

处理偏心圆柱形气缝导热的 一个微扰方法*

武 宇

提 要

本文讨论固体导热问题中偏心圆柱形气缝所引起的影响。我们利用二维拉普拉斯方程线性迭加解与复变函数的级数展开之间有对应关系,把热传导方程连同边界条件的定解问题变化成线性代数的一个本征值问题,它的本征值表示气缝内外界面沿圆周方向平均温度的差值,它的本征矢量则表达气缝内外界面上温度的角分布。由于气体导热系数比固体导热系数小很多,所以用微扰方法容易把本征值算到一级近似,零级近似的本征矢量可以从等温圆柱形界面气缝导热问题的熟知的保角变换解得到。这样便简单地给出偏心对气缝内外界面沿圆周方向平均温度的差值的影响。如果气缝的偏心是随机的,结果如何统计处理,在本文末节也讨论到。

一、温度分布的形式

考虑二维热传导的定态问题,在气体或固体中满足拉普拉斯方程或泊松方程:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} \right) = 0, \quad (1)$$

$$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + W = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{r^2 \partial \theta^2} \right) + W = 0, \quad (2)$$

其中 k 或 K 表示气体或固体的导热系数,在固体中每单位体积发热功率设为常数 W 。

适应圆柱形界面,温度分布可以用下列分离变数解 ($p = 1, 2, \dots, \infty$):

$$1, \ln r; r^p \cos p\theta, r^p \sin p\theta, r^{-p} \cos p\theta, r^{-p} \sin p\theta. \quad (3)$$

乘以待定常数的线性迭加表达,(2)式的解则多一项 $-(W/4K)r^2$,这特解项不乘待定系数。在两界面 C_0, C_1 间气缝中温度分布,我们可以利用复数 $z = x + iy$ 写法如下表达:

$$T_{10} = t_1 + \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k} \Re \left[\ln \frac{z - z_1}{R_1} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{R_1}{z - z_1} \right)^p \xi_1(p) + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_1}{R_1} \right)^p \eta_1(p) \right], \quad (4)$$

$$T_{10} = t_0 + \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k} \Re \left[\ln \frac{z - z_0}{R_0} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{R_0}{z - z_0} \right)^p \xi_0(p) + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{R_0} \right)^p \eta_0(p) \right]. \quad (5)$$

* 1963年3月16日收到。

这里 t_1, t_0, Γ_{10} 为实数的待定系数; $\xi_i(p)$ 和 $\eta_i(p)$ ($p = 1, 2, \dots, \infty; i = 0, 1$) 为复数的待定系数, 界面 C_i 的半径 R_i 和其圆心位置 (x_i, y_i) 的复数表示 $z_i = x_i + iy_i$ 则已给定. 符号上加一横表示复数的共轭. 写成(4), (5)形式, 物理意义比较明显. t_i 表示 C_i 界面沿圆周平均温度, Γ_{10} 表示通过界面 C_0 或 C_1 (均取单位柱高) 的总热流, 因为两者相等, 所以我们用同一符号表示. $\xi_i(p), \eta_i(p)$ 则与 C_i 界面气缝侧温度和热流的角分布有关, 将角分布对角度作复数的傅氏级数分解, 则

$$\frac{\Gamma_{10}}{2\pi k} [\xi_i(p) + \eta_i(p)] \quad \text{和} \quad \frac{\Gamma_{10}}{2\pi} [\xi_i(p) - \eta_i(p)] \quad (6)$$

即是温度和热流的角分布系数. 比较(4), (5), 得到两种展开其系数间的关系如下:

$$t_1 = t_0 + \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k} \ln \frac{R_1}{R_0} + \Re \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k} \left(\frac{z_1 - z_0}{R_0} \right)^p \eta_0(p) \right], \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \xi_1(p) = & \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^p \left[\xi_0(p) - (p-1) \left(\frac{z_1 - \bar{z}_0}{R_0} \right) \xi_0(p-1) + \right. \\ & + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{R_0} \right)^2 \xi_0(p-2) \cdots + \\ & \left. + (-)^{p-1} \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{R_0} \right)^{p-1} \xi_0(1) + (-)^{p-1} \frac{1}{p} \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{R_0} \right)^p \right], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \eta_1(p) = & \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^p \left[\eta_0(p) + (p+1) \left(\frac{z_1 - z_0}{R_0} \right) \eta_0(p+1) + \right. \\ & \left. + \frac{(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2} \left(\frac{z_1 - z_0}{R_0} \right)^2 \eta_0(p+2) + \cdots \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

这系数间的关系式便替代了偏心气缝中的热传导方程. 为以后运用便利, 我们将 (7), (8), (9) 缩写为矩阵方程 (ξ, η, a 为列矢量, b^+ 为行矢量, A, B 为矩阵):

$$t_1 - t_0 = \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k} \ln \frac{R_1}{R_0} + \Re [b_{10}^+ \eta_0], \quad (7')$$

$$\xi_1 = A_{10} \xi_0 + a_{10}, \quad (8')$$

$$\eta_1 = B_{10} \eta_0. \quad (9')$$

矩阵的 p 行 q 列元为 (当 $n = -1, -2, \dots$ 时 $n!$ 定义为 ∞)

$$b_{10}^+(q) = \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k} \left(\frac{z_1 - z_0}{R_0} \right)^q, \quad (10)$$

$$A_{10}(p, q) = (-)^{p-q} \frac{(p-1)!}{(p-q)!(q-1)!} \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{R_0} \right)^{p-q} \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^p, \quad (11)$$

$$B_{10}(p, q) = \frac{q!}{(q-p)!p!} \left(\frac{z_1 - z_0}{R_0} \right)^{q-p} \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^p, \quad (12)$$

$$a_{10}(p) = (-)^{p-1} \frac{1}{p} \left(\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{R_0} \right)^p \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^p. \quad (13)$$

同样, 在两界面 C_3, C_4 间固体中温度分布为 ($i = 3, 4$)

$$T_{43} = -\frac{W}{4K} [|z - z_j|^2 - R_j^2] + t_j + \frac{\Gamma_{43}}{2\pi K} \mathcal{R} \left[\ln \frac{z - z_j}{R_j} + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{R_j}{z - z_j} \right)^p \mathcal{E}_j(p) + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{z - z_j}{R_j} \right)^p H_j(p) \right]. \quad (14)$$

由于界面上温度連續, 我們不必区别 C_j 界面气缝側或固体側的平均温度而仍用 t_j 表示. 通过 C_j 界面固体側的总热流則包含特解項貢獻:

$$\left[\int_0^{2\pi} \left(K \frac{\partial T}{\partial r} \right) r d\theta \right]_{C_j} = \Gamma_{43} - \pi R_j^2 W \quad (j = 3, 4). \quad (15)$$

在本文中我們將只考虑固体内外界面同心的情况. 比較(14), 取 $j = 3$ 和 $j = 4$, 而令 $z_3 = z_4$, 得

$$t_4 - t_3 = \frac{\Gamma_{43}}{2\pi K} \ln \frac{R_4}{R_3} - \frac{W}{4K} (R_4^2 - R_3^2), \quad (16)$$

$$\mathcal{E}_4(p) = \left(\frac{R_3}{R_4} \right)^p \mathcal{E}_3(p), \quad H_4(p) = \left(\frac{R_4}{R_3} \right)^p H_3(p). \quad (17)$$

这些系数間的关系式便代替了同心的固体环中的热传导方程.

二、定解問題化为本征值問題形式

我們举例說明如何做. 考虑界面 C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 , 次序由內向外, 在 C_0C_1 間和 C_2C_3 間为气缝, 在 C_1C_2 間和 C_3C_4 間为固体. 固体内外界面同心. 气缝的偏心情况給定. 最內界面 C_0 为等温界面, 最外界面 C_4 为絕热界面.

上节所有关于 C_0C_1 气缝中温度分布 T_{10} 的系数关系式同样适用于 C_2C_3 气缝, 所有关于 C_3C_4 間固体中温度分布 T_{43} 的系数关系式也同样适用于 C_1C_2 間固体. 以后引用公式并改換其附标时将在括号下注明附标如何改換.

总热流連續的边界条件决定所有的 Γ : 从 C_4 界面为絕热界面, $(15)_{j=4}$ 左方为零得

$$\Gamma_{43} = \pi R_4^2 W. \quad (18)$$

在 C_3 界面上使固体側的总热流 $(15)_{j=3}$ 和气缝側的总热流 Γ_{32} 相等, 得

$$\Gamma_{32} = \pi (R_4^2 - R_3^2) W. \quad (19)$$

在 C_2 界面上固体側的总热流 $(15)_{43 \rightarrow 21}$ 与气缝側的总热流 Γ_{32} 相等定出

$$\Gamma_{21} = \pi (R_4^2 - R_3^2 + R_2^2) W, \quad (20)$$

而 C_1 界面兩側总热流相等定出

$$\Gamma_{10} = \pi (R_4^2 - R_3^2 + R_2^2 - R_1^2) W. \quad (21)$$

在絕热界面 C_4 上, 热流的角分布部分也是零, 参考(14)和(6)得

$$\Gamma_{43} [\mathcal{E}_4(p) - H_4(p)] = 0. \quad (22)$$

这边界条件, 連同(17)两个关系和 C_3 界面上的两个連續条件, 参考(6), 即

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{32}}{k_{32}} [\xi_3(p) + \eta_3(p)] &= \frac{\Gamma_{43}}{K_{43}} [\mathcal{E}_3(p) + H_3(p)], \\ \Gamma_{32} [\xi_3(p) - \eta_3(p)] &= \Gamma_{43} [\mathcal{E}_3(p) - H_3(p)]. \end{aligned} \quad (23)$$

可以消去 $\mathcal{E}_j(p), H_j(p)$ ($j = 3$ 和 4), 而得

$$[\xi_3(p) + \eta_3(p)] - \frac{k_{32}}{K_{43}} \cdot \frac{(R_4/R_3)^p + (R_3/R_4)^p}{(R_4/R_3)^p - (R_3/R_4)^p} [\xi_3(p) - \eta_3(p)] = 0. \quad (24)$$

这给出外气缝外界面的边界条件。同样，从 C_1 界面的两个连续条件 $(23)_{4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 0}$ ，和 $C_1 C_2$ 界面间系数两关系 $(17)_{4 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1}$ ，以及 C_2 界面的两个连续条件 $(23)_{4 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3}$ ，可以消去 $\xi_j(p)$, $H_j(p)$ ($j = 1$ 和 2) 而得两个关系如下：

$$[\xi_2(p) + \eta_2(p)] + \frac{k_{32}}{K_{21}} \frac{(R_2/R_1)^p + (R_1/R_2)^p}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} [\xi_2(p) - \eta_2(p)] - \frac{k_{32}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{32}} \frac{2}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} [\xi_1(p) - \eta_1(p)] = 0, \quad (25)$$

$$[\xi_1(p) + \eta_1(p)] - \frac{k_{10}}{K_{21}} \frac{(R_2/R_1)^p + (R_1/R_2)^p}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} [\xi_1(p) - \eta_1(p)] + \frac{k_{10}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{10}} \frac{2}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} [\xi_2(p) - \eta_2(p)] = 0. \quad (26)$$

这给出外气缝内界面和内气缝外界面的两个连续条件。内气缝内界面 C_0 为等温界面，所以参考 $(6)_{i=0}$ 有边界条件

$$\frac{\Gamma_{10}}{k_{10}} [\xi_0(p) + \eta_0(p)] = 0, \quad (27)$$

引入矩阵 α, β (δ_{pq} 表示只有对角线元)：

$$\alpha_{21}(p, q) = \frac{(R_2/R_1)^p + (R_1/R_2)^p}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \delta_{p,q}, \quad (28)$$

$$\beta_{21}(p, q) = \frac{2}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \delta_{p,q}.$$

两气缝的边界条件(27), (26), (25), (24)缩写为

$$\xi_0 + \eta_0 = 0, \quad (27')$$

$$\left(1 - \frac{k_{10}}{K_{21}} \alpha_{21}\right) \xi_1 + \left(1 + \frac{k_{10}}{K_{21}} \alpha_{21}\right) \eta_1 + \frac{k_{10}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{10}} \beta_{21} (\xi_2 - \eta_2) = 0, \quad (26')$$

$$\left(1 + \frac{k_{32}}{K_{21}} \alpha_{21}\right) \xi_2 + \left(1 - \frac{k_{32}}{K_{21}} \alpha_{21}\right) \eta_2 - \frac{k_{32}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{32}} \beta_{21} (\xi_1 - \eta_1) = 0, \quad (25')$$

$$\left(1 - \frac{k_{32}}{K_{43}} \alpha_{43}\right) \xi_3 + \left(1 + \frac{k_{32}}{K_{43}} \alpha_{43}\right) \eta_3 = 0. \quad (24')$$

连同 $(8')$, $(9')$ 和 $(8')_{1 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 2}$, $(9')_{1 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 2}$ ，我们共有包括八个变数 ξ_j, η_j ($j = 0, 1, 2, 3$) 的八个非齐次方程。解出特别是 η_0 和 η_2 再代入 $(7')$ 和 $(7')_{1 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 2}$ ，便算出 $t_1 - t_0$ 和 $t_3 - t_2$ 。但这个代数问题可化为本征值问题如下。

我们故意把“1”看做一个“变数”，同时增加一个方程(这方程实即 λ 的定义)

$$\lambda = b_{10}^+ \eta_0 + b_{32}^+ \eta_2. \quad (29)$$

引入包括 1, $\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \xi_3, \eta_3$ 的列矢量 ψ ，和只有第一行第一列为 1 (其他元都为 0) 的矩阵 e_{11} ，我们把 (29) , $(27')$, $(8')$, $(9')$, $(26')$, $(25')$, $(8')_{1 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 2}$, $(9')_{1 \rightarrow 3, 0 \rightarrow 2}$, $(24')$ 合写为齐次方程，即形成本征值问题如下：

$$L\psi - \lambda e_{1,1}\psi = 0, \quad (30)$$

即

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & b_{10}^+ & 0 & 0 & 0 & b_{32}^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & A_{10} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{10} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{k_{10}}{K_{21}} \alpha_{21} & 1 + \frac{k_{10}}{K_{21}} \alpha_{21} & \frac{k_{10}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{10}} \beta_{21} & -\frac{k_{10}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{10}} \beta_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{32}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{32}} \beta_{21} & -\frac{k_{32}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{32}} \beta_{21} & 1 + \frac{k_{32}}{K_{21}} \alpha_{21} & 1 - \frac{k_{32}}{K_{21}} \alpha_{21} & 0 & 0 & 0 \\ a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{32} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{32} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{k_{32}}{K_{43}} \alpha_{43} & 1 + \frac{k_{32}}{K_{43}} \alpha_{43} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_0 \\ \eta_0 \\ \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \\ \xi_3 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (30')$$

三、微 扰 解

在(30')中出现了气体导热系数 k 与固体导热系数 K 的比值。把这看作一级无穷小量而展开

$$L = L^0 + L^1, \quad \lambda = \lambda^0 + \lambda^1, \quad \psi = \psi^0 + \psi^1. \quad (31)$$

得(30)的零级和一级方程

$$L^0 \psi^0 - \lambda^0 e_{1,1} \psi^0 = 0, \quad (32)$$

$$L^1 \psi^0 - \lambda^1 e_{1,1} \psi^0 + L^0 \psi^1 - \lambda^0 e_{1,1} \psi^1 = 0. \quad (33)$$

零级方程的有解条件决定了零级本征值 λ^0 , 使得 $L^0 - \lambda^0 e_{1,1}$ 的行列式恰好等于零, 因此(32)的共轭方程也有解 $\psi^+ = [1; \xi_0^+ \eta_0^+ \xi_1^+ \eta_1^+; \xi_2^+ \eta_2^+ \xi_3^+ \eta_3^+]$,

$$\psi^+ L^0 - \psi^+ \lambda^0 e_{1,1} = 0. \quad (32^+)$$

将一级微扰方程从左乘以 ψ^+ , 便得到了(33)的有解条件, 这条件即决定了本征值的一级微扰:

$$\psi^+ L^1 \psi^0 - \lambda^1 \psi^+ e_{1,1} \psi^0 = 0, \quad \text{即} \quad \lambda^1 = \psi^+ L^1 \psi^0, \quad (34)$$

或引入 ψ^0 及 ψ^+ 的各个 ξ_j^0, η_j^0 及 $\xi_j^+, \eta_j^+ (j=0, 1, 2, 3)$,

$$\begin{aligned} \lambda^1 = & 2 \frac{k_{10}}{K_{21}} \eta_1^+ \alpha_{21} \eta_1^0 + 2 \frac{k_{32}}{K_{21}} \xi_2^+ \alpha_{21} \xi_2^0 + 2 \frac{k_{32}}{K_{43}} \eta_3^+ \alpha_{43} \eta_3^0 + \\ & + 2 \frac{k_{10}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{32}}{\Gamma_{10}} \eta_1^+ \beta_{21} \xi_2^0 + 2 \frac{k_{32}}{K_{21}} \frac{\Gamma_{10}}{\Gamma_{32}} \xi_2^+ \beta_{21} \eta_1^0. \end{aligned} \quad (34')$$

如果我们只对气缝平均温度的总的差别发生兴趣, 我们不必去解(33)而求 ψ^1 , 这便减少了很多计算。从(7'), (7')_{1→3, 0→2}得到一级微扰近似,

$$t_1 - t_0 + t_3 - t_2 = \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} \ln \frac{R_1}{R_0} + \frac{\Gamma_{32}}{2\pi k_{32}} \ln \frac{R_3}{R_2} + \mathcal{O}[\lambda^0 + \lambda^1]. \quad (35)$$

如果固体导热系数比气体导热系数无穷大, 则所有气缝界面都近似为等温界面, 这时各个气缝可以独立处理。最方便是引入界面 C_0 和 C_1 两圆的等幕心 $z = c_{10}$ (在两圆内

部)和 $z = -c_{10}$ (在两圆外部)而把圆 C_i 写作

$$C_i: \left| \frac{z - c_{10}}{z + c_{10}} \right| = \rho_i \quad (j = 0, 1). \quad (36)$$

与用圆心 z_i 和半径 R_i 把圆 C_i 写作

$$C_i: |z - z_i| = R_i \quad (j = 0, 1) \quad (36')$$

比较便得到

$$z_i = c_{10} \frac{1 + \rho_i^2}{1 - \rho_i^2}, \quad R_i = |c_{10}| \frac{2\rho_i}{1 - \rho_i^2} \quad (j = 0, 1), \quad (37)$$

所以

$$\frac{c_{10}}{|c_{10}|} = \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|} \equiv e^{i\gamma_{10}}, \quad (38)$$

$$|z_1 - z_0| = \rho_1 R_1 - \rho_0 R_0 = \frac{R_1}{\rho_1} - \frac{R_0}{\rho_0}. \quad (39)$$

根据保角变换,如已熟知,在等温界面 $C_0 C_1$ 间温度分布 T_{10}^0 为

$$T_{10}^0 = \mathcal{R} \left[\frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} \ln \left(\frac{z - c_{10}}{z + c_{10}} \right) \right]. \quad (40)$$

这里的分子和分母,利用(37),(38),可以写作

$$\begin{aligned} z - c_{10} &= z - z_i + \rho_i R_i e^{i\gamma_{10}}, \\ z + c_{10} &= z - z_j + \frac{R_j}{\rho_j} e^{i\gamma_{10}}. \end{aligned} \quad (j = 0, 1). \quad (41)$$

所以,令 $\rho_j < \left| \frac{z - z_j}{R_j} \right| < \frac{1}{\rho_j}$,而把(40)展为(4)或(5)级数而比较系数,我们得到

$$-\xi_j^0(p) = \eta_j^0(p) = \frac{(-)^p}{p} \rho_j^p e^{-ip\gamma_{10}} \quad (j = 0, 1), \quad (42)$$

$$t_j^0 = \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} \ln \rho_j \quad (j = 0, 1). \quad (43)$$

只消利用二项式定理和(38),(39)关系,容易验证

$$\begin{bmatrix} -\lambda_{10}^0 & 0 & b_{10}^+ & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_{10} & A_{10} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & B_{10} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_0^0 \\ \eta_0^0 \\ \xi_1^0 \\ \eta_1^0 \end{bmatrix} = 0. \quad (44)$$

其中

$$\lambda_{10}^0 = b_{10}^+ \eta_0^0 = -\frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} \ln \left\{ 1 + \frac{\rho_0}{R_0} |z_1 - z_0| \right\} = -\frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} \ln \frac{\rho_1 R_0}{\rho_0 R_1}. \quad (45)$$

利用(39),这式可以另一种展开

$$\lambda_{10}^0 = \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} \ln \left\{ 1 - \frac{\rho_1}{R_1} |z_1 - z_0| \right\} \equiv \eta_0^+ a_{10}. \quad (46)$$

这样便帮助我们解(44)的共轭方程

$$[1 \quad \overset{0}{\xi}_0^+ \quad \overset{0}{\eta}_0^+ \quad \overset{0}{\xi}_1^+ \quad \overset{0}{\eta}_1^+] \begin{bmatrix} -\overset{0}{\lambda}_{10} & 0 & b_{10}^+ & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_{10} & A_{10} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & B_{10} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0. \quad (44^+)$$

同样用二项式定理和(38)、(39), 容易验证解为

$$\begin{aligned} \overset{0}{\xi}_0^+(q) &= \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} (-)^{q-1} \rho_0^q e^{iq\gamma_{10}}, \\ \overset{0}{\eta}_0^+(q) &= \overset{0}{\xi}_1^+(q) = \overset{0}{\eta}_1^+(q) = \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} (-)^q \rho_1^q e^{iq\gamma_{10}}. \end{aligned} \quad (47)$$

两个等温气缝的本征值问题(32)或(32⁺), 其本征矢量由(42)及(42)_{0→2, 1→3} 或(47)及(47)_{0→2, 1→3} 和 1 组成, 其本征值 $\overset{0}{\lambda}$ 为(45)及(45)_{0→2, 1→3} 之和:

$$\overset{0}{\lambda} = \overset{0}{\lambda}_{10} + \overset{0}{\lambda}_{32}. \quad (48)$$

把(42)、(47)和(45)代到(34')和(35), 我们得到最后结果

$$\begin{aligned} \overset{1}{\lambda} &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(R_2/R_1)^p + (R_1/R_3)^p}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \left[\frac{\Gamma_{10}}{\pi K_{21}} \left(\frac{\rho_1^{2p}}{p} \right) + \frac{\Gamma_{32}}{\pi K_{21}} \left(\frac{\rho_2^{2p}}{p} \right) \right] + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(R_4/R_3)^p + (R_3/R_4)^p}{(R_4/R_3)^p - (R_3/R_4)^p} \cdot \frac{\Gamma_{32}}{\pi K_{43}} \left(\frac{\rho_3^{2p}}{p} \right) - \\ &- \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \cdot \frac{\Gamma_{32} e^{ip(\gamma_{10} - \gamma_{32})} + \Gamma_{10} e^{-ip(\gamma_{10} - \gamma_{32})}}{\pi K_{21}} \left(\frac{\rho_1^p \rho_2^p}{p} \right), \quad (49) \end{aligned}$$

$$t_1 - t_0 + t_3 - t_2 = \frac{\Gamma_{10}}{2\pi k_{10}} \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\Gamma_{32}}{2\pi k_{32}} \ln \frac{\rho_3}{\rho_2} + \mathcal{R}(\overset{1}{\lambda}). \quad (50)$$

这里第一、二两项分别给出等温气缝的平均温差, 最后一项则给出由于固体导热系数的有限所产生的对两气缝温差的和的改正。

四、气缝偏心的统计

独立的两气缝, 其偏心的几率分布为

$$\frac{d(x_1 - x_0)d(y_1 - y_0)}{\pi(R_1 - R_0)^2} \cdot \frac{d(x_3 - x_2)d(y_3 - y_2)}{\pi(R_3 - R_2)^2} = d\zeta_{10} \cdot \frac{d\gamma_{10}}{2\pi} \cdot d\zeta_{32} \cdot \frac{d\gamma_{32}}{2\pi}, \quad (51)$$

即

$$\zeta_{10} \equiv 1 - \frac{|z_1 - z_0|^2}{(R_1 - R_0)^2}, \quad \zeta_{32} \equiv 1 - \frac{|z_3 - z_2|^2}{(R_3 - R_2)^2}. \quad (52)$$

在 0 与 1 之间均匀分布, γ_{10} , γ_{32} 在 0 至 2π 之间均匀分布。如两气缝偏心有相关, 其几率分布尚须在(51)式中增加一相关因子

$$C = 1 + \sum_{p=1}^n C_p(\zeta_{10}, \zeta_{32}) \cos p(\gamma_{10} - \gamma_{32}) + \sum_{p=1}^n S_p(\zeta_{10}, \zeta_{32}) \sin p(\gamma_{10} - \gamma_{32}). \quad (53)$$

在上节结果(50), (49)的统计处理时, (49)的最后一项只在气缝偏心有相关时才有贡献; 其他各项只与一个气缝的偏心程度有关, 统计处理只消对 ζ_{10} 或 ζ_{32} 分别积分便得. 我们用尖括弧表示经过统计处理后的期待值(根据(51)).

从(52)和(39)得

$$(R_1 - R_0)^2(1 - \zeta_{10}) = |z_1 - z_0|^2 = R_1^2 + R_0^2 - R_1 R_0 \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} + \frac{\rho_0}{\rho_1} \right). \quad (54)$$

所以

$$\begin{aligned} \left\langle \ln \frac{\rho_1}{\rho_0} \right\rangle &= \int_0^1 d\zeta_{10} \cosh^{-1} \left\{ \frac{2R_1 R_0 + (R_1 - R_0)^2 \zeta_{10}}{2R_1 R_0} \right\} = \\ &= \frac{R_1^2 + R_0^2}{(R_1 - R_0)^2} \ln \frac{R_1}{R_0} - \frac{R_1 + R_0}{R_1 - R_0} \frac{4}{3} \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} + \frac{8}{15} \left(\frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} \right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (55)$$

计算改正项(49)时, 举第一项为例. 展开

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(R_2/R_1)^p + (R_1/R_2)^p}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \frac{\rho_1^{2p}}{p} &= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\rho_1^{2p}}{p} \left\{ 1 + 2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{2p} + 2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{4p} + \dots \right\} = \\ &= \ln \frac{1}{1 - \rho_1^2} + 2 \ln \frac{1}{1 - \rho_1^2 R_1^2 / R_2^2} + 2 \ln \frac{1}{1 - \rho_1^2 R_1^4 / R_2^4} + \dots, \end{aligned} \quad (56)$$

从(39)和(52)得到 ρ_1^2 与 ζ_{10} 的关系:

$$\rho_1^2 + \frac{1}{\rho_1^2} = \frac{(R_1 + R_0)^2 - 2R_0^2(1 - \zeta_{10}) + (R_1 - R_0)^2(1 - \zeta_{10})^2}{R_1^2(1 - \zeta_{10})}. \quad (57)$$

因为气缝总是很窄, $R_1 - R_0 \ll R_1 + R_0$, 解(57)得

$$\zeta_{10} \doteq \left(\frac{1 - \rho_1^2}{1 + \rho_1^2} \right)^2 + \frac{8\rho_1^2(1 - \rho_1^2)^2}{(1 + \rho_1^2)^4} \left(\frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} \right) + \dots, \quad (58)$$

所以

$$\begin{aligned} \left\langle \ln \frac{1}{1 - Q\rho_1^2} \right\rangle &= \int_0^1 \frac{\zeta_{10} Q}{1 - Q\rho_1^2} d(\rho_1^2) \equiv F(Q) + G(Q) \left(\frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} \right) = \\ &= \frac{2Q}{1 + Q} - \frac{4Q}{(1 + Q)^2} \ln 2 + \left(\frac{1 - Q}{1 + Q} \right)^2 \ln \frac{1}{1 - Q} + \left[\frac{4}{3} \frac{Q(2 - Q)}{(1 + Q)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{8Q(1 - Q)}{(1 + Q)^3} + \frac{8Q(1 - Q)^2}{(1 + Q)^4} \ln \frac{2}{1 - Q} \right] \left(\frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} \right) + \dots \quad (Q \leq 1). \end{aligned} \quad (59)$$

当固体环厚时, $R_1^2/R_2^2 \ll 1$, 从(56)得近似

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(R_2/R_1)^p + (R_1/R_2)^p}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \left\langle \frac{\rho_1^{2p}}{p} \right\rangle \doteq \left\langle \ln \frac{1}{1 - \rho_1^2} \right\rangle + 2 \frac{R_1^2}{R_2^2} \langle \rho_1^2 \rangle. \quad (60)$$

在(59)中 $Q = 1$, 给 $F(1) = 1 - \ln 2 = 0.307$, $G(1) = \frac{1}{3} = 0.333$, 当固体环薄时,

$(R_2 - R_1)^2/(R_2 + R_1)^2 \ll 1$, 可以不用(56)而改用渐近展开

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(R_2/R_1)^p + (R_1/R_2)^p}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \left\langle \frac{\rho_1^{2p}}{p} \right\rangle &\doteq \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \sum_{p=1}^{\infty} \left\langle \frac{\rho_1^{2p}}{2p^2} \right\rangle + \\ &+ \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \sum_{p=1}^{\infty} \left\langle \frac{4p^2 - 1}{6p^2} \rho_1^{2p} \right\rangle + \dots. \end{aligned} \quad (61)$$

把(59)两侧各展开为 Q 的幂级数, 使得

$$\left\langle \frac{1}{p} \rho_1^{2p} \right\rangle = F_p + \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} G_p. \quad (62)$$

p	F_p	G_p
1	$3 - 4 \ln 2 = 0.2274$	$8 \ln 2 - \frac{16}{3} = 0.2118$
2	$8 \ln 2 - \frac{11}{2} = 0.0452$	$\frac{100}{3} - 48 \ln 2 = 0.0623$
3	$\frac{25}{3} - 12 \ln 2 = 0.0156$	$152 \ln 2 - \frac{316}{3} = 0.0250$
4	$16 \ln 2 - \frac{133}{12} = 0.0070$	$244 - 352 \ln 2 = 0.0122$
5	$\frac{208}{15} - 20 \ln 2 = 0.0037$	$680 \ln 2 - \frac{1414}{3} = 0.0068$

所以有

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left\langle \frac{\rho_1^{2p}}{2p^2} \right\rangle = 0.129 + 0.128 \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}, \quad (63)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{4p^2 - 1}{6p^2} \left\langle \rho_1^{2p} \right\rangle = \frac{2}{3} \left\langle \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \right\rangle - \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{\infty} \left\langle \frac{\rho_1^{2p}}{2p^2} \right\rangle = 0.290 + 0.401 \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}. \quad (64)$$

注意这里用了

$$\left\langle \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \right\rangle = \int_0^1 \zeta_{10} \frac{d(\rho_1^2)}{1 - \rho_1^2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0}. \quad (65)$$

又如果在(59)右侧, 或者在(63)和(64)右侧, 将 R_1 与 R_0 对调, 我们便得到在左侧中将 ρ_1 与 ρ_0 对调的结果。这是因为从(39)和(52)推出的 ρ_0^2 与 ζ_{10} 的关系可以从(57)式将两侧如上调换附标得到。设 $C_1 C_2$ 间固体环薄, $C_3 C_4$ 间固体环厚, 则得改正项(49)之统计平均为

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \rangle &= \frac{\Gamma_{10}}{\pi K_{21}} \left[\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \left(0.129 + 0.128 \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} \right) + \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \left(0.290 + 0.401 \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} \right) \right] + \\ &+ \frac{\Gamma_{32}}{\pi K_{21}} \left[\frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1} \left(0.129 - 0.128 \frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right) + \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \left(0.290 - 0.401 \frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right) \right] + \\ &+ \frac{\Gamma_{32}}{\pi K_{43}} \left[\left(0.307 + 0.333 \frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right) + \left(\frac{R_3}{R_4} \right)^2 \left(0.455 + 0.424 \frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right) \right]. \quad (66) \end{aligned}$$

如果两气缝偏心有相关, 如(53), 则(66)右侧尚须增添[实数部分 $\Re(\lambda)$ 所需]如下项:

$$- \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(R_2/R_1)^p - (R_1/R_2)^p} \cdot \frac{\Gamma_{32} + \Gamma_{10}}{\pi K_{21}} \cdot \frac{1}{p} \langle \rho_1^p \rho_2^p C_p(\zeta_{10}, \zeta_{32}) \rangle. \quad (67)$$

具体计算根据 C_p 进行。譬如只有 C_1 等于常数而 $C_p (p > 1)$ 皆等于零的情况, 上项即简化为

$$- \frac{R_1 R_2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{\Gamma_{32} + \Gamma_{10}}{\pi K_{21}} \left(0.429 + 0.292 \frac{R_1 - R_0}{R_1 + R_0} \right) \left(0.429 - 0.292 \frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right) C_1. \quad (67')$$

余类推。

在这几节中我们只考虑了两个气缝的情况作为例子, 但所得结果(30), (34'), (35),

(49), (50)等显然可以推广到任意多个气缝的情况.

又我們如果不用(29)而改用另一个方程

$$\mu = b_{10}^+ \eta_0 - b_{32}^+ \eta_2, \quad (68)$$

这样得到的 μ 本征值問題可以同前几节中 λ 本征值問題同样处理. 結果表明(49)中 $\Gamma_{10} \rho_1^{2p}$ 項和 $\Gamma_{32} e^{iP(\gamma_{10}-\gamma_{32})}$ 項属于 $C_0 C_1$ 气缝, 而 $\Gamma_{32} \rho_2^{2p}$ 項, $\Gamma_{32} \rho_3^{2p}$ 項和 $\Gamma_{10} e^{-iP(\gamma_{10}-\gamma_{32})}$ 項則属于 $C_2 C_3$ 气缝. 所以(66)中 Γ_{10} 項和(67)中 Γ_{32} 項属于 $C_0 C_1$ 气缝, 而(66)中 Γ_{32} 項和(67)中 Γ_{10} 項属于 $C_2 C_3$ 气缝.

A PERTURBATION METHOD FOR HEAT CONDUCTION PROBLEMS WITH CYLINDRICAL AIR GAPS

Wu Yu

The heat conduction problem is transformed into an algebraic eigenvalue problem which can be solved very simply by a perturbation method, the perturbation parameter being the small ratio between the coefficients of heat conduction in the gas and in the solid.