

# $\omega$ 粒子的辐射衰变\*

戴 元 本  
(中国科学院)

## 提 要

本文由质量的解析延拓得到  $\omega \rightarrow \pi + \gamma$  过程的色散关系, 讨论了某些有关不稳定粒子色散关系的问题。在一些简化假设下得到  $\frac{W_{\omega \rightarrow \pi + \gamma}}{W_{\omega \rightarrow 3\pi}} \simeq 0.35$ 。在  $\eta$  粒子与  $\omega$  粒子量子数相同的情形下得到  $\frac{W_{\eta \rightarrow \pi + \gamma}}{W_{\eta \rightarrow 3\pi}} \simeq 25$ 。在计算中包含了三个  $\pi$  介子成对作用的效应。

## 一、引 言

不稳定粒子的衰变, 最近曾由 Gell-Mann 等讨论过<sup>[1]</sup>, 他们在应用色散关系时, 把这些粒子当作稳定粒子来处理, 并取极点近似, 这样就可以通过简单的计算, 得出一些几率的比。本文有两个目的: 第一, 通过一个具体的例子, 来表明不稳定粒子的色散关系的一些特点, 使所得到的色散关系能建立在较好的理论基础。第二, 对  $\omega$  粒子的辐射衰变  $\omega \rightarrow \pi + \gamma$  几率作出一个估计。和文献[1]相比, 我们的工作考虑了稍多一些物理因素。

如所周知, 由于不稳定粒子态不是哈密顿量的本征态, 所以它不出现在色散理论通常所用的态矢量中。本文所用的方法是 Mandelstam<sup>[2]</sup> 用来讨论反常临界的方法, 即先假设一个稳定的  $\omega$  粒子, 得出辐射衰变过程的色散关系, 然后把质量解析延拓到  $\omega$  粒子质量的物理值。

在第二节中, 我们用上述方法得到所需的色散关系, 在第三节中, 对  $\pi\pi$  相移作一些简单假设后得出  $\omega$  辐射衰变的几率, 在  $\eta$  粒子的量子数和  $\omega$  相同的情形下, 也给出了  $\eta$  辐射衰变的几率。

## 二、色 散 关 系

设  $j_\mu$  是电流密度, 在  $\omega$  粒子的质量  $\tau$  足够小的情形下, 我们可以考虑矩阵元  $\langle p_1 p_2 | j_\mu(0) | 0 \rangle$ , 其中  $p_1 p_2$  分别为  $\pi$  及  $\omega$  介子的动量。它可以写为

$$\langle p_1 p_2 \text{ out} | j_\mu(0) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{\mu} \frac{1}{\sqrt{4E_1 E_2}} (-i) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} \epsilon_\nu p_{1\lambda} p_{2\eta} e F(t), \quad (1)$$

$\epsilon_\nu$  是  $\omega$  粒子的极化矢量。同样可以引入  $\pi + \pi \rightarrow \pi + \omega$  过程的矩阵元

$$\langle p_2 | j(0) | q_1 q_2 \alpha_1 \alpha_2 \text{ in} \rangle = \frac{1}{\sqrt{8E_2 \omega_1 \omega_2}} \frac{4\pi}{(2\pi)^{9/2}} (-i) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\eta} \epsilon_\mu p_{1\nu} q_{1\lambda} q_{2\eta} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 3} M(ts), \quad (2)$$

\* 1963年3月14日收到。

$j(0)$  是  $\pi$  介子的流密度;  $q_1, q_2; \omega_1, \omega_2; a_1, a_2$  为两个始态  $\pi$  介子的动量、能量和同位旋;

$$\begin{aligned} t &= -(p_1 + p_2)^2; \\ s &= -(p_1 - q_1)^2 = 2(\mu^2 - \sqrt{(p^2 + \mu^2)(q^2 + \mu^2)} + pq \cos \theta) = \\ &= \frac{1}{2}(\tau^2 + 3\mu^2 - t) + 2pq \cos \theta. \end{aligned}$$

設  $A(t)$  为  $F(t)$  的吸收部分, 如果只考虑  $\pi\pi$  中間态, 則在质心系中由简单的計算得到

$$A(t) = \frac{q^3}{6\omega} (M_0(t) - M_2(t)) e F_\pi^*(t), \quad (3)$$

其中  $M_i(t)$  为

$$M_i(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_i(z) M(ts) dz \quad z = \cos \theta.$$

假定  $F(t)$  服从沒有“減出”的色散关系:

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{A(t') dt'}{t' - t}. \quad (4)$$

由(3),(4)可以看到,  $F(t)$  对  $\tau^2$  的解析延拓归結为  $M_i(t)$  对  $\tau^2$  的解析延拓.

在  $\tau^2$  足够小时,  $M(ts)$  服从如下的色散关系:

$$M(ts) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(M^{(1)}(xs) + M^{(1)}(x\bar{s}))}{x - t} dx + t, \quad s, \bar{s} \text{ 輪換項}. \quad (5)$$

$M^{(1)}(xs)$  在  $s < 16\mu^2$  处解析. 由(5)式容易决定  $M_i(t)$  的解析性质.  $M_i(t)$  的奇点在

$$t = (2n\mu)^2$$

及

$$s, \bar{s} = (2n\mu)^2 \quad z = \pm 1 \quad (6)$$

处. 利用关系式(6), 可以知道  $M_i(t)$  服从如下的色散关系:

$$M_i(t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{M_i^{(1)}(t')}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^a \frac{B_i(t')}{t' - t} dt', \quad (7)$$

$a$  是方程

$$\frac{1}{2}(\tau^2 + 3\mu^2 - t) \pm 2pq = 4\mu^2$$

的一个解,  $a = \frac{1}{2}(\tau^2 - \mu^2)$ . 在  $4\mu^2 < t < 16\mu^2$  的区域  $M_0(t) - M_2(t)$  的相与  $\pi\pi P$  波相移  $\delta$  一致. 令

$$D(t) = \exp \left[ -\frac{t}{\pi} \int \frac{\delta(t') dt'}{t'(t' - t)} \right],$$

就有

$$\begin{aligned} M_0(t) - M_2(t) &= \frac{t - t_0}{\pi} \frac{1}{D(t)} \int_{-\infty}^a D(t') B(t') \frac{dt'}{(t' - t)(t' - t_0)} + \\ &+ \frac{(M_0(t_0) - M_2(t_0)) D(t_0)}{D(t)} + \frac{1}{\pi} \int_{16\mu^2}^{\infty} \frac{C(t', t)}{t' - t} dt'. \end{aligned} \quad (8)$$

上式在  $\tau^2 < \mu^2$  时成立. 对于实际的  $\tau^2$ , 可以在上式中作解析延拓.  $D(t)$  是与  $m^2$

无关的。为了简单起见,暂时我们在左方割线上只考虑图 1 中的简单图形,并忽略  $C$  项。如果  $M^{(1)'}(s)$  是这个图形对  $M^{(1)}$  的贡献,则此时

$$\begin{aligned} B(t) &= - \int_{-1}^1 M^{(1)'}(s)(P_0(z) - P_2(z))dz = \\ &= - \int_{4\mu^2}^{\frac{1}{2}(\tau^2 + 9\mu^2 - t) - 2pq} M^{(1)'}(s) \frac{ds}{2pq} (P_0 - P_2). \end{aligned} \quad (9)$$

因  $M^{(1)'}(s)$  除  $s = (2n\mu)^2$  点外在  $s > 4\mu^2$  的实轴的邻域没有奇异点,所以  $B$  在  $\tau^2$  的实轴的邻域解析(除可能的运动学奇点  $pq = 0$  以外)。因此  $M_0 - M_2$  的延拓归结于 (8) 式中  $a$  的变化。当  $\tau^2 \geq 9\mu^2$  时,  $a = \frac{1}{2}(\tau^2 - \mu^2) \geq 4\mu^2$ 。但是  $D(t')$  有一割线在  $t' \geq 4\mu^2$  处。所以

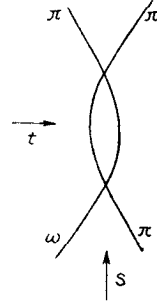


图 1

$\tau^2 = 9\mu^2$  为  $M_0(t) - M_2(t)$  的一个奇点。这恰巧是使衰变过程可以发生的质量。在  $\tau^2 > 9\mu^2$  时,必须区别  $M_0(t) - M_2(t)$  在  $\tau^2$  平面上割线上沿和下沿的值。在微扰论的振幅表示式中,内线质量有一负的无穷小虚部,这相当于外线质量有一正的无穷小虚部。此点容易由 Eden<sup>[3]</sup> 的工作看出来,因为在文献[3]中的函数  $D(st\alpha\tau^2)$  内,外线质量的系数恒与内线质量的系数反号。我们假设微扰论的这一结论在一般理论中也成立,所以在  $\tau^2 > 9\mu^2$  时, (8) 式中的  $a$  应改为  $a = \frac{1}{2}(\tau^2 - \mu^2) + i\epsilon (\epsilon > 0)$ 。对高次波  $M_i(t)$ , 可以同样讨论。由此可以看到,  $\tau^2 = 9\mu^2$  处必定有一个奇点。在左方割线只考虑 (9) 式时,  $M_0(t) - M_2(t)$  除此点外,在  $\tau^2 < m_\omega^2$  的实轴的邻域解析。这似乎是微扰论的一般结论。我们将假设  $M_i(t)$  具有这个性质。显而易见,这个假设与 (8) 式是不矛盾的。

设  $\tilde{M}_i(t)$  是固定  $t$  在  $t > 4\mu^2$  的实数值把  $\tau^2$  延拓到  $m_\omega^2$  所得到的表示式,因为在  $\tau$  增加时,奇点  $a$  的运动如图 2 所示,故有

$$\begin{aligned} \tilde{M}_0(t) - \tilde{M}_2(t) &= \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{t - t_0}{\pi} \frac{1}{D(t + i\epsilon)} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}(m_\omega^2 - \mu^2)} D(t' + i\epsilon') B(t') \frac{dt'}{(t' - t_0)(t' + i\epsilon' - t - i\epsilon)} + \\ &+ \frac{(\tilde{M}_0(t_0) - \tilde{M}_2(t_0))D(t_0)}{D(t + i\epsilon)} + \frac{1}{\pi} \int_{16\mu^2}^{\infty} \frac{C(t't)dt'}{t' - t}. \end{aligned} \quad (10)$$

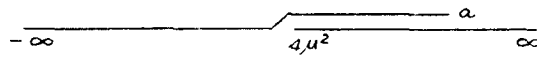


图 2

式中  $B, C$  都是  $\tau^2 = m_\omega^2 + i\epsilon, \epsilon \rightarrow 0+$  的极限值。注意 (10) 式中取极限的次序不能改变。容易看出,

$$\hat{M}_0(t) - \hat{M}_2(t) = \tilde{\tilde{M}}_0(t) - 2B(t) - \tilde{\tilde{M}}_2(t), \quad \frac{1}{2}(m_\omega^2 - \mu^2) > t > 4\mu^2. \quad (11)$$

上式右方  $\tilde{\tilde{M}}_0(t)$  表示先对  $\tau^2$  作延拓,再使  $t$  趋于实数所得的极限。

在  $\tau^2 < 9\mu^2$  时,  $M(t\tau)$  可以无含混地写成如下的形式:

$$M(ts) = \frac{1}{\mu^3} \frac{g(ts\tau^2)}{D(t)D(s)D(\bar{s})}, \quad (12)$$

$g(ts\tau^2)$  包含  $4\pi$  中间态以上的奇异. 由(12)计算  $M_0(t)$ , 先保持  $t$  为复数, 或足够大的实数, 令  $\tau \rightarrow m_\omega$ , 再令  $t$  趋于  $> 4\mu^2$  的实数. 在  $t > a$  时, 对  $t$  的极限没有什么问题. 在  $4\mu^2 < t < a$ ,  $-1 \leq z \leq 1$  时, 计算证明给  $t$  一小的正虚部, 则  $s$  和  $\bar{s}$  都有一小的负虚部, 故有

$$\tilde{M}_0(t) = \frac{1}{\mu^3} D(t+i\epsilon) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(t+i\epsilon, s-i\epsilon, m_\omega^2+i\epsilon) D^{-1}(s-i\epsilon) D^{-1}(\bar{s}-i\epsilon) dz. \quad (13)$$

对于  $m_\omega^2$  的物理值,  $a$  不会碰到  $g$  的左割线, 所以对  $g$  函数的极限没有含混之处 [为了证明当  $\tau^2$  向  $m_\omega^2$  运动时  $s$  不会穿过割线  $s > 4\mu^2$  可取  $t > (m_\omega + \mu)^2$ ]. 由(11), (13)式,

$$\tilde{M}_0(t) = \frac{1}{\mu^3} D^{-1}(t+i\epsilon) \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(t+i\epsilon, s+i\epsilon, m_\omega^2+i\epsilon) D^{-1}(s+i\epsilon) D^{-1}(\bar{s}+i\epsilon) dz. \quad (14)$$

注意上式中对  $t, s, \bar{s}$  的极限都是  $\epsilon \rightarrow 0+$ . 由此可见, 如果先固定  $m_\omega$  于物理值, 则  $\tilde{M}_0(t)$  一般不是一个对  $t$  解析的函数的边界值, 因为关系式  $s + t + \bar{s} = m_\omega^2 + 3\mu^2$  要求  $t$  和  $s, \bar{s}$  的虚部反号. [计算证明, 当  $t < \mu(m_\omega + \mu)$  时,  $s$  进入  $D(s)$  的第二叶.]

在对  $\tau^2$  作延拓后(3)式变为

$$A(t) = \frac{q^3}{6\omega} (\tilde{M}_0(t) - \tilde{M}_2(t)) eF_\pi^*(t). \quad (15)$$

$\tilde{M}_2(t)$  的公式只要在(14)式的积分中加一个因子  $P_2(z)$  就可以了. 所以  $\omega \rightarrow \pi + \gamma$  的色散关系和稳定 (在纯粹强相互作用下) 粒子的辐射衰变的色散关系有相似的形式. 所不同者, 在  $t < a$  的区域中, 吸收部分(15)一般是复数.

假使  $s$  奇异是从  $s = \mu^2$  开始的, 则情形将完全不同. 计算证明, 这时

$$a = \frac{\tau^2}{2} + \mu^2 + \frac{1}{2} \sqrt{12\mu^2 - 3\tau^2}.$$

在  $\tau^2 = 3\mu^2$  时发生反常临界, 而在  $\tau^2 = 4\mu^2$  时产生复奇点. 反常临界条件相当于图 3 中各内线的粒子都在质量壳上, 和 Landau 条件一致.  $\tau^2 = 4\mu^2$  是恰够产生衰变的质量.

因此不稳定粒子的色散关系有两种不同的行为: 或者有复奇点, 或者吸收部分变成复数.

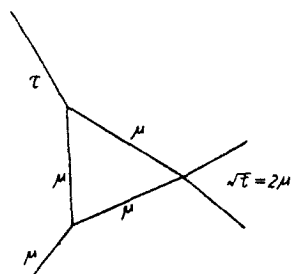


图 3

### 三、简化假设和计算

为了简化计算, 我们近似地令  $g(ts m_\omega^2) \doteq g = \text{常数}$ , 并忽略  $\pi\pi$  共振峰以外的散射. 假设

$$\delta = \begin{cases} 0 & t < t_r - a_0, \\ \pi & t > t_r + a_0, \\ \frac{\pi}{2a_0} (t - t_r + a_0) & t_r - a_0 < t < t_r + a_0. \end{cases} \quad (16)$$

$t_r$  和  $a_0$  由現有  $\pi\pi$  共振实验定出, 这时

$$D(t) = \frac{f(t)}{f(0)}, \quad f(t) = \frac{(t_r - t + a_0)^{\frac{t_r - t + a_0}{2a_0}}}{(t_r - t - a_0)^{\frac{t_r - t - a_0}{2a_0}}}. \quad (17)$$

在  $|t_r - t| \gg a_0$  时,  $D(t) \sim \frac{t_r - t}{t_r}$ ,  $F_\pi(t) = D^{-1}(t)$ . 把这些公式代入(15)式, 经过计算可以验证  $A(t)$  集中于  $t_r$  附近. 在这个范围内,  $|t_r - s| \gg a$ ,  $|t_r - \bar{s}| \gg a$ , 所以我们近似地令  $D(s) = \frac{t_r - s}{t_r}$ ,  $D(\bar{s}) = \frac{t_r - \bar{s}}{t_r}$ . 这样得到

$$A(t) = \frac{eg}{4} \frac{q^3}{\mu^2 \omega} \left| \frac{f(0)}{f(t)} \right|^2 \left[ \frac{t_r}{t_r - \frac{1}{2}(m_\omega^2 + 3\mu^2 - t)} \right]^2 y \left[ \frac{1}{2} (1 - y^2) \ln \frac{y+1}{y-1} + y \right], \quad (18)$$

其中

$$y = \frac{t_r - \frac{1}{2}(m_\omega^2 + 3\mu^2 - t)}{2pq}.$$

在我们的近似下,  $D(t)$  的奇点被从  $4\mu^2$  移到  $t_r - a_0 > a$ , 所以  $A(t)$  是实数. 假使  $a_0$  的值大到使得  $t_r - a_0 < a$ , 则  $A(t)$  就会显出它应有的解析性质. 一般说来,  $A(t)$  在  $t < a$  的区域是复数.  $A(t)$  的物理叶应如此选取: 选取多值函数的一支使  $\tau^2$  足够小时  $A(t)$  是实数, 然后把  $\tau^2$  由上半平面延拓到  $m_\omega^2$ .

把  $A(t)$  代入色散关系(4)中, 并把缓变函数用其在  $t = t_r$  处的值代替, 就得到

$$F(0) = \frac{1.8}{\pi} \frac{1}{at_r} A(t_r) |f(t_r)|^2. \quad (19)$$

$\omega \rightarrow \pi + \gamma$  过程的几率为

$$W_{\pi\gamma} = \frac{a}{3} \left( \frac{m_\omega^2 - \mu^2}{2m_\omega\mu} \right)^3 \mu |F(0)|^2. \quad (20)$$

$A$  中包含的常数  $g$  可以由  $\omega \rightarrow 3\pi$  过程的几率决定. 将振幅  $\tilde{M}(ts)$  代入相空间积分中, 并近似地把  $\tilde{M}(ts)$  以其在  $s = t = \bar{s} = \frac{1}{3}(m_\omega^2 + 3\mu^2)$  点的值代替, 得到  $\omega \rightarrow 3\pi$  过程的几率为

$$W_{3\pi} = \frac{g^2}{12\pi} m_\omega \left[ \frac{t_r}{t_r - \frac{1}{3}(m_\omega^2 + 3\mu^2)} \right]^6 J(m_\omega^2). \quad (21)$$

数值积分结果  $J = 3.5$ . 由(19)–(21)并用实验值  $t_r = 28.5\mu^2$ ,  $a = 7.4\mu^2$  (相当的  $\pi\pi$  共振宽度为 100 MeV), 得到

$$\frac{W_{\pi\gamma}}{W_{3\pi}} = 1.4. \quad (22)$$

这个数值与我们对共振峰内相移的具体假设有关. 通常用的 Breit-Wigner 公式

$$D(t) = \frac{t_r + \frac{\gamma}{2}}{t_r - t - \frac{i}{2}\gamma q^2} \quad (23)$$

有复奇点。我們用假設(16)是想使  $A(t)$  应有的解析性質更清楚一些,对于数值計算,可能(23)是更好的近似。如用(23)式,用相似的計算得到

$$\frac{W_{\pi\gamma}}{W_{3\pi}} = 0.35. \quad (24)$$

如果  $\eta$  粒子和  $\omega$  粒子有相同的量子数,用(23)的  $D(t)$  公式时,得到

$$\frac{W_{\eta \rightarrow \pi + \gamma}}{W_{\eta \rightarrow 3\pi}} = 25. \quad (25)$$

恰与文献[4]中由不同观点所作的估計相符合。

### 参 考 文 献

- [1] Gell-Mann, G., Sharp, D. and Wagner, W. G., *Phys. Rev. Lett.*, **8** (1962), 261.
- [2] Mandelstam, S., *Phys. Rev. Lett.*, **4** (1960), 84.
- [3] Eden, R. J., *Proceedings of the 1960 Annual International Conference on High Energy Physics*, 230.
- [4] Kobzarev, I. Y., Okun, L. B., *ЖЭТФ*, **43** (1962), 1288.

## THE RADIATIVE DECAY OF AN $\omega$ PARTICLE

DAI YUAN-BEN

(Academia Sinica)

### ABSTRACT

A dispersion relation for the process  $\omega \rightarrow \pi + \gamma$  is obtained by the analytical continuation in the  $\omega$  mass. Some problems concerning dispersion relations involving unstable particles are discussed. Under simplified assumptions we obtain  $\frac{W_{\omega \rightarrow \pi + \gamma}}{W_{\omega \rightarrow 3\pi}} \approx 0.35$  and  $\frac{W_{\eta \rightarrow \pi + \gamma}}{W_{\eta \rightarrow 3\pi}} \approx 25$ , if  $\eta$  has the same quantum numbers as  $\omega$ . The effect of the interaction in pairs between three pions is included in the calculation.