

低能 π 介子-核子散射*

关 洪

(北京大学物理系)

提 要

本文应用向前方向附近的定角色散关系推出了 π 介子-核子散射的 s 波和 p 波振幅的积分方程。方程中包含湮没过程的贡献,其中主要贡献来自二 π 介子中间态。为了检验 $\pi\pi$ 作用在 π 介子-核子散射过程中的效应,将散射相移观察值代入方程中作了数值计算。利用了核子电磁结构形式因子的实验知识,取共振能量平方 $t_r = 20$, 得到了 $l = j = 1$ $\pi\pi$ 散射共振宽度参数 $\gamma \cong 0.1$ 。此结果可同时符合三个低角动量分波振幅的实验材料,但共振宽度要比观察值小。

一、引 言

自从 Mandelstam^[1] 提出了双重色散关系之后,作为强作用理论的新方法,一些作者用它来研究了 π 介子-核子散射的分波振幅^[2-5]。但是,由于振幅吸收部分的勒让德展开式在非物理区内存在着发散的区域,在其中振幅吸收部分无法推算,一般都将这部分贡献抛弃了。鉴此,Ефремов, Мещеряков, Ширков 和朱洪元^[6]指出,当选择适当的散射角时,固定散射角的色散关系的积分路径可以完全绕开发散区域,由于在低能时只有低角动量的分波起作用,所以只须利用有限的几个定角色散关系便可以推出几个低角动量分波振幅所满足的积分方程,从而避免了发散的困难。

根据这种方法,Ефремов, Мещеряков 和 Ширков^[7] 利用向后散射附近的定角色散关系,朱洪元^[8]利用向前和向后散射的色散关系分别推出了 π 介子-核子散射的 s 波和 p 波方程,其中包含了核子对湮没为二 π 介子过程的贡献。

另外,大家所熟知的 Chew, Goldberger, Low 和 Nambu^[9] 的工作是以固定动量传送的单重色散关系为基础,在向前散射附近应用这种方法的结果,但其中并未出现核子对湮没振幅的贡献,所以当时没能由此检验 $\pi\pi$ 作用对 π 介子-核子散射的影响,而这正是目前大家所关心的问题。

本文尝试应用 Ефремов 等的方法,利用向前散射附近的定角色散关系推导低能 s 波和 p 波方程。结果发现,同样可以避免分波展开的发散性,并且方程中明显地出现 $\pi\pi$ 散射的贡献。我们的结果和 CGLN^[9] 的结果不同的原因是我们用的是固定散射角的色散关系,而不是固定动量传送的关系,一般说来,这两种积分路径是完全不同的。此外,一般湮没过程的贡献相当复杂,其中二 π 中间态的高角动量分波和高粒子数中间态的贡献是不清楚的,简单地只取二 π 态的 s 波和 p 波未必可靠,Галанин 和 Грашин^[10] 曾经指出过这

* 1962年12月21日收到;1963年3月15日收到修改稿。

一点。我们的工作表明,在向前散射附近的小角度处,湮没过程的贡献特别简单,其中高粒子态和高分波的贡献自然是被压低的了,因此用它来确定 $\pi\pi$ 散射的 s 波和 p 波可能是比较靠得住的。

二、定角色散关系

在 π 介子-核子散射过程中,选取质心系总能平方 $s \equiv W^2$ 和散射角余弦 x 作为二独立变数,则可表出:

$$k^2 = [s - (m-1)^2][s - (m+1)^2]/4s, \quad (2.1)$$

$$\bar{s} = \frac{1-x}{2} \frac{(m^2-1)^2}{s} - \frac{1+x}{2} (s - 2m^2 - 2), \quad (2.2)$$

$$t = \frac{1-x}{2} \left[2m^2 + 2 - s - \frac{(m^2-1)^2}{s} \right], \quad (2.3)$$

其中取 π 介子质量为 1, 核子质量为 m , k 是质心系中 π 介子动量值, \bar{s} 和 t 是两种动量传送的平方或者说分别是交叉散射过程和湮没过程的总能平方。当 x 等于常数时,由 (2.3) 式定义的曲线便是 $s-t$ 二维平面上的固定散射角曲线。当 $t \geq 2m^2(1-x)$ 和 $t \leq 2(1-x)$ 时,它是以 $s=0$ 和 $s=2\left(m^2+1-\frac{t}{1-x}\right)$ 二直线为渐近线的一对双曲线,当 $2(1-x) \leq t \leq 2m^2(1-x)$ 时,它是复柱面 $|s|=m^2-1$ 被平面 $\text{Re } s = m^2+1-\frac{t}{1-x}$ 所截得的椭圆。

根据 Mandelstam 表示^[1], 不难写出在 s 复平面上固定散射角的色散关系为

$$\begin{aligned} A^{(\pm)}(s, x) = & \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} ds' \frac{A_1^{(\pm)}(s', x)}{s' - s} - \frac{1}{\pi} \int_0^{(m-1)^2} ds' \frac{A_2^{(\pm)}(s', x)}{s' - s} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{a(x)} ds' \frac{A_2^{(\pm)}(s', x)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{b_1(x)}^0 ds' \frac{A_3^{(\pm)}(s', x)}{s' - s} - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{b_2(x)} ds' \frac{A_3^{(\pm)}(s', x)}{s' - s} + \frac{i}{\pi} \int_{\phi_0}^{\pi} d\phi \frac{A_3^{(\pm)}((m^2-1)e^{i\phi}, x)}{1 - s/(m^2-1)e^{i\phi}} - \\ & - \frac{i}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi-\phi_0} d\phi \frac{A_3^{(\pm)}((m^2-1)e^{i\phi}, x)}{1 - s/(m^2-1)e^{i\phi}}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$B^{(\pm)}(s, x) = \frac{g_r^2}{m^2 - s} \mp \frac{g_r^2}{m^2 - \bar{s}} + \text{与上式相似的积分项}, \quad (2.5)$$

其中 A_1, A_2, A_3 和 B_1, B_2, B_3 分别为振幅 A, B 在散射道, 交叉道和湮没道中的吸收部分, g_r^2 是有理化重正化耦合常数。积分限函数是:

$$a(x) = -\frac{1-x}{1+x} (m+1)^2;$$

和当 $-1 \leq x \leq 1 - 2/m^2$ 时,

$$b_1 = b_2 = -(m^2 - 1),$$

$$\phi_0(x) = \cos^{-1} \left[\left(m^2 + 1 - \frac{4}{1-x} \right) / (m^2 - 1) \right];$$

当 $1 - 2/m^2 \leq x \leq 1$ 时,

$$b_{1,2}(x) = -\left(\frac{4}{1-x} - m^2 - 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4}{1-x} - m^2 - 1\right)^2 - (m^2 - 1)^2},$$

$$\phi_0 = \pi.$$

(2.4) 式右方第一项积分在物理区, 第二项在交叉物理区, 其余各项一般都在非物理区. 非物理区积分中的谱函数需要由物理区中的吸收振幅通过勒让德多项式展开式的解析延拓得到. 但是, 正如 Ефремов 等^[6-8]所讨论的, 当定角曲线进入双重谱函数 $A_{23} \approx 0$ 的区域时, 勒让德展开式不收敛, 因此这样延拓是不合法的. 他们并且利用了某些特殊的、不通过发散区域的定角曲线推出了低能 π 介子-核子散射的积分方程. 下面我们试图用相同的方法, 通过不同的路径得出不发散的方程.

计算指出, $A_{23} \approx 0$ 的边界线(参看文献[1])所能达到的 s 的极大值约为 $s = -2.6$, 而当 $x \rightarrow 1$ 时, 定角曲线趋近 $s = 0$ 和 $t = 0$ 两条直线, 所以当 x 足够接近 1 时, 定角曲线总可以“钻”过 $s = 0$ 和 $A_{23} \approx 0$ 当中的空隙. 另外, 当 $x \rightarrow 1$ 时, 定角曲线和 $t = 4$ 直线的左方交点 $b_2(x) \rightarrow -\infty$, 所以定角曲线和 $A_{23} \approx 0$ 边界线的左方交点也趋于负无穷, 因此 (2.4) 式右方第三项的发散部分和第五项是可以忽略的. 于是, 当 x 足够接近 1 时, (2.4) 式中各项积分的谱函数的展开不再出现发散困难. 同时我们还注意到, 当 $x \geq 1 - 2/m^2 = 0.9565$ 时, $\phi_0 = \pi$, (2.4) 式末二项积分(“圆”上的贡献)消失, 使方程变得更简单.

下面我们写出这种小角度的定角关系. 为了实际计算, 积分变数换为各道的总能平方, 并且利用了交叉对称关系

$$\begin{aligned} A_1^{(\pm)}(s, \bar{s}, t) &= \pm A_2^{(\pm)}(\bar{s}, s, t), \\ B_1^{(\pm)}(s, \bar{s}, t) &= \mp B_2^{(\pm)}(\bar{s}, s, t), \end{aligned} \quad (2.6)$$

得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A^{(\pm)}(s, x) &= \frac{P}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} A_1^{(\pm)}(s', x) \pm \\ &\pm \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{d\bar{s}'}{s - s_+(\bar{s}', x)} K_+(\bar{s}', x) A_1^{(\pm)}(\bar{s}', \bar{x}_+(\bar{s}', x)) \pm \\ &\pm \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{d\bar{s}'}{s - s_-(\bar{s}', x)} K_-(\bar{s}', x) A_1^{(\pm)}(\bar{s}', \bar{x}_-(\bar{s}', x)) - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{dt'}{s - s_3(t', x)} K_3(t', x) A_3^{(\pm)}(t', z(t', x)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B^{(\pm)}(s, x) &= \frac{g_r^2}{m^2 - s} \mp \frac{g_r^2}{m^2 - \bar{s}} + \frac{P}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} B_1^{(\pm)}(s', x) \mp \\ &\mp \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{d\bar{s}'}{s - s_+(\bar{s}', x)} K_+(\bar{s}', x) B_1^{(\pm)}(\bar{s}', \bar{x}_+(\bar{s}', x)) \mp \\ &\mp \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{d\bar{s}'}{s - s_-(\bar{s}', x)} K_-(\bar{s}', x) B_1^{(\pm)}(\bar{s}', \bar{x}_-(\bar{s}', x)) - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_4^{\infty} \frac{dt'}{s - s_3(t', x)} K_3(t', x) B_3^{(\pm)}(t', z(t', x)), \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中

$$s_{\pm}(\bar{s}', x) = \frac{1}{1+x} \left\{ (1+x)(m^2+1) - \bar{s}' \pm \sqrt{[(1+x)(m^2+1) - \bar{s}']^2 + (1-x^2)(m^2-1)^2} \right\},$$

$$K_{\pm}(\bar{s}', x) = \frac{1}{1+x} \left\{ 1 \pm \frac{(1+x)(m^2+1) - \bar{s}'}{\sqrt{[(1+x)(m^2+1) - \bar{s}']^2 + (1-x^2)(m^2-1)^2}} \right\},$$

$$\bar{x}_{\pm}(\bar{s}', x) = 1 + \frac{2m^2 + 2 - \bar{s}' - s_{\pm}(\bar{s}', x)}{2\bar{k}^2},$$

$$s_3(t', x) = -\left(\frac{t'}{1-x} - m^2 - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{t'}{1-x} - m^2 - 1\right)^2 - (m^2-1)^2},$$

$$K_3(t', x) = \frac{1}{1-x} \left\{ \frac{\frac{t'}{1-x} - m^2 - 1}{\sqrt{\left(\frac{t'}{1-x} - m^2 - 1\right)^2 - (m^2-1)^2}} - 1 \right\},$$

$$z(t', x) = \frac{s_3 + p^2 + q^2}{2pq}, \quad p^2 = \frac{t'}{4} - m^2, \quad q^2 = \frac{t'}{4} - 1.$$

\bar{x} 与 z 分别是 \bar{s} 道和 t 道的反应角余弦。

$K_{\pm}(\bar{s}', x)$ 是做交叉对称后出现的积分变数变换因子, 分别对应 (2.4) 式右方第二、三项。这函数具有渐近性质:

$$\text{当 } \bar{s}' \rightarrow \infty \text{ 时,} \quad K_+ \rightarrow 0, \quad K_- \rightarrow \frac{2}{1+x},$$

$$\bar{s}' = (1+x)(m^2+1) \text{ 时,} \quad K_+ = K_- = \frac{1}{1+x},$$

$$\bar{s}' \rightarrow -\infty \text{ 时,} \quad K_+ \rightarrow \frac{2}{1+x}, \quad K_- \rightarrow 0.$$

$x = 1$ 时, 它们就是阶梯函数:

$$K_+ = 1, \quad K_- = 0, \quad \text{当 } \bar{s}' < 2m^2 + 2,$$

$$K_+ = 0, \quad K_- = 1, \quad \text{当 } \bar{s}' > 2m^2 + 2.$$

所以在向前散射时, (2.7) 和 (2.8) 式中第二、三项积分可以合为一项。又由于 $b_1(x=1) = 0$, 式中末项消失。再代入 $x=1$ 时 $\bar{x}_+ = \bar{x}_- = 1$, $s_+ = s_- = 2m^2 + 2 - \bar{s}'$ 诸值, 便得到大家所熟知的向前散射色散关系:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A^{(\pm)}(s, 1) &= \frac{P}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} A_1^{(\pm)}(s', 1) \pm \\ &\pm \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' + s - 2m^2 - 2} A_1^{(\pm)}(s', 1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B^{(\pm)}(s, 1) &= \frac{g_r^2}{m^2 - s} \mp \frac{g_r^2}{s - m^2 - 2} + \frac{P}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} B_1^{(\pm)}(s', 1) \mp \\ &\mp \frac{1}{\pi} \int_{(m+1)^2}^{\infty} \frac{ds'}{s' + s - 2m^2 - 2} B_1^{(\pm)}(s', 1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

三、积分方程

为了推演 s 波和 p 波方程,除了向前散射以外,我們还需要另外一个小角度的色散关系. 計算指出,当 x 約大于 0.975 时,定角曲綫在 $s = 0$ 附近便不进入双重譜函数区域. 我們选取 $x = 0.98$ 的定角关系,这时 $b_1 = -6.51$, $b_2 = -301$,可見(2.4)式右方第五項的确是相当远的贡献,有道理将它忽略.

低能时,在振幅

$$\begin{aligned} f_1^{(\pm)} &= \frac{(W+m)^2 - 1}{16\pi W^2} [A^{(\pm)} + (W-m)B^{(\pm)}], \\ f_2^{(\pm)} &= \frac{(W-m)^2 - 1}{16\pi W^2} [-A^{(\pm)} + (W+m)B^{(\pm)}] \end{aligned} \quad (3.1)$$

的分波展开式(參看文献[9])中,忽略去 d 波以及更高的分波,有

$$f_1^{(\pm)} = f_s^{(\pm)} + 3x f_{p\frac{3}{2}}^{(\pm)}, \quad f_2^{(\pm)} = f_{p\frac{1}{2}}^{(\pm)} - f_{p\frac{3}{2}}^{(\pm)}. \quad (3.2)$$

于是可将分波振幅表示为

$$\begin{aligned} f_s^{(\pm)} &= f_1^{(\pm)}(1) - \frac{1}{1-x} [f_1^{(\pm)}(1) - f_1^{(\pm)}(x)], \\ f_{p\frac{1}{2}}^{(\pm)} &= f_2^{(\pm)}(1) + \frac{1}{3(1-x)} [f_1^{(\pm)}(1) - f_1^{(\pm)}(x)], \\ f_{p\frac{3}{2}}^{(\pm)} &= \frac{1}{3(1-x)} [f_1^{(\pm)}(1) - f_1^{(\pm)}(x)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.3), (3.1), (2.10), (2.11) 和取 $x = 0.98$ 的 (2.7), (2.8) 式便构成分波振幅所满足的积分方程. 下面我們討論式中振幅吸收部分的推算.

本文的目的在于确定 $\pi\pi$ 作用对 π 介子-核子散射的影响,在式中出現的 A_1, B_1 都用 π 介子-核子散射相移观察值代入. 作为初級的近似,我們只取了(3.3)态的主要贡献:

$$\begin{aligned} A_1^{(\pm)}(s, x) &= 8\pi W \left[\frac{3x(W+m)}{(W+m)^2 - 1} + \frac{W-m}{(W-m)^2 - 1} \right] \text{Im} f_{p\frac{3}{2}}^{(\pm)}, \\ B_1^{(\pm)}(s, x) &= 8\pi W \left[\frac{3x}{(W+m)^2 - 1} - \frac{1}{(W-m)^2 - 1} \right] \text{Im} f_{p\frac{3}{2}}^{(\pm)}, \\ \text{Im} f_{p\frac{3}{2}}^{(+)} &= \frac{2}{3} \text{Im} f_{33}, \quad \text{Im} f_{p\frac{3}{2}}^{(-)} = -\frac{1}{3} \text{Im} f_{33}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

(2.7)和(2.8)式中对湮沒振幅 A_3, B_3 的积分是从 $t = 4$ 开始的, $t = 4, 16, 36, \dots$ 分別是 $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ 中間态閾值. 注意在积分函数中的因子 K_3 随着 t 的增加而急剧减少,当 $x = 0.98$ 时,函数值如表 1 所示.

表 1 $K_3(t, x = 0.98)$ 值

t	4	16	36	64	100
K_3	2.2	0.09	0.016	0.005	0.002

因此我們在 A_3, B_3 的么正条件中,只取 2π 中間态的贡献是很合理的,因为在这情况下,高粒子数中間态的贡献已經显著地被压低了. 根据同样的理由,我們可以希望 2π 态高角

动量分波也是不重要的,只保留 s 波或 p 波,这时湮没振幅的分波展开式(参看文献[11])变成

$$\begin{aligned} A_3^{(+)} &= -\frac{4\pi}{p^2} \text{Im } f_+^0, \\ B_3^{(+)} &= 0, \\ A_3^{(-)} &= -12\pi \frac{zq}{p} \left[\text{Im } f_+^1 - \frac{m}{\sqrt{2}} \text{Im } f_-^1 \right], \\ B_3^{(-)} &= 6\pi \sqrt{2} \text{Im } f_-^1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 f_{\pm}^l 是总角动量为 J , 旋性 (helicity) 为正, 负的湮没振幅. $A_3^{(+)}$, $B_3^{(+)}$ 与总同位旋 $I=0$ 的振幅相关, 只含偶数 J 分波; $A_3^{(-)}$, $B_3^{(-)}$ 与 $I=1$ 的振幅相关, 只含奇数 J 分波.

本文只计算 $I=J=1$ 的 $\pi\pi$ 散射的贡献. 我们采用 Bowcock, Cottingham 和 Lurié^[4] 所提出的模型, 假设 f_{\pm}^1 可用 Breit-Wigner 单能级共振公式描写:

$$f_{\pm}^1 = \frac{N_{\pm}}{t_r - t - i\gamma q^3}. \quad (3.6)$$

它其实也是 Frazer 和 Fulco 解^[11]的一种近似. 其中共振能量 t_r 和常数 N_{\pm} 可以从核子结构实验确定, 将剩下的共振宽度参数 γ 当作唯一的一个待定参数. 根据 Bowcock 等的推算, 相应的同位旋矢量部分的核子电、磁结构形式因子为

$$F_{1\nu} = 1 - \frac{at}{t_r - t}, \quad F_{2\nu} = 1 - \frac{bt}{t_r - t}, \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{t_r + \gamma}{E_r \gamma t_r} \frac{m}{p_r^2} \left(-\frac{E_r^2}{m\sqrt{2}} N_- + N_+ \right), \\ b &= \frac{m}{g} \frac{t_r + \gamma}{E_r \gamma t_r} \frac{1}{2p_r^2} \left(\frac{m}{\sqrt{2}} N_- - N_+ \right). \end{aligned}$$

($g=1.85$ 是同位旋矢量部分的核子反常磁矩.) 这函数形式正是和最近的实验材料的总结^[12]相同的.

用 a, b, t_r 和 γ 表出 N_{\pm} :

$$\begin{aligned} \frac{m}{\sqrt{2}} N_- - N_+ &= 2p_r^2 E_r \gamma \frac{t_r}{t_r + \gamma} \frac{g}{m} b, \\ N_- &= -\sqrt{2} E_r \gamma \frac{t_r}{t_r + \gamma} (a + 2gb). \end{aligned} \quad (3.8)$$

然后将(3.6)和(3.8)代入(3.5), 得

$$\begin{aligned} A_3^{(-)} &= 12\pi \frac{zq}{p} 2p_r^2 E_r \gamma \frac{t_r}{t_r + \gamma} \frac{g}{m} b \frac{\gamma q^3}{(t_r - t)^2 + \gamma^2 q^6}, \\ B_3^{(-)} &= -12\pi E_r \gamma \frac{t_r}{t_r + \gamma} (a + 2gb) \frac{\gamma q^3}{(t_r - t)^2 + \gamma^2 q^6}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

再作窄共振近似:

$$\frac{\gamma q^3}{(t_r - t)^2 + \gamma^2 q^6} \approx \pi \delta(t_r - t).$$

依此计算(2.7)和(2.8)式中末项,便可推得 $\pi\pi$ 作用对 πN 散射分波振幅贡献的形式为

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{1-x} [f_1^{(-)}(1) - f_1^{(-)}(x)]_{\pi\pi} &= \\ &= \frac{1}{1-x} \frac{(W+m)^2-1}{16\pi W^2} \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{dt' K_3(t', x)}{s - s_3(t', x)} [A_3^{(-)}(t', z) + (W-m)B_3^{(-)}(t', z)] = \\ &= \frac{-1}{1-x} \frac{3}{4} \frac{t_r \gamma}{t_r + \gamma} E_r K_3(t_r, x) \frac{(W+m)^2-1}{s[s - s_3(t_r, x)]} \times \\ &\quad \times \left\{ a \frac{g}{m} \left[m^2 + 1 - s_3(t_r, x) - \frac{t_r}{2} \right] + (a + 2gb)(W-m) \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

四、结果及讨论

我们对振幅实部

$$\begin{aligned} 3k \operatorname{Re} f_s^{(-)} &= \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_3), \\ 3k \operatorname{Re} f_{p\frac{1}{2}}^{(-)} &= \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_{11} - \sin 2\alpha_{31}), \\ 3k \operatorname{Re} f_{p\frac{3}{2}}^{(-)} &= \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_{13} - \sin 2\alpha_{33}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

作了数值计算,结果分别表示在图 1, 2, 3 中. 各图中虚线是取 $\gamma = 0$, 即只有极点项(耦合常数取作 $f^2 = 0.08$, $g^2/4\pi = 4m^2 f^2$) 和(3.3)态贡献时的结果. 可见无 $\pi\pi$ 作用时理论曲线不仅远离实验数据,而且可不遵守么正条件的限制——(4.1)式中三个量的绝对值都不应大于 1. 各图中实线是加上 $\pi\pi$ 作用后的总曲线. 根据 Hofstadter 等的结果^[12], 我们取了(3.10)式中参数为 $t_r = 20$, $a = b = -1.20$. 对 s 波和 $p\frac{3}{2}$ 波,我们尽量使总曲线在低能一方与实验相符,定出的共振参数都是 $\gamma = 0.08$, 这时理论曲线在 $k \lesssim 2$ 处和实验值符合得相当好. $p\frac{1}{2}$ 分波的相移值还不够确定. 图中分别画出了 $\gamma = 0.08$, 0.10 和 0.12 三种数值时的总曲线.

我们可以看到, $I = J = 1$ 的吸引的 $\pi\pi$ 作用是必需的,且 $\gamma = 0.08$ 大致能同时符合 s 波和 p 波的两个振幅. 由于本文所用的方法只在低能区生效,所以在图 1 和图 3 中高能一方略有偏离可能是被忽略去的高分波的影响. 另外,考虑高分波后, $\pi\pi$ 作用的贡献不再是(3.3)式

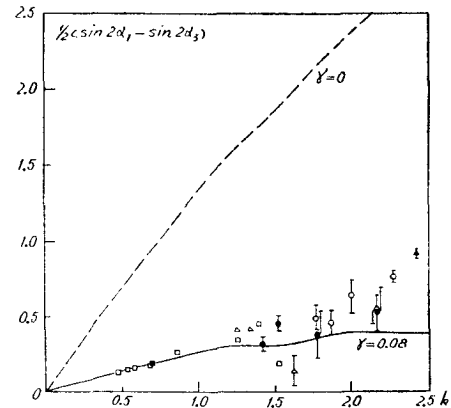
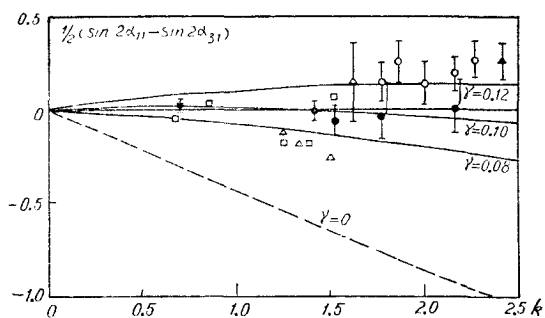
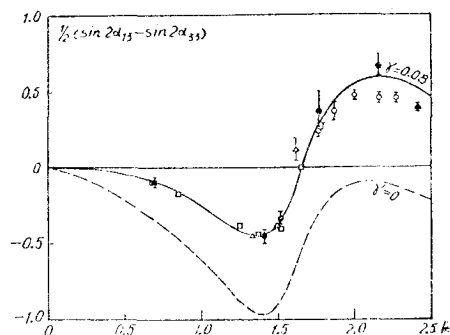


图 1 s 波

实验材料出处(图 2, 图 3 同)

- Barnes, S. W. et al., *Phys. Rev.*, **117** (1960), 226.
- Bethe, H. A. & de Hoffmann, F., "Mesons and Fields" (1955).
- △ Anderson, H. L. et al., *Phys. Rev.*, **91** (1953), 155; **100** (1955), 268 and 279.
- Chiu, H. Y. & Lomon, E. L., *Ann. Physics*, **6** (1959), 50.
- Зинов, В. Г. и др., *ЖЭТФ*, **38** (1960), 1407, SPD 分析.
- ▲ Walker, W. D. et al., *Phys. Rev.*, **118** (1960), 1612.

图 2 $p \frac{1}{2}$ 波图 3 $p \frac{3}{2}$ 波

所表示的简单比例, 这样就可能得到比较满意的 $p \frac{1}{2}$ 波的结果。

$\gamma = 0.08$ 时相应的能量平方的共振半宽度 $\Gamma = \gamma q_r^2 = 0.64$ 。与 Anderson 等^[13]由非弹性 $\pi-N$ 散射所定出的参数作比较, 其中 $t_r \approx 20 - 22$ 和 Hofstadter 的结果一致, 而 $\Gamma \approx 5$ 比我们的计算值大得多。为了与 Bowcock 等^[4]的计算结果比较, 我们在 (3.10) 式中与他们一样取 $t_r = 22.4$ 时定出 $\gamma \approx 0.10$, $\Gamma \approx 1.0$, 约为 Bowcock 等的结果的三分之一, 这是和 Hamilton 等^[5]的结论相近的。总之, 我们的结果换算为能量的共振半宽度只有 10—15 Mev, 比起一般的观察值 (ρ 介子宽度为 100 Mev 左右) 说来是太小了。

我们的计算方法的特点在于方程本身避免了发散的困难, 并且可以合理地只取最低角动量分波的 $\pi\pi$ 散射的贡献, $\pi\pi$ 项的形式比较简单、确定, 它在 s 复平面上集中在 $-6.5 \leq s \leq 0$ 的一小段负实轴上, 所以在 $\pi\pi$ 作用的计算过程中任意性比较小, 没有引入太多的近似, 结果可能是比较可靠的。

最后我们讨论一下可能引起修正的一些效应:

(1) 如果再多选一条定角曲线, 我们就可以包括 d 波在内, 这时可能改善 s 波和 $p \frac{3}{2}$ 波的高能方以及 $p \frac{1}{2}$ 波的符合情况, 并且可以和 d 波实部观察值作比较。但是在小角度中再添上一个二级效应, 误差一定增大许多, 实际计算有困难。

(2) 再散射修正——非(3,3)态虚部的贡献。这主要指 s 波振幅, 因为在所讨论的能量范围内, s 波相移已达到相当可观的数值。但是正如 Bowcock^[4]所指出的, 由于(-)振幅与二总同位旋振幅之差相联系, 这再散射效应是小的。根据 Hamilton^[5]的计算, s 波虚部的物理积分仅占实部观察值的十分之一以下, 在我们这情况下(参看图 1), 当然是可以忽略的。

另外还有方程收敛的好坏, 远奇点的影响和误差估计等问题还没有仔细考虑, 这里不一一讨论了。

本工作是在胡宁教授和韩其智老师指导下进行的, 前一部分工作是和宋行长同志共同完成的, 作者谨向他们表示由衷的谢意。

参 考 文 献

- [1] Mandelstam, S., *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1344; **115** (1959), 1741 & 1752.
 [2] Frazer, W. R. & Fulco, J. R., *Phys. Rev.*, **119** (1960), 1420.
 [3] Frautschi, S. C. & Walecka, J. D., *Phys. Rev.*, **120** (1960), 1486.
 [4] Bowcock, J., Cottingham, N. & Lurie, D., *Nuovo Cim.*, **16** (1960), 918; **19** (1961), 142.
 [5] Hamilton, J. & Sperman, T. D., *Ann. Physics*, **12** (1961), 172; Hamilton, J., Menotti, P., Sperman, T. D. and Woolcock, W. S., *Nuovo Cim.*, **20** (1961), 519; *Ann. Physics*, **17** (1962), 1.
 [6] Efreimov, A. V., Meshcheryakov, V. A., Shirkov, D. V. and Tzu H. Y., *Nucl. Phys.*, **22** (1961), 202.
 [7] Ефремов, А. В., Мещеряков, В. А. и Ширков, Д. В., *ЖЭТФ*, **39** (1960), 438, 1099.
 [8] 朱洪元, *中国科学*, **10** (1961), 44.
 [9] Chew, G. F., Goldberger, M. L., Low, F. E. and Nambu, Y., *Phys. Rev.*, **106** (1957), 1337.
 [10] Галанин, А. Д. и Грашин, А. Ф., *ЖЭТФ*, **41** (1961), 633.
 [11] Frazer, W. R. & Fulco, J. R., *Phys. Rev. Lett.*, **2** (1959), 365; *Phys. Rev.*, **117** (1960), 1603 and 1609.
 [12] Hofstadter, R. and Herman, R., *Phys. Rev. Lett.*, **6** (1961), 293; de Vries, C., Hofstadter, R. and Herman, R., *Phys. Rev. Lett.*, **8** (1962), 381.
 [13] Anderson, J. A. et al., *Rev. Mod. Phys.*, **33** (1961), 431; *Phys. Rev. Lett.*, **6** (1961), 365.

LOW-ENERGY PION-NUCLEON SCATTERING

GUAN HONG

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The fixed angle dispersion relations near forward direction are applied to the derivation of the integral equations of s -wave and p -wave pion-nucleon scattering amplitudes. The equations involve the contribution of annihilation process, in which the main contribution comes from the two pions intermediate state. In order to examine the effect of $\pi\pi$ interaction on pion-nucleon scattering, the observed values of scattering phase shifts are substituted into the equations, and the numerical calculation is given. Using the experimental informations of the form factors of the electro-magnetic structure of nucleon, and taking the square resonance energy $t_r = 20$, we obtain the $I = J = 1$ $\pi\pi$ scattering resonance width parameter $\gamma = 0.1$. This result is consistent with the experimental data of the all three low angular momentum partial wave amplitudes, but the resonance width is small compared with the observed value.