第20卷 第3期 物 理 学 报 Vol. 20, No. 3
1964年3月 ACTA PHYSICA SINICA March, 1964

鉄磁体中导电电子与自旋波的相互作用*

孙 鑫
(复 旦 大 学)

提 要

利用双时格林函数計算了 s 电子发射和吸收自旋波，以及 s 电子和自旋波相互散射引起之自旋波衰減．結果发現：在低溫下，只有波矢在 10^6 至 10^8 范围内的自旋波才被 s 电子发射或吸收，由此引起之自旋波衰減比自旋波相互作用引起之衰減大得多． s 电子散射自旋波引起之衰減小于自旋波相互散射引起之衰減，因而預測在 10^6 至 10^8 間将存在一个吸收带．

一、引 言

当溫度 T 比居里点 T_c 低得多时，鉄磁体的状态可用自旋波来描述．由于自旋波相互之間、自旋波与晶格振动之間、自旋波与 s 电子之間存在着相互作用，因而将引起自旋波之衰減．利用衰減，一方面可研究相互作用的性質，并决定自旋波存在的条件，另一方面直接决定了鉄磁体的弛豫过程和輸运过程．А. И. Ахиезер[1] 利用自旋波相互之間以及自旋波与声子之間的相互作用引起之衰減，討論了磁矩的弛豫过程、热导以及鉄磁体在交变場中的性質．正如 С. В. Вонсовский[2] 所指示，在鉄磁体中还存在着 s-d 交换作用，因此自旋波与导电电子間也有相互作用，此作用对鉄磁体的电导相当重要．本文从 s-d 交换作用出发，得到 s 电子发射或吸收自旋波以及 s 电子和自旋波相互散射两种相互作用过程．进而計算这两种作用所引起的自旋波衰減并与自旋波相互作用进行比較．結果发现：波矢在 10^6 至 10^8 間的自旋波将受到 s 电子的吸收或发射，其引起之衰減比自旋波相互作用引起之衰減大得多． 而 s 电子散射自旋波比自旋波相互散射引起之衰減要小．因此看到，在低溫下，10^6 至 10^8 区域內的自旋波有較強的衰減，这意味着在上述区域內存在一吸收带．

下面首先将 s-d 交换作用写成二次量子化表象，从而得到描写自旋波被 s 电子发射、吸收和散射的 Hamilton 算符．第三节和第四节利用双时 Green 函数分別計算上述两过程引起的自旋波衰減．为了比較起見，第五节計算了自旋波之間的相互作用引起之衰減．

二、s-d 交换作用

設 s 电子与 d 电子間相互作用能为 $\frac{1}{2}\sum_{li} v(|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_i|)$，$\mathbf{r}_l$ 是 $\mathbf{l}$ 处晶格原子中 d 电子位矢，$\mathbf{r}_i$ 是导电电子位矢．

* 1962年9月21日收到．

为了使上述相互作用写成二次量子化表象，可将体系之量子化波函数 $\Phi(\mathbf{r})$ 按 s 电子波函数 $\psi_p(\mathbf{r})\eta_\sigma$ 和 d 电子波函数 $\varphi_l(\mathbf{r})\eta_\sigma$ 展开：

$$\Phi(\mathbf{r}_1)=\sum_p \psi_p(\mathbf{r}_1)[\eta_\uparrow(1)a_{p\uparrow}+\eta_\downarrow(1)a_{p\downarrow}]+\sum_l \varphi_l(\mathbf{r}_1)[\eta_\uparrow(1)a_{l\uparrow}+\eta_\downarrow(1)a_{l\downarrow}]. \tag{2.1}$$

η_σ 是波函数自旋部分，$\overset{+}{a}_{f\sigma}$，$a_{f\sigma}$ 是 Fermi 算符。

二次量子化表象中的 s–d 交换作用为

$$\begin{aligned}H_{s-d}&=\frac{1}{2}\iint \Phi^*(\mathbf{r}_1)\Phi^*(\mathbf{r}_2)v(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\Phi(\mathbf{r}_2)\Phi(\mathbf{r}_1)d\tau_1 d\tau_2=\\&=\sum_{pql}K_{pql}(\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow}+\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow})(\overset{+}{a}_{l\uparrow}a_{l\uparrow}+\overset{+}{a}_{l\downarrow}a_{l\downarrow})-\\&\quad-\sum_{pql}A_{pql}(\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow}\overset{+}{a}_{l\uparrow}a_{l\uparrow}+\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\downarrow}\overset{+}{a}_{l\downarrow}a_{l\uparrow}+\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\uparrow}\overset{+}{a}_{l\uparrow}a_{l\downarrow}+\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow}\overset{+}{a}_{l\downarrow}a_{l\downarrow}).\end{aligned} \tag{2.2}$$

式中

$$K_{pql}=e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{l}}L_{pq};\quad A_{pql}=e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{l}}J_{pq},$$

而

$$\begin{aligned}L_{pq}&=\int\psi_p^*(\mathbf{r}_1-\mathbf{l})\varphi^*(\mathbf{r}_2-\mathbf{l})v(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\varphi(\mathbf{r}_2-\mathbf{l})\psi_q(\mathbf{r}_1-\mathbf{l})d\tau_1 d\tau_2,\\J_{pq}&=\int\psi_p^*(\mathbf{r}_1-\mathbf{l})\varphi^*(\mathbf{r}_2-\mathbf{l})v(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\varphi(\mathbf{r}_1-\mathbf{l})\psi_q(\mathbf{r}_2-\mathbf{l})d\tau_1 d\tau_2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

从(2.3)看到，J_{pq} 是交换积分，由于参加 s–d 交换作用的主要是 Fermi 面附近的 s 电子，因而 L_{pq}，J_{pq} 可用 Fermi 面上之平均值 L，J 近似地来代替。

对算符 $\overset{+}{a}_{l\sigma}$，$a_{l\sigma}$ 作如下变换：

$$S_l^+\equiv S_l^x+iS_l^y=\overset{+}{a}_{l\downarrow}a_{l\uparrow};\quad S_l^-\equiv S_l^x-iS_l^y=\overset{+}{a}_{l\uparrow}a_{l\downarrow};\quad 2S_l^z=\overset{+}{a}_{l\downarrow}a_{l\downarrow}-\overset{+}{a}_{l\uparrow}a_{l\uparrow}. \tag{2.4}$$

利用 $a_{l\sigma}$ 的对易关系，容易証明，S_l^α 是电子自旋算符的 α 分量．如果假定每个原子只有一个 d 电子，即 $\overset{+}{a}_{l\uparrow}a_{l\uparrow}+\overset{+}{a}_{l\downarrow}a_{l\downarrow}=1$．(若不止一个 d 电子，则需引进磁量子数来描写不同的 d 电子，而条件 $\overset{+}{a}_{lm\uparrow}a_{lm\uparrow}+\overset{+}{a}_{lm\downarrow}a_{lm\downarrow}=1$ 总可以满足.)　则将(2.4)代入(2.2)后可得到

$$\begin{aligned}H_{s-d}&=\sum_p N\left(L-\frac{1}{2}J\right)(\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow}+\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow})-\\&\quad-\sum_{pql}Je^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{l}}[\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\downarrow}S_l^++\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\uparrow}S_l^-+(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow}-\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow})S_l^z].\end{aligned} \tag{2.5}$$

对自旋算符 S_l^α 进行 Hölstein-Primakoff 变换[3]：

$$\begin{aligned}&S_l^+=\sqrt{2S}(1-b_l^+b_l/2S)^{\frac{1}{2}}b_l,\quad S_l^-=\sqrt{2S}b_l^+(1-b_l^+b_l/2S)^{\frac{1}{2}},\\&S_l^z=S-b_l^+b_l;\end{aligned}$$

則其中 b_l^+，b_l 为 Bose 算符．当我們討論低温下 s 电子和自旋波相互作用时，可将 S_l^α 按 $b_l^+b_l/2S$ 展开，并只取第一項，

$$S_l^+=b_l,\quad S_l^-=b_l^+,\quad S_l^z=\frac{1}{2}-b_l^+b_l. \tag{2.6}$$

将(2.6)代入(2.5)得到

$$H_{s-d}=\sum_p N(L-J)\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow}+\sum_p NL\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow}-$$
$$-\sum_{pq}J\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\downarrow}\left(\sum_l e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{l}}b_l\right)-\sum_{pq}J\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\uparrow}\left(\sum_l e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{l}}b_l^+\right)+$$
$$+\sum_{pq}J\left(\sum_l e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{l}}b_l^+b_l\right)(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow}-\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow}). \tag{2.7}$$

因为每个 d 电子的平均磁矩 $\mu=2\mu_B\langle S_l^z\rangle$. μ_B 是 Bohr 磁子. 所以从(2.6)最后一式得 $b_l^+b_l=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu}{\mu_B}\right)$, 因而 H_{s-d} 中最后一項的对角部分

$$\sum_p J\sum_l b_l^+b_l(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow}-\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow})$$

可化为

$$\sum_p \frac{N}{2}J\left(1-\frac{\mu}{\mu_B}\right)(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow}-\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow}). \tag{2.8}$$

由于在低温下鉄磁体磁化近于飽和, 即 $\mu\approx\mu_B$, 因而对角項(2.8)趋近于零可以忽略.

对算符 b_l^+, b_l 再作 Fourier 变换:

$$b_l=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}b_k,\quad b_l^+=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}b_k^+. \tag{2.9}$$

b_k, b_k^+ 仍服从 Bose 对易关系,即为自旋波湮灭和产生算符. 将(2.9)代入(2.7),得到

$$H_{s-d}=\sum_p N(L-J)\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow}+\sum_p NL\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow}-$$
$$-\sqrt{N}\sum_{pq}J\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\downarrow}b_{p-q}-\sqrt{N}\sum_{pq}J\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\uparrow}b_{q-p}^+ +$$
$$+\sum_{pqk}^{p\neq q}J(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow}-\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow})b_k^+b_{k+p-q}. \tag{2.10}$$

(2.10)即为所求之 s–d 交换作用的二次量子化形式.

第一項是 s–d 作用对負自旋 s 电子能量的修正, 第二項是 s–d 作用对正自旋 s 电子能量的修正,可以看到,在鉄磁体中,由于 s–d 作用,正負自旋之 s 电子能量相差 NJ,它是 s 电子与 d 电子的交換能, 約等于 10^{-1} eV. 第三項表示 s 电子吸收～自旋波, 而 s 电子的自旋要反向. 第四項表示 s 电子发射～自旋波, s 电子自旋也要反向. 第五項是 s 电子和自旋波相互散射, s 电子自旋方向不变. 所有上述过程准动量皆守恆.

在低温下, s 电子基本上充滿 Fermi 球,球內只是在 μ_F-kT 至 μ_F(μ_F 是 Fermi 能)范围內留有空穴. 由于 Pauli 原理的限制, 而且絕大部分自旋波能量 $\omega(k)$ 小于 kT, 因而能量在 μ_F-kT 以下的 s 电子不能和自旋波交换能量, 所以能和自旋波作用的只是能量大于 μ_F-kT 的 s 电子. 并且能量大于 μ_F+kT 的 s 电子非常少,因而参加作用的 s 电子基本上处于 μ_F-kT 至 μ_F+kT 之間. 所以(2.10)中求和可限于能量大于 μ_F-kT 的状态.

铁磁体之 Heisenberg 交换模型在略去自旋波之間的相互作用后为[1]

$$H_{dd} = -N\left[\mu_B\mathscr{H} + \frac{1}{2}I(0)\right] + \sum_k [2\mu_B\mathscr{H} + 2I(0) - 2I(k)]b_k^+ b_k. \tag{2.11}$$

式中 $\mathscr{H}$ 是外磁場；$I(k) = \sum_l I(l)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}$；$I(0) = \sum_l I(l)$，$I(l)$ 是相距 $\mathbf{l}$ 的两原子間的交换积分．在低温下，起主要作用的是长波自旋波，因此 $ak \ll 1$（$a \sim 10^{-8}$ cm 是晶格常数）．由于非邻近原子間的波函数重迭很小，因此可以只考虑最近邻原子間的交换，对于簡立方晶格，

$$I(k) = 2I(a)\left(3 - \frac{1}{2}a^2k^2\right), \tag{2.12}$$

$I(a)$ 是相邻原子間的交换能量，与 KT_c 同数量級，約为 10^{-1} eV（T_c 为 Curie 温度）．因而在弱磁場下，波矢为 k 之自旋波的能量 $\omega(k)$ 为

$$\omega(k) = 2\mu_B\mathscr{H} + 2I(0) - 2I(k) \doteq 2I(a)a^2k^2. \tag{2.13}$$

s 电子在外磁場中的能量为

$$H_s = \sum_p \left(\frac{\hbar^2p^2}{2m} + \mu_B\mathscr{H}\right)\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow} + \sum_p \left(\frac{\hbar^2p^2}{2m} - \mu_B\mathscr{H}\right)\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow},$$

而 s 电子与 d 电子系統之总 Hamilton 算符为

$$\begin{aligned} H &= H_s + H_{dd} + H_{s-d} \\ &= \sum_p \varepsilon_{p\uparrow}\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow} + \sum_p \varepsilon_{p\downarrow}\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow} + \sum_k \omega(k)b_k^+b_k - N\left(\mu_B\mathscr{H} + \frac{1}{2}I(0)\right) - \\ &\quad - \sqrt{N}\sum_{pq} J\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\downarrow}b_{p-q} - \sqrt{N}\sum_{pq} J\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\uparrow}b_{q-p}^+ + \\ &\quad + \sum_{pqk}^{(p\neq q)} J(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow} - \overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow})b_k^+b_{k+p-q}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

在弱磁場中，$\varepsilon_{p\uparrow} \doteq \frac{\hbar^2p^2}{2m} + NL$；$\varepsilon_{p\downarrow} \doteq \frac{\hbar^2p^2}{2m} + NL - NJ$，(2.14) 就是用来討論 s 电子与自旋波相互作用的出发点．后面三項作为微扰．容易看出，一級微扰为零，由于吸收和发散过程含一个 b 算符，散射过程含一对 b 算符，因此在二級近似中不会出現交叉項（因交叉項含三个 b 算符，其系綜平均值为零）．所以在二級近似中可分别討論吸收发散过程以及散射过程．

三、s 电子发射和吸收自旋波

本节只考虑由于 s 电子发射或吸收自旋波对自旋波的影响，此时在 (2.14) 中仅保留与发射和吸收相应之項．

$$\begin{aligned} H = &\sum_p \varepsilon_{p\uparrow}\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow} + \sum_p \varepsilon_{p\downarrow}\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow} + \sum_k \omega(k)b_k^+b_k - \\ &- \sqrt{N}\sum_{pq} J\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\downarrow}b_{p-q} - \sqrt{N}\sum_{pq} J\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\uparrow}b_{q-p}^+. \end{aligned} \tag{3.1}$$

定义双时 Green 函数为[4]

$$G_k(t-t') \equiv \langle\langle b_k(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle \equiv -i\theta(t-t')\langle[b_k(t);b_k^+(t')]_-\rangle. \tag{3.2}$$

$\langle \hat{A} \rangle$ 表示算符 $\hat{A}$ 对系综取平均.

$G_k(t-t')$ 的运动方程为

$$i\frac{d}{dt}G_k(t-t') = \delta(t-t') + \langle\langle [b_k(t); H] | b_k^+(t') \rangle\rangle =$$
$$= \delta(t-t') + \omega(k) G_k(t-t') - \sqrt{N}\sum_p J \langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle.$$

在譜表象中为

$$[E-\omega(k)] G_k(E) = \frac{1}{2\pi} - \sqrt{N}\sum_p J \langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow} a_{p+k\uparrow} | b_k^+ \rangle\rangle. \tag{3.3}$$

$G_k(E)$ 和 $\langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow} a_{p+k\uparrow} | b_k^+ \rangle\rangle$ 分别是 $G_k(t-t')$ 和 $\langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t) | b_k(t') \rangle\rangle$ 的 Fourier 变换式.

三算符 Green 函数 $\langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle$ 的运动方程为

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle = \langle\langle [\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t); H] | b_k^+(t') \rangle\rangle =$$
$$= (\varepsilon_{p+k\uparrow} - \varepsilon_{p\downarrow}) \langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle -$$
$$- \sqrt{N}\sum_g J \langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{g\downarrow}(t) b_{p+k-g}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle +$$
$$+ \sqrt{N}\sum_g J \langle\langle \overset{+}{a}_{g\uparrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t) b_{g-p}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle. \tag{3.4}$$

对四算符 Green 函数作切断近似：

$$\langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow}(t) a_{g\downarrow}(t) b_{p+k-g}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle \to \langle \overset{+}{a}_{p\downarrow} a_{p\downarrow} \rangle \langle\langle b_k(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle \Delta(p-g) =$$
$$= \Delta(p-g) \bar{n}_{p\downarrow} G_k(t-t'),$$
$$\langle\langle \overset{+}{a}_{g\uparrow}(t) a_{p+k\uparrow}(t) b_{g-p}(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle \to \langle \overset{+}{a}_{p+k\uparrow} a_{p+k\uparrow} \rangle \langle\langle b_k(t) | b_k^+(t') \rangle\rangle \Delta(g-p-k) =$$
$$= \Delta(g-p-k) \bar{n}_{p+k\uparrow} G_k(t-t'). \tag{3.5}$$

其中

$$\bar{n}_{p\sigma} = \langle \overset{+}{a}_{p\sigma} a_{p\sigma} \rangle, \quad \Delta(x) = \begin{cases} 1 & x = 0, \\ 0 & x \neq 0. \end{cases}$$

将(3.5)代入(3.4),并变换到譜表象后可得

$$(E - \varepsilon_{p+k\uparrow} + \varepsilon_{p\downarrow}) \langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow} a_{p+k\uparrow} | b_k^+ \rangle\rangle = \sqrt{N} J (\bar{n}_{p+k\uparrow} - \bar{n}_{p\downarrow}) G_k(E),$$
$$\therefore \quad \langle\langle \overset{+}{a}_{p\downarrow} a_{p+k\uparrow} | b_k^+ \rangle\rangle = \frac{\sqrt{N} J (\bar{n}_{p+k\uparrow} - \bar{n}_{p\downarrow})}{E - \varepsilon_{p+k\uparrow} + \varepsilon_{p\downarrow}} G_k(E). \tag{3.6}$$

将(3.6)代入(3.3),得到

$$[E - \omega(k) - M_k(E)] G_k(E) = \frac{1}{2\pi}, \tag{3.7}$$

式中

$$M_k(E) = -\sum_p N J^2 \frac{\bar{n}_{p+k\uparrow} - \bar{n}_{p\downarrow}}{E - \varepsilon_{p+k\uparrow} + \varepsilon_{p\downarrow}}. \tag{3.8}$$

将 $M_k(E)$ 解析开拓到复平面 E 上. 設

$$\lim_{\varepsilon\to+0} M_k(\omega + i\varepsilon) = m_k(\omega) - i\gamma_k(\omega),$$

则

$$m_k(\omega) = -P\sum_g NJ^2 \frac{\bar{n}_{g+k\uparrow} - \bar{n}_{g\downarrow}}{\omega - \varepsilon_{g+k\uparrow} + \varepsilon_{g\downarrow}} \tag{3.9}$$

表示 s 电子发射和吸收自旋波对自旋波能量之修正,式中符号 P 表示取主値.

$$\gamma_k(\omega) = \pi\sum_g NJ^2(\bar{n}_{g+k\uparrow} - \bar{n}_{g\downarrow})\delta(\omega - \varepsilon_{g+k\uparrow} + \varepsilon_{g\downarrow}) \tag{3.10}$$

就是由于 s 电子发射和吸收自旋波引起波矢为 k 的自旋波之衰減，其中 δ 函数保証此过程能量守恆,将求和变为积分,则得

$$\gamma_k = \pi\frac{\Omega_0}{(2\pi)^3}(NJ)^2\int d\mathbf{g}(\bar{n}_{g+k\uparrow} - \bar{n}_{g\downarrow})\delta[\omega(k) - \varepsilon_{g+k\uparrow} + \varepsilon_{g\downarrow}]. \tag{3.11}$$

$\Omega_0 = \dfrac{\Omega}{N}$ 是每个原胞的体积,对簡立方晶格, $\Omega_0 = a^3 \doteq 10^{-24}\,\mathrm{cm}^3$. δ 函数之宗量为

$$\omega(k) - \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{g}+\mathbf{k})^2 + \frac{\hbar^2}{2m}g^2 - NJ = \omega(k) - $$
$$- \frac{\hbar^2}{m}gk\cos(\widehat{\mathbf{gk}}) - \frac{\hbar^2}{2m}k^2 - NJ = F(k) - \frac{\hbar^2}{m}gk\cos(\widehat{\mathbf{gk}}).$$

其中設

$$F(k) = \omega(k) - NJ - \frac{\hbar^2}{2m}k^2, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \gamma_k &= \pi\frac{\Omega_0}{(2\pi)^2}(NJ)^2\int g^2dg\int d\cos(\widehat{\mathbf{gk}})(\bar{n}_{g+k\uparrow} - \bar{n}_{g\downarrow}) \times \\
&\times \frac{m}{\hbar^2gk}\delta\left(\frac{m}{\hbar^2gk}F(k) - \cos(\widehat{\mathbf{gk}})\right) = \\
&= \pi\frac{\Omega_0}{(2\pi)^2}(NJ)^2\frac{m}{2\hbar^2k}\int dg^2(\bar{n}_{g+k\uparrow} - \bar{n}_{g\downarrow})\theta\left(1 - \left|\frac{mF(k)}{\hbar^2gk}\right|\right) = \\
&= \pi\frac{\Omega_0}{(2\pi)^2}(NJ)^2\frac{m^2}{\hbar^4k}\int_{\mu_F-KT}^{\infty} d\varepsilon_{g\downarrow}\left\{\frac{1}{1+\exp[(\varepsilon_{g\downarrow} + \omega(k) - \mu_F)/KT]} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1+\exp[(\varepsilon_{g\downarrow} - \mu_F)/KT]}\right\} \times \theta\left(1 - \left|\sqrt{\frac{m}{2\varepsilon_g}}\frac{F(k)}{\hbar k}\right|\right),
\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中 $\theta(x) = \begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x<0.\end{cases}$ θ 函数要求 $\left|\sqrt{\dfrac{m}{2\varepsilon_g}}\dfrac{F(k)}{\hbar k}\right| \leqslant 1$, 即

$$\varepsilon_g \geqslant \frac{mF^2(k)}{2\hbar^2k^2} \equiv E_0(k). \tag{3.14}$$

为了計算定积分(3.13),要分两种情况来討論:

(A)
$$E_0(k) \equiv \frac{mF^2(k)}{2\hbar^2k^2} < \mu_F - KT, \tag{3.15}$$

此时积分下限仍为 $\mu_F - KT$,

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \gamma_k &= \frac{\Omega_0}{4\pi}(NJ)^2\frac{m^2}{\hbar^4k}\int_{\mu_F-KT}^{\infty} d\varepsilon_{g\downarrow}\left\{\frac{1}{1+\exp[(\varepsilon_{g\downarrow} + \omega(k) - \mu_F)/KT]} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1+\exp[(\varepsilon_{g\downarrow} - \mu_F)/KT]}\right\} = \frac{\Omega_0}{4\pi}(NJ)^2\frac{m^2}{\hbar^4k}KT\ln\left[\frac{1+\exp\left(1 - \frac{\omega(k)}{KT}\right)}{1+e}\right].
\end{aligned} \tag{3.16}$$

当 $\omega(k) \ll KT$ 时，

$$\gamma_k = \frac{\Omega_0}{4\pi}(NJ)^2 \frac{m^2}{\hbar^4 k} \frac{e}{1+e}\omega(k) \doteq 10^{-25}k. \tag{3.17}$$

当 $\omega(k) \gg KT$ 时，

$$\gamma_k = \frac{\Omega_0}{4\pi}(NJ)^2 \frac{m^2}{\hbar^4 k} KT \doteq 10^3 \frac{KT}{k}. \tag{3.18}$$

将 $F(k)$ 的表达式(3.12)代入(3.15)，可得到条件(3.15)对 k 的限制为

$$\frac{m(NJ)^2}{2\hbar^2\mu_F} \leqslant k^2 \leqslant \frac{8m\mu_F}{\hbar^2}, \tag{3.19}$$

其数量級为

$$10^6 \leqslant k \leqslant 10^8. \tag{3.19'}$$

(B)

$$E_0(k) \equiv \frac{mF^2(k)}{2\hbar^2 k^2} > \mu_F - KT, \tag{3.20}$$

此时(3.13)的积分下限由于 θ 函数的要求应变为 E_0，

$$\begin{aligned}
\therefore \gamma_k &= \frac{\Omega_0}{4\pi}(NJ)^2 \frac{m^2}{\hbar^4 k}\int_{E_0}^{\infty} d\varepsilon_{g\downarrow} \left\{\frac{1}{1+\exp[(\varepsilon_{g\downarrow}+\omega(k)-\mu_F)/KT]} - \right.\\
&\left. - \frac{1}{1+\exp[(\varepsilon_{g\downarrow}-\mu_F)/KT]}\right\} = \\
&= \frac{\Omega_0}{4\pi}(NJ)^2 \frac{m^2}{\hbar^4 k} KT\{\ln\{1+\exp[-(E_0+\omega(k)-\mu_F)/KT]\} - \\
&- \ln\{1+\exp[-(E_0-\mu_F)/KT]\}\} = \\
&= \frac{\Omega_0}{4\pi}(NJ)^2 \frac{m^2}{\hbar^4 k} KT\{\exp[-(E_0+\omega(k)-\mu_F)/KT] - \\
&- \exp[-(E_0-\mu_F)/KT]\}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

因为 E_0 和 μ_F 的数量級是 10 eV，而 KT 不超过 10^{-2}eV，故 $E_0-\mu_F \gg KT$，所以从(3.21)看到，此时 γ_k 趋近于零.

(3.20)对 k 的限制是

$$k < \left(\frac{m(NJ)^2}{2\hbar^2\mu_F}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^6 \quad 或 \quad k > \left(\frac{8m\mu_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^8. \tag{3.22}$$

綜合(A)，(B)两情况得到：当 s 电子发射和吸收自旋波时，波矢 $k<10^6$ 或 $k>10^8$ 的自旋波衰減趋近于零，对 $10^6<k<10^8$ 之自旋波将产生較強的衰減，其数值由(3.17)和(3.18)决定. 由此可見，在低温下只有 $10^6<k<10^8$ 之自旋波被 s 电子吸收或发射. 最后一节将得到因自旋波相互作用引起之平均衰減 $\overline{\gamma^{ss}}$ 約为 $(KT)^4/[2\pi I(a)]^3$，将它和(3.17)，(3.18)比較可以看到：当温度低于 100°K 时，$\gamma_k \gg \overline{\gamma^{ss}}$. 所以在低温下，自旋波的衰減在 $10^6<k<10^8$ 間出現高峯，这預示在此区間内产生吸收帶.

s 电子只发射和吸收 $10^6<k<10^8$ 帶中自旋波的原因可直接从能量守恆中找到解释. 事实上，从上节看到，在鉄磁体中，正負自旋的 s 电子有能量差 NJ，而当 s 电子发射或吸收自旋波时，s 电子的自旋要反向，这过程中就要产生 NJ 能量的轉移. γ_k 的表达式(3.11)中之 δ 函数正反映了能量守恆，它要求

$$\omega(k) - \varepsilon_{g+k\uparrow} + \varepsilon_{g\downarrow} = 0,$$

即

$$\omega(k) - \frac{\hbar^2}{2m}(\mathbf{g}+\mathbf{k})^2 + \frac{\hbar^2}{2m}g^2 - NJ = 0.$$

$$\because \quad \omega(k) \ll \frac{\hbar^2}{2m}k^2,$$

$$\therefore \quad NJ + \frac{\hbar^2}{2m}k^2 + \frac{\hbar^2}{m}gk\cos(\widehat{\mathbf{gk}}) = 0.$$

当 $k < \left(\frac{m(NJ)^2}{2\hbar^2\mu_F}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^6$ 时，要使上式成立，必须要求 $g > \frac{NJm}{\hbar^2 k} > 10^8 \sim P_F$；当 $k > \left(\frac{8m\mu_F}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^8$ 时，上式要求 $g > \frac{k}{2} > 10^8 \sim P_F$. P_F 是 Fermi 动量．所以由于能量守恆的要求，只有 $g > P_F$ 的电子，也就是只有 Fermi 球外的 s 电子才能吸收或发射 $k > 10^8$ 或 $k < 10^6$ 之自旋波．而在低温下，Fermi 球外的电子极少，因此在 10^6 至 10^8 以外的自旋波几乎不被 s 电子吸收或发射，这就是发射和吸收过程并不导致 10^6 至 10^8 以外自旋波衰减的原因．

因此，在实驗中观察上述吸收带是否存在将是检驗 s-d 交换理論的直接途径之一．

四、s 电子散射自旋波

本节考虑 s 电子与自旋波相互散射对自旋波的影响，此时 Hamilton 算符为

$$H = \sum_p \varepsilon_{p\uparrow}\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{p\uparrow} + \sum_p \varepsilon_{p\downarrow}\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{p\downarrow} + \sum_k \omega(k)b_k^+ b_k + \sum_{pqk}^{p\neq q} J(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow} - \overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow})b_k^+ b_{k+p-q}. \tag{4.1}$$

Green 函数 $G_k(t-t') \equiv \langle\langle b_k(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle$ 的运动方程为

$$i\frac{d}{dt}G_k(t-t') = \delta(t-t') + \langle\langle[b_k(t);H]|b_k^+(t')\rangle\rangle = \delta(t-t') + \omega(k)G_k(t-t') + \sum_{pq}^{p\neq q} J\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{q\downarrow}(t) - \overset{+}{a}_{p\uparrow}(t)a_{q\uparrow}(t))b_{p-q+k}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle.$$

在譜表象中为

$$[E-\omega(k)]G_k(E) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{pq}^{p\neq q} J\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow} - \overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow})b_{p-q+k}|b_k^+\rangle\rangle. \tag{4.2}$$

四算符 Green 函数 $\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{q\downarrow}(t) - \overset{+}{a}_{p\uparrow}(t)a_{q\uparrow}(t))b_{p-q+k}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle$ 的运动方程为

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}&\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{q\downarrow}(t) - \overset{+}{a}_{p\uparrow}(t)a_{q\uparrow}(t))b_{p-q+k}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle = \\ &= \delta(t-t')(\bar{n}_{p\downarrow} - \bar{n}_{p\uparrow})\Delta(p-q) + [\omega(p-q+k) + \\ &\quad + \varepsilon_q - \varepsilon_p]\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{q\downarrow}(t) - \overset{+}{a}_{p\uparrow}(t)a_{q\uparrow}(t))b_{p-q+k}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle + \\ &\quad + \sum_{uv}^{u\neq v} J\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{q\downarrow}(t) - \overset{+}{a}_{p\uparrow}(t)a_{q\uparrow}(t))(\overset{+}{a}_{u\downarrow}(t)a_{v\downarrow}(t) - \\ &\quad - \overset{+}{a}_{u\uparrow}(t)a_{v\uparrow}(t))b_{u-v+p-q+k}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle + \end{aligned}$$

$$+\sum_{vs}^{v\neq q} J\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{v\downarrow}(t)+\overset{+}{a}_{p\uparrow}(t)a_{v\uparrow}(t))b_s^+(t)b_{q+s-v}(t)b_{p-q+k}(t)\,|\,b_k^+(t')\rangle\rangle -$$

$$-\sum_{vs}^{v\neq p} J\langle\langle(\overset{+}{a}_{v\downarrow}(t)a_{q\downarrow}(t)+\overset{+}{a}_{v\uparrow}(t)a_{q\uparrow}(t))b_s^+(t)b_{v+s-p}(t)b_{p-q+k}(t)\,|\,b_k^+(t')\rangle\rangle. \quad (4.3)$$

对高級 Green 函数作切断近似：

$$\sum_{uv}^{u\neq v} J\langle\langle\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{q\downarrow}(t)\overset{+}{a}_{u\downarrow}(t)a_{v\downarrow}(t)b_{u-v+p-q+k}(t)\,|\,b_k^+(t')\rangle\rangle \to J\bar{n}_{p\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})G_k(t-t'),$$

$$\sum_{vs}^{v\neq q} J\langle\langle\overset{+}{a}_{p\downarrow}(t)a_{v\downarrow}(t)b_s^+(t)b_{q+s-v}(t)b_{p-q+k}(t)\,|\,b_k^+(t')\rangle\rangle \to J\bar{n}_{p\downarrow}\bar{\nu}_{p-q+k}G_k(t-t'), \quad (4.4)$$

式中 $\bar{\nu}_k=\langle b_k^+b_k\rangle=\dfrac{1}{\exp\omega(k)/KT-1}$, $\varepsilon_p=\dfrac{\hbar^2p^2}{2m}$.

将(4.4)代入(4.3)，幷变换到譜表象，可得

$$\langle\langle(\overset{+}{a}_{p\downarrow}a_{q\downarrow}-\overset{+}{a}_{p\uparrow}a_{q\uparrow})b_{p-q+k}\,|\,b_k^+\rangle\rangle=\frac{J(\bar{n}_{p\downarrow}-\bar{n}_{p\uparrow})}{2\pi(E-\omega(k))}\Delta(p-q)+$$

$$+J\frac{\bar{n}_{p\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})+\bar{n}_{p\uparrow}(1-\bar{n}_{q\uparrow})+\bar{\nu}_{p-q+k}(\bar{n}_{p\uparrow}+\bar{n}_{p\downarrow}-\bar{n}_{q\uparrow}-\bar{n}_{q\downarrow})}{E-\omega(p-q+k)-\varepsilon_q+\varepsilon_p}G_k(E). \quad (4.5)$$

将(4.5)代入(4.2)，則得

$$[E-\omega(k)-M_k(E)]G_k(E)=\frac{1}{2\pi}. \quad (4.6)$$

其中

$$M_k(E)=\sum_{pq}J^2\frac{\bar{n}_{p\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})+\bar{n}_{p\uparrow}(1-\bar{n}_{q\uparrow})+\bar{\nu}_{p-q+k}(\bar{n}_{p\uparrow}+\bar{n}_{p\downarrow}-\bar{n}_{q\uparrow}-\bar{n}_{q\downarrow})}{E-\omega(p-q+k)-\varepsilon_q+\varepsilon_p}, \quad (4.7)$$

将 $M_k(E)$ 解析开拓到复平面 E 上，可得

$$\lim_{\varepsilon\to+0}M_k(\omega+i\varepsilon)=m_k(\omega)-i\gamma_k(\omega),$$

則

$$m_k=P\sum_{pq}J^2\frac{\bar{n}_{p\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})+\bar{n}_{p\uparrow}(1-\bar{n}_{q\uparrow})+\bar{\nu}_{p-q+k}(\bar{n}_{p\uparrow}+\bar{n}_{p\downarrow}-\bar{n}_{q\uparrow}-\bar{n}_{q\downarrow})}{\omega(k)-\omega(p-q+k)-\varepsilon_q+\varepsilon_p} \quad (4.8)$$

是 s 电子散射自旋波引起自旋波能譜的二級修正.

$$\gamma_k^s=\pi\sum_{pq}J^2[\bar{n}_{p\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})+\bar{n}_{p\uparrow}(1-\bar{n}_{q\uparrow})+$$

$$+\bar{\nu}_{p-q+k}(\bar{n}_{p\uparrow}+\bar{n}_{p\downarrow}-\bar{n}_{q\uparrow}-\bar{n}_{q\downarrow})]\times\delta[\omega(k)-\omega(p-q+k)-\varepsilon_q+\varepsilon_p] \quad (4.9)$$

是 s 电子散射自旋波引起之自旋波衰減.

分別計算(4.9)中的三部分 γ^{I}, γ^{II}, γ^{III}:

$$\gamma^{\mathrm{I}}=\pi\sum_{pq}J^2\bar{n}_{p\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})\delta[\omega(k)-\omega(p-q+k)-\varepsilon_q+\varepsilon_p]=$$

$$=\pi\frac{\Omega_0^2}{(2\pi)^6}(NJ)^2\int d\mathbf{p}\int d\mathbf{q}\bar{n}_{p\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})\delta[\omega(k)-\omega(p-q+k)-\varepsilon_q+\varepsilon_p]=$$

$$\doteq \pi \frac{\Omega_0^2}{(2\pi)^4}(NJ)^2 \frac{m^2}{2I(a)a^2\hbar^4}\int_{\mu_F-KT}^{\infty} d\varepsilon_{p\downarrow}\bar{n}_{p\downarrow}\int_{\mu_F-KT}^{\infty} d\varepsilon_{q\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow})d\cos(\widehat{\mathbf{pq}}) \times$$
$$\times\, \delta\left(\cos(\widehat{\mathbf{pq}}) - \frac{p^2+q^2}{2pq} + \frac{\varepsilon_p-\varepsilon_q}{4pqI(a)a^2}\right).$$

δ 函数要求 $\varepsilon_p \geqslant \varepsilon_q \geqslant \left(1-\frac{\hbar^2}{4mI(a)a^2}\right)\varepsilon_p$，否則上积分为零．因为当 ε_p 离 Fermi 面不太远时，$\left(1-\frac{\hbar^2}{4mI(a)a^2}\right)\varepsilon_p < \mu_F - KT$.

$$\therefore\quad \gamma^{\mathrm{I}} = \pi \frac{\Omega_0^2}{(2\pi)^4}(NJ)^2 \frac{m^2}{2I(a)a^2\hbar^4}\int_{\mu_F-KT}^{\infty} d\varepsilon_{p\downarrow}\bar{n}_{p\downarrow}\int_{\mu_F-KT}^{\varepsilon_{p\downarrow}} d\varepsilon_{q\downarrow}(1-\bar{n}_{q\downarrow}) \doteq$$
$$\doteq \frac{\Omega_0^2}{(2\pi)^3}(NJ)^2\frac{m^2}{I(a)a^2\hbar^4}(KT)^2 \doteq 10^6(KT)^2.$$

同样可計算 γ^{II} 和 γ^{III}，其数值不超过 γ^{I}.

因此 s 电子散射自旋波引起之衰減

$$\gamma^s \doteq 10^6(KT)^2. \tag{4.10}$$

将它和自旋波相互散射引起之平均衰減 $\overline{\gamma^{ss}} = \frac{(KT)^4}{[2\pi I(a)]^3}$ 比較可以看到：当温度 $T > 1°\mathrm{K}$ 时，$\gamma^s < \overline{\gamma^{ss}}$．所以自旋波被 s 电子的散射弱于自旋波相互間的散射．

五、自旋波相互散射

由于在自旋波之間存在着相互作用，因而产生了自旋波相互之間的散射．А. И. Ахиезер[1] 利用跃迁几率曾計算过由于此种散射引起之自旋波衰減的平均値．利用 Green 函数方法可求得各种波长的衰減，便于和以上結果比較．

鉄磁体的 Heisenberg 交換模型为

$$H = -2\mu_B \mathscr{H}\sum_l S_l^z - 2\sum_{l_1 l_2 \alpha} I(l_1-l_2)S_{l_1}^\alpha S_{l_2}^\alpha. \tag{5.1}$$

进行 Hölstein-Primakoff 变换：

$$S_l^+ = S_l^x + iS_l^y = \sqrt{2S}\left(1-\frac{b_l^+b_l}{2S}\right)^{\frac{1}{2}}b_l;\quad S_l^- = S_l^x - iS_l^y = \sqrt{2S}b_l^+\left(1-\frac{b_l^+b_l}{2S}\right)^{\frac{1}{2}};$$
$$S_l^z = S - b_l^+b_l. \tag{5.2}$$

在低温下，鉄磁体接近于磁飽和，自旋取向的偏离很小，因此可将(5.2)按 $\frac{b_l^+b_l}{2S}$ 展开，并只保留前两項．

$$S_l^x = \sqrt{\frac{S}{2}}\left(b_l + b_l^+ - \frac{b_l^+b_lb_l}{4s} - \frac{b_l^+b_l^+b_l}{4s}\right);$$
$$S_l^y = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{S}{2}}\left(b_l - b_l^+ + \frac{b_l^+b_l^+b_l}{4s} - \frac{b_l^+b_lb_l}{4s}\right);\quad S_l^z = S - b_l^+b_l. \tag{5.3}$$

将(5.3)代入(5.1)，得到

$$H=-2\mu_B\mathscr{H}NS-2S^2NI(0)+[2\mu_B\mathscr{H}+4SI(0)]\sum_l b_l^+b_l-$$
$$-4S\sum_{l_1l_2}I(l_1-l_2)b_{l_1}^+b_{l_2}-2\sum_{l_1l_2}I(l_1-l_2)\left[b_{l_1}^+b_{l_1}b_{l_2}^+b_{l_2}-\frac{1}{2}b_{l_1}^+b_{l_2}^+b_{l_2}b_{l_2}-\frac{1}{2}b_{l_1}^+b_{l_1}^+b_{l_1}b_{l_2}\right]. \tag{5.4}$$

对算符 b_l^+, b_l 作 Fourier 变换：

$$b_l^+=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}b_k^+;\quad b_l=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}}b_k;$$

則

$$H=V_0+\sum_k\omega(k)b_k^+b_k-\frac{1}{N}\sum_{pqk}[2I(p-q+k)-I(p)-$$
$$-I(p+k)]b_p^+b_q^+b_{q-k}b_{p+k}, \tag{5.5}$$

式中 $V_0=-2\mu_B\mathscr{H}NS-2S^2NI(0)$; $\omega(k)=2\mu_B\mathscr{H}+4SI(0)-4SI(k)$, (5.5) 的最后一項即表示自旋波相互間的散射作用.

Green 函数 $G_k(t-t')$ 的运动方程为

$$i\frac{d}{dt}G_k(t-t')=\delta(t-t')+\langle\langle[b_k(t);H]|b_k^+(t')\rangle\rangle=$$
$$=\delta(t-t')+\omega(k)G_k(t-t')-\frac{1}{N}\sum_{ps}[4I(k-s-p)-I(k)-$$
$$-I(p)-I(k-s)-I(p+s)]\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle.$$

在譜表象中，

$$[E-\omega(k)]G_k(E)=\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{N}\sum_{ps}[4I(k-s-p)-I(k)-I(p)-$$
$$-I(k-s)-I(p+s)]\langle\langle b_p^+b_{k-s}b_{p+s}|b_k^+\rangle\rangle. \tag{5.6}$$

四算符 Green 函数 $\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle$ 的运动方程为

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle=\delta(t-t')\langle[b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t);b_k^+(t)]\rangle+$$
$$+\langle\langle[b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t),H]|b_k^+(t')\rangle\rangle=\delta(t-t')\bar{\nu}_p[\Delta(p+s-k)+\Delta(s)]+$$
$$+[\omega(p+s)+\omega(k-s)-\omega(p)]\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle-$$
$$-\frac{1}{N}\sum_{uv}\{[2I(p+s-u+v)-I(p+s)-$$
$$-I(p+s+v)]\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_u^+(t)b_{u-v}(t)b_{p+s+v}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle+$$
$$+[2I(u+v-p-s)-I(u)-$$
$$-I(u+v)]\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_u^+(t)b_{p+s-v}(t)b_{u+v}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle+$$
$$+[2I(k-s-u+v)-I(k-s)-$$
$$-I(k-s+v)]\langle\langle b_p^+(t)b_u^+(t)b_{u-v}(t)b_{k-s+v}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle+$$
$$+[2I(u+v-k+s)-I(u)-$$
$$-I(u+v)]\langle\langle b_p^+(t)b_u^+(t)b_{k-s-v}(t)b_{u+v}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle-$$
$$-[2I(u-p)-I(u)-I(u+v)]\langle\langle b_u^+(t)b_{p+v}^+(t)b_{u+v}(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle-$$
$$-[2I(p-u)-I(p-v)-I(p)]\langle\langle b_{p-v}^+(t)b_u^+(t)b_{u-v}(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)|b_k^+(t')\rangle\rangle\}. \tag{5.7}$$

对高級 Green 函数作切断近似，并忽略 $\bar{\nu}^2$ 之項，

$$\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_u^+(t)b_{u-v}(t)b_{p+s+v}(t)\,|\,b_k^+(t')\rangle\rangle \to [\Delta(k-s-u)\Delta(p-u+v)+ \\ +\Delta(k-s-u)\Delta(s+v)]\bar{\nu}_p G_k(t-t');\ \langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_u^+(t)b_{p+s-v}(t)b_{u+v}(t)\,|\,b_k^+(t')\rangle\rangle \to \\ \to [\Delta(k-s-u)\Delta(s-v)+\Delta(k-s-u)\Delta(p-u-v)]\bar{\nu}_p G_k(t-t'). \quad (5.8)$$

此时(5.7)可簡化为

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)b_k^+(t')\rangle\rangle = \delta(t-t')\bar{\nu}_p[\Delta(p+s-k)+\Delta(s)] + \\ +[\omega(p+s)+\omega(k-s)-\omega(p)]\langle\langle b_p^+(t)b_{k-s}(t)b_{p+s}(t)\,|\,b_k^+(t')\rangle\rangle - \\ -\frac{2}{N}[2I(p+s-k)+2I(s)-I(p+s)-I(k-s)- \\ -I(p)-I(k)]\bar{\nu}_p G_k(t-t').$$

变换到譜表象后得到

$$\langle\langle b_p^+ b_{k-s} b_{p+s}\,|\,b_k^+\rangle\rangle = \frac{\bar{\nu}_p}{2\pi[E-\omega(k)]}[\Delta(p+s-k)+\Delta(s)] - \\ -\frac{2}{N}[2I(p+s-k)+2I(s)-I(p+s)-I(k-s)- \\ -I(p)-I(k)]\bar{\nu}_p G_k(E)/[E+\omega(p)-\omega(p+s)-\omega(k-s)]. \quad (5.9)$$

右方第一項利用(5.6)式的零級近似 $[E-\omega(k)]G_k(E)=\frac{1}{2\pi}$ 可写成

$$\bar{\nu}_p[\Delta(p+s-k)+\Delta(s)]G_k(E).$$

将(5.9)代入(5.6),可得

$$[E-\omega(k)-M_k(E)]G_k(E)=\frac{1}{2\pi}. \quad (5.10)$$

式中

$$M_k(E) = -\frac{1}{N}\sum_{ps}[4I(k-s-p)-I(k)-I(p)-I(k-s)- \\ -I(p+s)]\bar{\nu}_p[\Delta(p+s-k)+\Delta(s)] + \\ +\frac{2}{N^2}\sum_{ps}[4I(k-s-p)-I(k)-I(p)-I(k-s)-I(p+s)]\times \\ \times\frac{[2I(p+s-k)+2I(s)-I(k)-I(p)-I(p+s)-I(k-s)]}{E+\omega(p)-\omega(p+s)-\omega(k-s)}\bar{\nu}_p = \\ =\frac{4}{N}\sum_p[I(k)+I(p)-I(k-p)-I(0)]\bar{\nu}_p + \\ +\frac{2}{N^2}\sum_{ps}\bar{\nu}_p[2I(p+s-k)+2I(s)-I(k)-I(p)- \\ -I(p+s)-I(k-s)]^2/[E+\omega(p)-\omega(p+s)-\omega(k-s)]. \quad (5.11)$$

将 $M_k(E)$ 解析开拓到复平面 E 上,

$$\lim_{\varepsilon\to+0} M_k(\omega+i\varepsilon) = m_k(\omega) - i\gamma_k^{ss}(\omega),$$

則

$$m_k = \frac{4}{N}\sum_p [I(k) + I(p) - I(k-p) - I(0)]\bar{\nu}_p + \\ + \frac{2}{N^2} p \sum_{ps} \bar{\nu}_p [2I(p+s-k) + 2I(s) - I(k) - I(p) - \\ - I(p+s) - I(k-s)]^2/[\omega(k) + \omega(p) - \omega(p+s) - \omega(k-s)] \quad (5.12)$$

是由于自旋波相互散射給自旋波能譜带来之修正.

$$\gamma_k^{ss} = \frac{2\pi}{N^2}\sum_{ps}\bar{\nu}_p[2I(p+s-k) + 2I(s) - I(k) - I(p) - I(p+s) - \\ - I(k-s)]^2 \times \delta[I(k) + I(p) - I(p+s) - I(k-s)] \quad (5.13)$$

是自旋波相互散射所引起自旋波之衰減. 从(5.13)直接看到,当 $k = 0$ 时, $\gamma_0^{ss} = 0$.

在低温下,长波自旋波起主要作用,对簡立方晶格,

$$I(k) = 2I(a)\left(3 - \frac{1}{2}a^2k^2\right),$$

$$\therefore \quad \gamma_k^{ss} = \frac{8\pi\Omega_0^2}{(2\pi)^6} I(a)a^2 \int d\mathbf{p}\int d\mathbf{q}(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{k})^2\bar{\nu}_p\delta(2\mathbf{k}\cdot\mathbf{q} - 2\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - 2q^2). \quad (5.14)$$

(A) 对长波: $\dfrac{\omega(k)}{KT} = \dfrac{2I(a)a^2k^2}{KT} \ll 1$,

$$\gamma_k^{ss} \doteq \frac{16\pi\Omega_0^2}{(2\pi)^6} I(a)a^2\int_0^\infty p^2dp\int_{-1}^1 d\cos(\widehat{\mathbf{pk}})\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\infty qdq\int_{-1}^1 d\cos(\widehat{\mathbf{pq}})\int_0^{2\pi} d\psi \times \\ \times k^2p^2\cos^2(\widehat{\mathbf{pk}})\bar{\nu}_p\delta(p\cos(\widehat{\mathbf{pq}}) + q) = \frac{\Gamma(3)\zeta(3)}{6(2\pi)^3} I(a)(ak)^2\left(\frac{KT}{I(a)}\right)^3, \quad (5.15)$$

其中 $\Gamma(x)$ 是第二类 Euler 函数, $\zeta(x)$ 是 Riemann 函数.

(B) 对短波: $\dfrac{\omega(k)}{KT} \gg 1$,

$$\gamma_k^{ss} \doteq \frac{16\pi\Omega_0^2}{(2\pi)^6} I(a)a^2\int_0^\infty p^2dp\int_{-1}^1 d\cos(\widehat{\mathbf{pk}})\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\infty qdq\int_{-1}^1 d\cos(\widehat{\mathbf{kq}})\int_0^{2\pi} d\psi \times \\ \times k^2p^2\cos^2(\widehat{\mathbf{pk}})\bar{\nu}_p\delta[k\cos(\widehat{\mathbf{kq}}) - q] = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{3\sqrt{2}(2\pi)^3} I(a)(ak)^3\left(\frac{KT}{I(a)}\right)^{5/2}. \quad (5.16)$$

对长波部分衰減的平均值 $\overline{\gamma^{ss}}$ 为

$$\overline{\gamma^{ss}} = \frac{\int \bar{\nu}_k\gamma_k^{ss}d\mathbf{k}}{\int \bar{\nu}_k d\mathbf{k}} = \frac{\Gamma(3)\zeta(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{12(2\pi)^3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} I(a)\left(\frac{KT}{I(a)}\right)^4. \quad (5.17)$$

注意到 $KT_c \approx I(a)$, 此結果与 Ахиезер 的結果相一致.

六、結　論

1. s 电子能散射各种波长的自旋波, 从而引起自旋波之衰減, 衰減 γ^s 与温度平方成正比. 它比自旋波相互散射引起之衰減要小, 所以 s 电子与自旋波的散射作用弱于自旋波相互間的散射作用.

2. 在低温下只有 $10^6 < k < 10^8$ 带中的自旋波才被 s 电子吸收或发射. 其他的自旋波几乎不受 s 电子吸收或发射.

3. $10^6 < k < 10^8$ 带中之自旋波的衰減很強(由于 s 电子吸收或发射引起),此带以外的衰減很小. 因此在上述区域将产生吸收带. 此带位于远紫外和X光波区域 $(10^{-8} < \lambda < 10^{-6})$.

4. 自旋波相互散射引起之衰減,长波部分正比于 k^2T^3, 短波部分正比于 $k^3T^{5/2}$. 平均衰減为 $CI(a)\left(\frac{KT}{I(a)}\right)^4$, 它大于 s 电子散射引起之衰減,但比 s 电子吸收或发射引起之衰減小得多. 各种衰減数值列成下表,便于比較.

γ \ k	$k < 10^6$	$10^6 < k < 10^8$	平 均
γ (发射和吸收)	0	$10^{-5}KT < \gamma < 10^{-19}$	$10^{-5}KT$
γ^{ss} (相互散射)	$10^9k^2(KT)^3$	$10^{21}(KT)^3 < \gamma < 10^{17}(KT)^{5/2}$	$10^{38}(KT)^4$
γ^s (s 电子散射)	$10^6(KT)^2$	$10^6(KT)^2$	$10^6(KT)^2$

本工作是在周世勛教授指导下完成的, 在計算中得到黄靜宜、严启伟同志的帮助, 作者向他們表示深深的謝意.

参 考 文 献

[1] Ахиезер. А. И., *УФН*, LXXII, **1** (1960), 1.
[2] Вонсовский, С. В., *ЖЭТФ*, **16** (1946), 981.
[3] Hölstein, T. and Primakoff, H., *Phys. Rev.*, **58** (1940), 1098.
[4] Боголюбов, Н. Н., *ДАН СССР*, **126** (1959), 53.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ *s*-ЭЛЕКТРОНОВ СО СПИНОВЫМИ ВОЛНАМИ В ФЕРРОМАГНЕТИКЕ

Сунь Синь

Резюме

Вычислены затухания спиновых волн, вызванные испусканием, поглощением и рассеянием спиновых волн s-электронами при помощи метода двухвременной температурной функции Грина. Оказалось, что при низкой температуре только те спиновые волны (волновой вектор волны находится в пределах $10^6 < K < 10^8$) испускаются и поглощаются s-электронами. Затухание спиновых волн, вызванное этими процессами, будет намного больше, чем затухание, вызванное взаимодействием спиновых волн друг с другом. Затухание, возникающее благодаря рассеянию спиновых волн на s-электронах, будет ещё меньше затухания, возникающего из-за взаимодействия спиновых волн друг с другом. Поэтому можно предвидеть, что существует полоса поглощения в пределах $10^6 < k < 10^8$.