^[3]. 这里规格化常数的取定,是以下面的考虑为依据的:(1)若点集 1 与 2 可以完全相互重合(如前面所举的相互平行的直线),则当它们相互重合时,规定它们的相关函数为 1;(2)若点集 1 与点集 2 的一部分重合(如点与线),则当点集 1 完全重合在点集 2 上时的相关函数规定为 1.

三、两个点集间的分辨函数

两个点集的分辨函数可以沿着分辨两个点的方法予以推广. 关于两个点 p_1, p_2 刚好能被分辨的极限位置,一般是这样取定的: 即 p_1, p_2 的中点 M 的亮度恰好为 p_1 点亮度的 80%, 这即为刚好能被分辨的极限位置. 考虑到照明系统与成象系统的影响^[3], 这中点 M 的亮度 I 为

$$I = 2 \left[\frac{2J_1\left(\frac{d}{2} \sigma\right)}{\frac{d}{2} \sigma} \right]^2 \left[1 + \frac{2J_1(m\sigma d)}{m\sigma d} \right], \quad (5)$$

σ 为成象物镜的相对孔径; $m\sigma$ 为照明系统的相对孔径. 当 $I = 0.8$ 时, 定义为 $p_1 p_2$ 点刚好能分辨的极限位置.

注意到 $\frac{2J_1\left(\frac{d}{2} \sigma\right)}{\left(\sigma \cdot \frac{d}{2}\right)}$ 乃是两点相距为 $\frac{d}{2}$ 时通过物镜所产

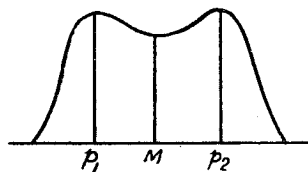


图 2

生的相关函数, 而 $\frac{2J_1(m\sigma d)}{m\sigma d}$ 则是相距为 d 的两点被相对

孔径为 $m\sigma$ 的系统所产生的相关函数, 前者记为 $J_{12}^0\left(\frac{d}{2}\right)$, 后者记为 $J_{12}^m(d)$. 并定义 1, 2 两点间的中点亮度就是两点间的分辨函数 R_{12} , 于是我们有

$$R_{12} = 2 \left[J_{12}^0 \left(\frac{d}{2} \right) \right]^2 [1 + J_{12}^m(d)]. \quad (6)$$

当点 1, 2 推广到点集 1, 2 时, 则两点间的函数应该为两点集间的相关函数所代替. 分辨函数 R_{12} 仍然按同样的方式通过相关函数来定义, 这时

$$J_{12}^0 \left(\frac{d}{2} \right) = C' \int_{(1)} \int_{(2)} \frac{J_1 \left(\sigma \frac{p_1 p_2}{2} \right)}{\sigma \frac{p_1 p_2}{2}} dp_1 dp_2, \quad (7)$$

$$J_{12}^m(d) = C' \int_{(1)} \int_{(2)} \frac{J_1(m\sigma \frac{p_1 p_2}{2})}{m\sigma \frac{p_1 p_2}{2}} dp_1 dp_2. \quad (8)$$

分辨函数具有与(6)式同样的形式, 只不过这时下角 1, 2 不代表两个点而代表两个点集. 于是可以令

$$R_{12} = 0.8 \quad (9)$$

为两点集刚好被分辨的分辨阈. 应用这个定义可以求得綫与綫之间的分辨函数为

$$R_{12} = 2 \left[\frac{\sin \left(\sigma \frac{d}{2} \right)}{\sigma \left(\frac{d}{2} \right)} \right]^2 \left[1 + \frac{\sin(m\sigma d)}{m\sigma d} \right]. \quad (10)$$

图 3 是当 $R_{12} = 0.8$ 时将 d 对 m 作的曲线. 当聚光鏡与物鏡孔径相等时, 我們获得了在 Abbe 相干照明下两条綫的最小分辨距离

$$l = \frac{0.5\lambda}{NA}.$$

当 $1.6 > m > 1$ 时, 分辨距离繼續縮小; 而当 $m > 1.6$ 以后, 最小分辨距离迅速上升, 因此在綫状标本观察时不宜将聚光鏡安置得比物鏡孔径大 1.6 倍以上.

用同样方法計算出下面几种点集的相关函数与分辨函数:

(1) 一个半无限大亮平面与平行其边缘直綫的分辨

相关函数为

$$J_{12}(d) = \frac{\pi/2 - \text{Si}(\sigma d)}{\pi/2}; \quad (11)$$

分辨函数为

$$R_{12} = 2 \left\{ \frac{\pi/2 - \text{Si} \left(\frac{\sigma}{2} d \right)}{\pi/2} \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{\pi/2 - \text{Si}(m\sigma d)}{\pi/2} \right\}. \quad (12)$$

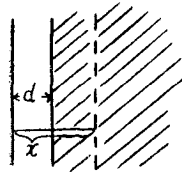


图 4

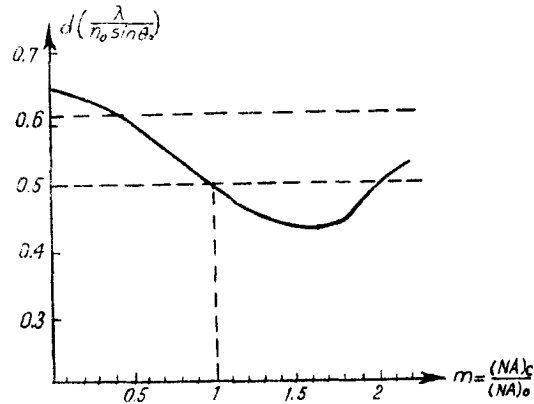


图 3

图 5 是令 $R_{12} = 0.8$, 将 d 对 m 作图所得的曲线. 图中曲线表明

一个半无限大亮平面与平行其边缘直线的分辨远小于两个点 (H. H. Hopkins 的结果) 或两条线的结果, 即使在 $m = 0$ 时 (平行照明), 也得到很高的分辨能力, 这时最小分辨

距离可写成

$$l = \frac{0.283\lambda}{NA}. \quad (13)$$

(2) 无限窄圆环与一点的分辨
相关函数为

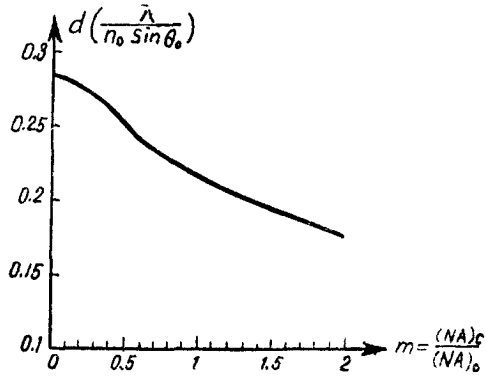


图 5

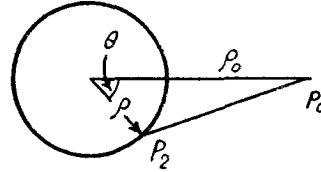


图 6

$$J_{12}(d) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{J_{2n+1}(\sigma\rho)}{\sigma\rho} \cdot \frac{J_{2n+1}(\sigma\rho_0)}{\sigma\rho_0}, \quad (14)$$

式中 N 为规格化常数:

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left[\frac{J_{2n+1}(\sigma\rho)}{\sigma\rho} \right]^2; \quad (15)$$

分辨函数为

$$\begin{aligned} R_{12} = 2 \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{J_{2n+1}\left(\frac{\sigma}{2}\rho\right)}{\frac{\sigma}{2}\rho} \cdot \frac{J_{2n+1}\left(\frac{\sigma}{2}\rho_0\right)}{\frac{\sigma}{2}\rho_0} \right\}^2 \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{1}{N'} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{J_{2n+1}(m\sigma\rho) J_{2n+1}(m\sigma\rho_0)}{m\sigma\rho \cdot m\sigma\rho_0} \right\}, \quad (16) \\ N' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{J_{2n+1}(m\sigma\rho)}{m\sigma\rho} \right)^2. \end{aligned}$$

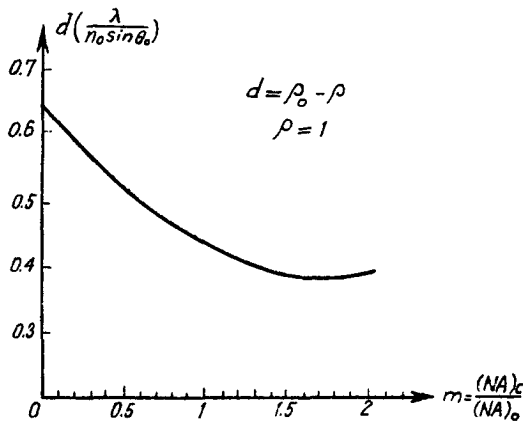


图 7

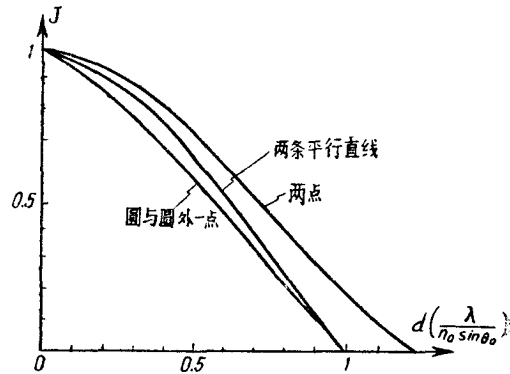


图 8

图 7 为 (16) 之曲线。所取圆环半径 $\rho = 1$ (单位是 $\frac{\lambda}{n_0 \sin \theta_0}$)。它的最低分辨极限是在 $m = 1.6-1.8$ 时有 $\frac{0.39\lambda}{n_0 \sin \theta_0}$ 。图 8 是各种不同图形间的相关函数曲线。可知, 两个图形的分辨是随它们的形状而变化的。

本文曾經王大珩先生审阅, 特此表示感謝。

附录 相关函数的计算

1. 半无限大亮平面与其边缘平行直线的相关函数: 由图 4 所示, 在半无限大平面内取任一条距离为 x 的平行直线, 其相关函数为 $\frac{\sin \sigma x}{\sigma x}$ [見(4)式], 则总的相关函数为

$$J_{12}(d) = C \int_0^\infty \frac{\sin \sigma x}{\sigma x} dx,$$

式中 C 为规格化常数; 若在 $d = 0$ 时令 $J_{12}(d) = 1$ 来确定 C , 最后得到

$$J_{12}(d) = \frac{\pi/2 - \text{Si}(\sigma d)}{\pi/2}.$$

2. 无限窄圆环与一点的相关函数: 由图 6 设点集 2 为一圆环, 点集 1 为一个点 p , 则

$$\begin{aligned} p_1 p_2 &= \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \theta}, \\ J_{12}(d) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{J_1(\sigma \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \theta})}{\sigma \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \theta}} d\theta = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{m+1} \frac{J_{m+1}(\sigma \rho)}{\sigma \rho} \cdot \frac{J_{m+1}(\sigma \rho_0)}{\sigma \rho_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d \cos(m+1)\theta}{d \cos \theta} d\theta = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_{m+1} \frac{J_{m+1}(\sigma \rho)}{\sigma \rho} \cdot \frac{J_{m+1}(\sigma \rho_0)}{\sigma \rho_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

上式最后一个积分只有当 $m+1$ 为奇数才不为零, 其值为 $2\pi(m+1)$ 。若把 2π 放在规格化常数 N 内, 即得

$$J_{12}(d) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{J_{2m+1}(\sigma \rho)}{\sigma \rho} \cdot \frac{J_{2m+1}(\sigma \rho_0)}{\sigma \rho_0}.$$

参 考 文 献

- [1] 譚維翰, 物理学报, **16** (1960), 316.
- [2] Watson, A treatise of the Theory of Bessel Function, p. 417 (5), 1952.
- [3] Hopkins, H. H., JOSA, **47** (1957), 508.

РАЗРЕШЕНИЕ И КОРРЕЛЯЦИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Тань Вэй-хань Ван Жунь-вен

Резюме

В данной статье, исходя из корреляционной функции светового колебания, рассмотрели вопрос о разрешении оптического изображения. Сначала распространена корреляция двух точек на корреляцию двух множеств точек, а потом с помощью полученных Гопкинс результатов разрешения и корреляции двух точек определено разрешение двух множеств точек. Вычислены разрешения линии к линии, линии к полубесконечно большой плоскости и точки к кружку. Из вычисленных результатов видно, что указанные разрешения имеют очень большую разность между собой.