

球形核振动中非简谐项的影响*

張 宗 燁

提 要

本文在 β, γ 表象中考虑了非简谐项的影响, 对四极表面振动的能量, $E2$ 跃迁及 2_1^+ 态的电四极矩进行了计算, 并与实验作了比较。

近几年来, 在实验上对振动区原子核的性质获得了比较多的知识, 给出了一些比较完整的能级网图。为了更定量地解释实验, 只考虑原子核表面作简谐振动就显得不足了。C. T. Беляев 在去年发表的一项工作^[1]中, 考虑了非简谐项对球形核四极振动的影响。他指出, 在各种非简谐项中, α 的三次项是最重要的, 其次是 α 的四次项, 原因是 α^2 项与原子核硬度成正比, α^2 项与质量参数成正比, 而硬度参数随核子数的变化较大, 因而 α 的高次项的作用比含有 α 的各种其他非简谐项更重要些。我们在 β, γ 表象中重新对这两项的影响作了计算, 并且补充计算了 2_1^+ 态的四极矩值, 以及 α 四次项对 $E2$ 跃迁的修正, 最后还将结果与一些实验数据作了比较。

考虑了 α 三次及四次的非简谐项的四极振动哈密顿量为

$$H_{vib} = \frac{1}{2}\sqrt{5}B(\dot{\alpha}_2\dot{\alpha}_2)_0 + \frac{1}{2}\sqrt{5}C(\alpha_2\alpha_2)_0 - \frac{2}{3}\sqrt{10}C'\frac{\hbar\omega}{\beta_0^3}\{(\alpha_2\alpha_2)_2\alpha_2\}_0 + \\ + 4C''\frac{\hbar\omega}{\beta_0^4}\left\{[(\alpha_2\alpha_2)_0(\alpha_2\alpha_2)_0]_0 + \frac{2}{7}\sqrt{5}[(\alpha_2\alpha_2)_2(\alpha_2\alpha_2)_2]_0 + \right. \\ \left. + \frac{6}{7}[(\alpha_2\alpha_2)_4(\alpha_2\alpha_2)_4]_0\right\}, \quad (1)$$

式中 B, C, C', C'' 是四个参数, $\omega = \sqrt{\frac{C}{B}}, \beta_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2B\omega}}$ 。

计算的方法是以(1)式中的前两项为 H_0 , 后两项(非简谐项)作微扰, 并把它化到 β, γ 表象来处理。因此, 零级波函数为

$$\Psi(N\lambda I) = f_{N\lambda}(z)\phi_{N\lambda}(\gamma, \theta, \varphi, \psi), \quad (2)$$

其中

$$f_{N\lambda}(z) = Az^\lambda e^{-\frac{1}{2}z^2} F\left(-n_\beta, \lambda + \frac{5}{2}, z^2\right). \quad (3)$$

A 是归一化因子, $z = \frac{\beta}{\beta_0}$, $F\left(-n_\beta, \lambda + \frac{5}{2}, z^2\right)$ 是广义超几何级数, N 是声子数, n_β 是 β 振动的声子数, $N = 2n_\beta + \lambda$ 。对于 $(\gamma, \theta, \varphi, \psi)$ 部分的解 $\phi_{N\lambda}(\gamma, \theta, \varphi, \psi)$, 我们取自 Bés^[2] 的文章(I 是总角动量), 在此就不给出了。

* 1963年5月15日收到。

微扰的哈密顿量在 β, γ 表象中的表示式为

$$H'_{\text{vib}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{1}{7}} C' \hbar \omega \frac{\beta^3}{\beta_0^3} \cos 3\gamma + \frac{12}{7} C'' \hbar \omega \frac{\beta^4}{\beta_0^4} \quad (4)$$

于是我們得到一級微扰波函数为

$$\psi_{0_1^+} = \Psi(000) - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{10}{3}} C' \Psi(330) + 3\sqrt{10} C'' \Psi(200) - 3 \sqrt{\frac{5}{14}} C'' \Psi(400); \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2_1^+} = & \Psi(112) - \sqrt{2} C' \Psi(222) + \frac{2}{9} \sqrt{11} C' \Psi(442) + \frac{2}{9} C' \Psi(422) + \\ & + 27 \sqrt{\frac{2}{7}} C'' \Psi(312) - 9 \sqrt{\frac{1}{14}} C'' \Psi(512); \end{aligned} \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \psi_{0_2^+} = & \Psi(200) + 2\sqrt{3} C' \Psi(330) - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{22}{3}} C' \Psi(530) - 3\sqrt{10} C'' \Psi(000) + \\ & + 66 \sqrt{\frac{1}{7}} C'' \Psi(400) - 9 \sqrt{\frac{3}{14}} C'' \Psi(600); \end{aligned} \quad (5c)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2_2^+} = & \Psi(222) + \sqrt{2} C' \Psi(112) + 4 \sqrt{\frac{1}{7}} C' \Psi(312) + \frac{2}{9} \sqrt{\frac{143}{7}} C' \Psi(552) - \\ & - \frac{4}{9} \sqrt{\frac{1}{7}} C' \Psi(512) + \frac{99}{7} \sqrt{2} C'' \Psi(422) - \frac{9}{7} \sqrt{\frac{11}{2}} C'' \Psi(622); \end{aligned} \quad (5d)$$

$$\begin{aligned} \psi_{4_1^+} = & \Psi(224) + 2 \sqrt{\frac{11}{7}} C' \Psi(334) - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{130}{21}} C' \Psi(554) - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{7}} C' \Psi(534) + \\ & + \frac{99}{7} \sqrt{2} C'' \Psi(424) - \frac{9}{7} \sqrt{\frac{11}{2}} C'' \Psi(624). \end{aligned} \quad (5e)$$

进一步就得到对能量及E2跃迁几率的修正如下:

(1) 能量的修正:

$$\Delta E(0_1^+) = -\frac{10}{9} C'^2 \hbar \omega + 15 C'' \hbar \omega; \quad (6a)^{1)}$$

$$\Delta E(2_1^+) = -\frac{34}{9} C'^2 \hbar \omega + 27 C'' \hbar \omega; \quad (6b)$$

$$\Delta E(0_2^+) = -\frac{130}{9} C'^2 \hbar \omega + 51 C'' \hbar \omega; \quad (6c)$$

$$\Delta E(2_2^+) = -\frac{214}{63} C'^2 \hbar \omega + \frac{297}{7} C'' \hbar \omega; \quad (6d)$$

$$\Delta E(4_1^+) = -\frac{550}{63} C'^2 \hbar \omega + \frac{297}{7} C'' \hbar \omega. \quad (6e)$$

(2) E2 跃迁几率的修正:

1) 这些結果与 Беляев 的計算完全相同。

$$B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+) = 1 - \frac{4}{9} C'^2 - 12C''; \quad (7a)^{1)}$$

$$B(2_2^+ \rightarrow 0_1^+) = \frac{8}{9} C'^2; \quad (7b)$$

$$B(2_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 2 \left(1 - \frac{428}{63} C'^2 - \frac{108}{7} C'' \right); \quad (7c)$$

$$B(0_2^+ \rightarrow 2_1^+) = 2 \left(1 + \frac{8}{9} \left(1 + \frac{9}{\sqrt{5}} \right) C'^2 - 24C'' \right); \quad (7d)$$

$$B(4_1^+ \rightarrow 2_1^+) = 2 \left(1 + 4 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{16}{63} \right) C'^2 - \frac{108}{7} C'' \right). \quad (7e)$$

(3) 2_1^+ 态的电四极矩:

$$Q_{2_1^+} = 12 \sqrt{\frac{1}{35\pi}} Z R_0^2 C' \beta_0.$$

由此结果可以看出: α 三次项对能量及跃迁的修正都是二次效应, 而 α 四次项对能量及跃迁的修正都是一次效应. 因而, 虽然 α 四次项比三次项小一个数量级, 但对能量及跃迁的影响却与三次项同样重要. 另外, α 四次项对跃迁的影响, 在 $2_2^+ \rightarrow 2_1^+$ 的跃迁中, 与三次项同符号, 而在 $0_2^+ \rightarrow 2_1^+$ 以及 $4_1^+ \rightarrow 2_1^+$ 的跃迁中, 与三次项反号; 由于这个特点, 所以可以保持 $0_2^+ \rightarrow 2_1^+$ 及 $4_1^+ \rightarrow 2_1^+$ 的跃迁仍然差不多是 2, 而只把 $2_2^+ \rightarrow 2_1^+$ 的跃迁减小, 这是符合实验的要求的.

在能量的修正中, 由于 α 四次项对 2_2^+ 及 4_1^+ 的能量修正是一样的, 因此, 4_1^+ 的能量总是比较低的; 要改变能级的次序, 必须考虑其他非简谐项的影响.

在此, 我们还与一些实验数据作了比较, 比较的结果, 列于以下的表中 ($r_0 = 1.1 \times 10^{-13} \text{ cm}$).

(1) Se^{76}

	$E(2_1^+)$ Kev	$E(0_2^+)$ Kev	$E(2_2^+)$ Kev	$E(4_1^+)$ Kev	$\frac{B(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(0_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$Q_{2_1^+}$
实验	550	1100	1210	1335	0.8 ± 0.3	2 ± 0.8	1.8	—
理论	550	1050	1210	1090	0.76	1.76	1.91	0.375
参数	$C'^2 = \frac{1}{20}, \quad C'' = \frac{2}{75}, \quad \hbar\omega = 463 \text{ Kev}, \quad \beta_0 = 0.202$							

(2) Ru^{102}

	$E(2_1^+)$ Kev	$E(0_2^+)$ Kev	$E(2_2^+)$ Kev	$E(4_1^+)$ Kev	$\frac{B(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(0_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$Q_{2_1^+}$
实验	475	—	1105	1105	0.6 ± 0.2	—	1.75 ± 0.5	—
理论	475	900	1060	930	0.62	1.51	1.94	0.490
参数	$C'^2 = \frac{2}{35}, \quad C'' = \frac{2}{75}, \quad \hbar\omega = 406 \text{ Kev}, \quad \beta_0 = 0.155$							

1) 在此结果中, C' 项的计算与 Беляев 相同, C'' 项是补算的.

(3) Cd^{112}

	$E(2_1^+)$ Kev	$E(0_2^+)$ Kev	$E(2_2^+)$ Kev	$E(4_1^+)$ Kev	$\frac{B(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(0_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$\frac{B(4_1^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$	$Q_{2_1^+}$
实验	615	1230	1310	1470	1.5 ± 0.6	—	1.8 ± 0.3	—
理论	615	1260	1330	1240	1.09	1.70	1.86	0.345
参数	$C'^2 = \frac{1}{30}, \quad C'' = \frac{2}{75}, \quad \hbar\omega = 500\text{Kev}, \quad \beta_0 = 0.123$							

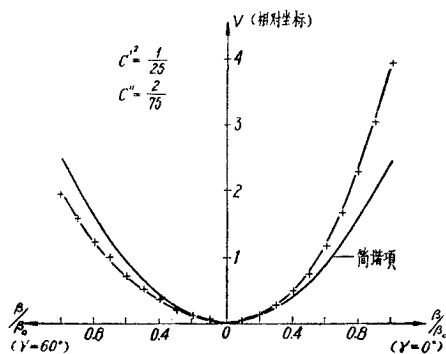
下面我们对这些结果进行一些讨论。首先我们看到，实验上给出 $\frac{B(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)} \approx 1$ ，这与简谐振动的理论结果相差一倍之多。要想解释这个现象，就需要考虑非简谐项的影响；并且从(6)与(7)中可以看出，必须同时考虑 α 三次及 α 四次的影响。如果只考虑 α 三次项，那么要使得 $\frac{B(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)} \approx 1$ 成立，则 $C'^2 \sim \frac{1}{14}$ ，这时会导致 0_2^+ 态的能量过低。反之，如果只考虑 α 四次项，那么要使得 $\frac{B(2_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)} \approx 1$ 成立，则 $C'' \sim \frac{1}{20}$ ， C'' 这样大是不合理的，它导致 $\frac{B(0_2^+ \rightarrow 2_1^+)}{B(2_1^+ \rightarrow 0_1^+)}$ 不存在。由此可以看出，必须同时考虑这两项的影响，并且只有当选参数

$$C'^2 \sim (1 \rightarrow 2)C''$$

时，才能比较好地与实验符合。

其次，在与实验的比较中，我们可以看到，除了跃迁符合得很好以外， 2_1^+ 、 0_2^+ 及 2_2^+ 态的能量也都符合得很好，而比较差的是 4_1^+ 态的能量，大约总与实验值有 20% 左右的偏离。依靠调节参数 C' 及 C'' 是不能解决这个问题。有可能是由其他非简谐项 [例如 $(\dot{\alpha})^2 \alpha$ 项] 的影响而贡献的。

另外，我们还计算了 2_1^+ 态的四极矩，虽然没有直接的实验数据可以作比较，但是它们与邻近的奇 A 核的四极矩同数量级，没有引起矛盾。为了帮助分析非简谐项影响的大小，我们还给出了一条位能曲线（见图）。图中标出了简谐项，和加上了非简谐项的结果。由图可见，非简谐项的影响还是比较大的。



图

最后，作者謹向 A. Bohr 教授表示感謝。这个工作是他去年訪問我国期間在他的建議下进行的。在工作中，他还給予了許多有益的討論。同时还向于敏先生表示感謝，他在此工作中給予了許多帮助和討論。

参 考 文 献

- [1] Беляев, С. Т., *ЖЭТФ*, **42** (1962), 1590.
- [2] Bés, D. R., *Nucl. Phys.*, **10** (1959), 373.

ВЛИЯНИЕ АНГАРМОНИЧЕСКИХ ЧЛЕНОВ В КОЛЕБАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ СФЕРИЧЕСКИХ ЯДЕР

Чжан Зун-хуа

РЕЗЮМЕ

В данной статье в β , γ представлении учтено влияние ангармонических членов, и произведен расчет квадрупольных поверхностных колебательных энергетических значений, вероятности $E2$ перехода и электрического квадрупольного момента 2_1^+ состояния. Приведено сравнение с экспериментами.