

可分的非定域中心力和輕核結合能

張啓仁 孫 信
(北 京 大 学)

提 要

本文考虑了用可分的非定域中心力同时符合低能核子散射和輕核結合能的可能性。用低能散射数据定得了两种势阱的参量。用我們的参量和 Yamaguchi 的参量計算了氘和 α 粒子的結合能,結果都过大。因此,可分的非定域力和普通定域力类似:符合低能散射的中心力給出过大的輕核結合能。改变位阱形状并不能改进結果。

一、引 言

現有的符合高能核子散射的核力都未符合輕核結合能^[1],而且这种核力很复杂,用来处理多体問題十分不便。我們认为寻找核力的一个重要目的是为了用来研究核結構。为此,应当要求它符合輕核的結合能,对符合二体散射的要求倒可放低些。何况能量极高以至接近介子閾时,核子間的作用是否真能用核力表示还是一个問題。

能否用核力全面符合低中能核子散射和核結構的各种事实也是有問題的,即使可能,这种核力一定也很复杂,不便于計算。因此希望找到核力的某种簡化模型,它能符合低能散射和核結構的若干主要事实。这种模型可以用来討論核結構,也可以作进一步研究核力的基础。

我們认为核力的簡化模型需要符合的主要事实是低能散射和原子核的結合能。

自旋軌道耦合只在高能过程中起作用,除原子核的磁极矩和核中核子的自旋軌道耦合外,张量力也主要与高能实验事实有关。它們的引入都使問題大大复杂化,在簡化模型中最好不包含它們。然而普通定域力沒有张量力就不能同时符合低能散射和輕核結合能,因此要单用中心力,就要考虑非定域力或与动量有关的力。

可分的非定域力近来得到了一些研究^[2-4]。它的优点之一是計算較簡便,以这种力相互作用的二体問題可以严格求解,三体問題可化成二体問題^[4]。本文討論用可分的非定域中心力同时符合低能散射和輕核結合能的可能性。第二节用低能散射数据定出了核力参量。第三节用我們的参量和 Yamaguchi^[2] 的参量計算了氘的結合能。第四节計算了 α 粒子的結合能。最后作出簡短的結論。

二、核 力 参 量

s 态受到的可分非定域中心力为

$$\langle \mathbf{r} | V | \mathbf{r}' \rangle = -\frac{\hbar^2}{M} \frac{\lambda}{4\pi} f(r)f(r'), \quad (1)$$

其中 M 为核子質量, λ 为表示作用強弱的常数. 取波函数 $\psi = \frac{u(r)}{r}$, 代入薛定諤方程, 得

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + k^2 u = -\lambda A r f, \quad (2)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \frac{ME}{\hbar^2}, \\ A &= \int_0^\infty r f(r) u(r) dr, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

E 为核子相对質心系的能量. (2) 式的严格解为

$$\begin{aligned} u &= \frac{\lambda A}{k} \left[\cos kr \int_0^r r' f \sin kr' dr' + \right. \\ &\quad \left. + \sin kr \int_r^\infty r' f \cos kr' dr' \right] + B \sin kr, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - \frac{2\lambda}{k} \int_0^\infty r f(r) \sin kr \int_r^\infty r' f(r') \cos kr' dr' dr}{\int_0^\infty r f \sin kr dr}. \quad (5)$$

由(4)式可求得 s 态相移 η_0 :

$$k \cot \eta_0 = \frac{\frac{k^2}{\lambda} - 2k \int_0^\infty r f(r) \sin kr \int_r^\infty r' f(r') \cos kr' dr' dr}{\left[\int_0^\infty r f \sin kr dr \right]^2}. \quad (6)$$

另一方面, 根据有效力程理論, 低能时,

$$k \cot \eta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 + \cdots,$$

其中 a 为散射长度; r_0 为有效力程. 将(6)展成 k^2 的幂級数与此式比較, 得

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\left[\int_0^\infty r^2 f dr \right]^2} \left\{ 2 \int_0^\infty r^2 f(r) \int_r^\infty r' f(r') dr' dr - \frac{1}{\lambda} \right\}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{2} &= -\frac{1}{3a} \frac{\int_0^\infty r^4 f dr}{\int_0^\infty r^2 f dr} + \frac{1}{\left[\int_0^\infty r^2 f dr \right]^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{3} \int_0^\infty r^4 f(r) \int_r^\infty r' f(r') dr' dr + \int_0^\infty r^2 f(r) \int_r^\infty r'^3 f(r') dr' dr \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

对“高斯阱” $f(r) = e^{-\mu r^2}$, (7), (8) 两式变为

$$\frac{1}{a} = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi}} - \frac{16\mu^3}{\pi\lambda}, \quad (7')$$

$$\frac{r_0}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi\mu}} - \frac{1}{2a\mu}. \quad (8')$$

取^[5]

$$\left. \begin{aligned} a_t &= 5.377 fm, & r_{0t} &= 1.7 fm, \\ a_s &= -23.69 fm, & r_{0s} &= 2.4 fm. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

代入得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_t &= 2.9912 fm^{-3}, & \mu_t &= 0.6437 fm^{-2}, \\ \lambda_s &= 0.9293 fm^{-3}, & \mu_s &= 0.4766 fm^{-2}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中下标 t, s 分别表示三重态和单态, $f_m = 10^{-13} cm$. 对“湯川阱” $f(r) = \frac{e^{-\beta r}}{r}$, (7), (8)

两式变为

$$\frac{1}{a} = \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^4}{\lambda}, \quad (7'')$$

$$\frac{r_0}{2} = -\frac{2}{a\beta^2} + \frac{3}{2\beta}. \quad (8'')$$

用式(9)的数据代入,得

$$\left. \begin{aligned} \lambda_t &= 8.442 fm^{-3}, & \beta_t &= 1.466 fm^{-1}, \\ \lambda_s &= 4.164 fm^{-3}, & \beta_s &= 1.304 fm^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

常常要用动量表象,可分力(1)的动量表象为

$$\langle \mathbf{q} | V | \mathbf{q}' \rangle = -U g(q) g(q'), \quad (12)$$

$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{q}$ 为核子在质心系中的动量, 对高斯阱,

$$g(q) = e^{-q^2/4\mu}, \quad U = \frac{\lambda}{32\pi\mu^3} \frac{\hbar^2}{M}; \quad (13)$$

对湯川阱

$$g(q) = \frac{1}{q^2 + \beta^2}, \quad U = \frac{\lambda}{2\pi^2} \frac{\hbar^2}{M}. \quad (14)$$

Yamaguchi^[2] 最初研究的可分力是湯川型的,他得到的参量是

$$\left. \begin{aligned} \beta_t &= \beta_s = 1.4488 fm^{-1}, \\ U_t &= 0.4147 fm^{-3}, & U_s &= 0.2912 fm^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

三、氘的结合能

氘的自旋和同位旋都是 1/2, 在中心力作用下只有 S 波. 可设它的试探波函数为

$$\phi = \sum_i A_i e^{-\frac{q_{12}^2 + q_3^2}{v_i}} (\chi^2 \bar{S}_\tau - {}^2\bar{S} \chi_\tau), \quad (16)$$

其中

$$\hbar \mathbf{q}_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}, \quad \hbar \mathbf{q}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2} - \mathbf{p}_3 \right). \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)]\alpha(3), \\ {}^2\bar{S} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2))\alpha(3) - 2\alpha(1)\alpha(2)\beta(3)], \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_\tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} [N(1)P(2) - P(1)N(2)]N(3), \\ {}^2\bar{S}_\tau &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ [N(1)P(2) + P(1)N(2)]N(3) - 2N(1)N(2)P(3) \}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$\mathbf{p}_i$ 为 i 粒子的动量; $\alpha(i)$, $\beta(i)$ 分别为 i 粒子的自旋朝上和朝下的状态; $N(i)$, $P(i)$ 分别为 i 粒子的同位旋中子态和质子态. (16) 式的空间部分对三个粒子对称, 自旋同位旋部分则反对称.

质心系中 $\sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i = 0$, 因此动能算符为

$$\hat{T} = \frac{\hbar^2}{M} (q_{12}^2 + q_3^2), \quad (20)$$

势能算符为

$$\hat{V} = \hat{V}_{12} + \hat{V}_{23} + \hat{V}_{31}, \quad (21)$$

V_{ij} 为 i, j 两粒子的作用势, 由 (12) 式知,

$$\langle \mathbf{q}_{12} \mathbf{q}_3 | \hat{V}_{12} | \mathbf{q}'_{12} \mathbf{q}'_3 \rangle = -U g(q_{12}) g(q'_{12}) \delta(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}'_3). \quad (22)$$

由此求得态 (16) 的平均能量为

$$\bar{E} = \frac{\langle \psi | \hat{T} + \hat{V} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{2 \frac{\hbar^2}{M} \langle \psi | q_{12}^2 | \psi \rangle + 3 \langle \psi | V_{12} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \frac{\sum_{ij} A_i^* N(v_i v_j) A_j}{\sum_{ij} A_i^* I^2(v_i v_j) A_j}, \quad (23)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N(v_i v_j) &= I(v_i v_j) \left[\frac{2\hbar^2}{M} J(v_i v_j) - \frac{3}{2} (U_s K_s(v_i) K_s(v_j) + U_t K_t(v_i) K_t(v_j)) \right], \\ I(v_i v_j) &= \left(\frac{\pi v_i v_j}{v_i + v_j} \right)^{3/2}, \\ J(v_i v_j) &= \frac{3}{2} \frac{v_i v_j}{v_i + v_j} I(v_i v_j), \\ K(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2/v} g(q) dq. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

对高斯阱,

$$K(v) = I(v, 4\mu) = \left(\frac{4\pi v \mu}{v + 4\mu} \right)^{3/2}. \quad (25)$$

将参量 (10) 代入, 在 (16) 中取两项, 以 v_1, v_2 和 $\frac{A_2}{A_1}$ 为变分参量, 在 $\frac{1}{v_1} = 1, \frac{1}{v_2} = 3.5$ 处得到平均能量为 -9.03 MeV. 这还不是两项高斯波函数能达到的极小值. 对汤川阱,

$$K(v) = (\pi v)^{3/2} \frac{2}{v} - 2\pi^2 \beta e^{\beta^2/v} \left[1 - H\left(\sqrt{\frac{\beta^2}{v}}\right) \right], \quad (26)$$

其中 $H(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$ 为误差函数. 将参量 (15) 代入, 在 (16) 中取三项, 以 v_1, v_2, v_3 , $\frac{A_2}{A_1}$ 和 $\frac{A_3}{A_1}$ 为变分参量, 在 $\frac{1}{v_1} = 1.2, \frac{1}{v_2} = 0.3, \frac{1}{v_3} = 4.5$ 处得到平均能量为 -9.45 MeV, 这也不是三项高斯波函数能达到的极小值.

实际上氘的结合能为 8.49 MeV, 即参量 (10) 和 (15) 给出的氘的结合能过大. 鉴于我们用的是较粗糙的波函数, 又没有充分变分, 结合能过大的问题比这里看到的要严重些.

四、 α 粒子的结合能

取试探波函数

$$\psi = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}(\pi\nu)^{9/4}} e^{-\frac{1}{\nu}(q_{12}^2 + q_{34}^2 + \frac{1}{2}Q^2)} \times \\ \times (1 - O_{23} - O_{31}) \chi(\widetilde{12} \widetilde{34}) [N(1)N(2)P(3)P(4) + P(1)P(2)N(3)N(4)], \quad (27)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \hbar \mathbf{q}_{12} &= \frac{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}{2}, \quad \hbar \mathbf{q}_{34} = \frac{\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4}{2}, \\ \hbar \mathbf{Q} &= \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{2} - \frac{\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\chi(\widetilde{12} \widetilde{34}) = \frac{1}{2} [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)][\alpha(3)\beta(4) - \beta(3)\alpha(4)], \quad (29)$$

O_{ij} 为 i, j 两粒子的自旋同位旋交换算符; ν 为变分参量.

对高斯阱平均能量为

$$\bar{E} = \frac{9\hbar^2}{4M}\nu - 12\sqrt{2\pi}\nu^{3/2} \frac{\hbar^2}{M} \left[\frac{\lambda_s}{(\nu + 4\mu_s)^3} + \frac{\lambda_t}{(\nu + 4\mu_t)^3} \right]. \quad (30)$$

代入参量(10), 取 $\frac{1}{\nu} = 1.25$ 得其值 $\bar{E} = -36.57 \text{ MeV}$. 对湯川阱平均能量为

$$\bar{E} = \frac{9\hbar^2}{4M}\nu - \frac{12\sqrt{2}\hbar^2}{\nu M} \left\{ \lambda_s \left[\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} - \beta_s e^{\beta_s^2/\nu} \left(1 - H\left(\sqrt{\frac{\beta_s^2}{\nu}}\right) \right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \lambda_t \left[\sqrt{\frac{\nu}{\pi}} - \beta_t e^{\beta_t^2/\nu} \left(1 - H\left(\sqrt{\frac{\beta_t^2}{\nu}}\right) \right) \right]^2 \right\}. \quad (31)$$

代入参量(11), 取 $\frac{1}{\nu} = 1.25$ 得其值 $\bar{E} = -35.05 \text{ MeV}$. 如此粗糙的试探波函数得到的结合能就这样大, 说明参量(10)和(11)给出的 α 粒子的结合能也过大.

結 論

符合低能核子散射的可分非定域中心力给出过大的轻核结合能, 因此

1. 要用中心力同时符合低能散射和轻核结合能就要考虑其他的非定域力或与动量有关的力.

2. 要用可分非定域力同时符合低能散射和轻核结合能就要考虑张量力.

我們感謝胡济民同志, 这个问题是他提出的.

看校样时的补充: 用有排斥心的中心力也可能同时符合低能核子散射和轻核的结合能. 但排斥心在很多方面和与动量有关的力等价, 不计算核结构时又会导致一些困难, 因此本文没有涉及这种可能性.

参 考 文 献

- [1] Blatt, J. M., et al., *Phys. Rev. Lett.*, **8**, No. 8 (1962), 323.
- [2] Yamaguchi, Y., *Phys. Rev.*, **95** (1954), 1628. Yamaguchi, et al., *Phys. Rev.*, **95** (1954), 1635.
- [3] Mitra, A. N., et al., *Nucl. Phys.*, **25** (1961), 307.
- [4] Mitra, A. N., *Nucl. Phys.*, **32** (1962), 529.
- [5] Hulthen, L., et al., *Handbuch der Physik*, 39.

SEPARABLE NONLOCAL CENTRAL POTENTIAL AND THE BINDING ENERGIES OF LIGHT NUCLEI

CHANG CHI-JEN SUN CHI

(Peking University)

ABSTRACT

In this paper we have calculated the binding energies of triton and helium nuclei with a separable nonlocal central potential. The results of calculation show that, with the parameters determined from low energy scattering data, such kind of potentials gives too large binding energies for three and four body systems. Change of the shape of the potential well does not improve the results.