

## $\pi$ - $N$ 弹性散射的第二共振峰\* 1)

章 思 俊  
(北京大学物理系)

### 提 要

本文基于由推广的 Chew-Low (弹性散射) 静止理论所得的双介子近似下的分波方程, 在略去交叉项的贡献后求得其近似解。由很快上升的介子产生截面计算了  $\mathcal{D}_{3/2}$  道 ( $T=1/2$ ) 弹性散射截面, 定性和半定量地解释了  $\pi$ - $N$  第二共振处弹性散射截面中峰的出现、性质、位置和大小。

### 一、导 言

近年来, 在中能范围内  $\pi$ - $N$  相互作用的实验总截面中所发现的几个新峰, 引起了人们极大的注意。特别是入射介子动能(实验室系)为 600 Mev 和 900 Mev 两个共振峰, 它们主要在同位旋 1/2 态, 唯象分析指出, 这两个峰大部分是由  $\mathcal{D}_{3/2}$  和  $F_{3/2}$  角动量态分别引起的。实验发现, 在这两个共振处, 弹性散射截面和非弹性作用截面都出现极大<sup>[1]</sup>。

在中能范围内主要是弹性散射和单介子产生过程, 随入射介子能量的增加, 后者的相对重要性也就增加。它们由于么正性条件而紧密联系, 许多作者认为低能范围内可以忽略的介子产生现象是中能范围  $\pi$ - $N$  相互作用理论和实验研究的关键, 而弹性散射大都是衍射型的。目前研究得较多的是介子产生现象, 实验证实同时存在着激发态效应和介子云效应, 前者主要考虑低能  $\pi$ - $N$  3-3 共振作用, 而后者主要考虑  $\pi$ - $\pi$  共振作用<sup>[2]</sup>。故要解释中能范围  $\pi$ - $N$  相互作用的特征, 必须同时考虑介子产生和弹性散射过程, 并且必须同时考虑  $\pi$ - $\pi$  共振和  $\pi$ - $N$  3-3 共振两种相互作用。

关于第二 (600 Mev) 和第三 (900 Mev) 共振峰的性质, Peierls<sup>[3]</sup> 已经指出: 600 Mev (900 Mev) 共振的角动量及宇称是和  $2\pi$ - $N$  系统的如下组态相一致: 其中一个介子相对于核子处在  $p$  波  $j = 3/2$  态, 而另一个介子则在  $s$  波 ( $p$  波), 这些组态对应的能量粗略地和观察到的共振能量相一致, 弹性散射则主要经过  $2\pi$ - $N$  中间态而发生。近来 Carruthers<sup>[2]</sup> 同时考虑了  $\pi$ - $\pi$  共振和  $\pi$ - $N$  3-3 共振作用首次定量地计算了单介子产生截面, 初步解释了非弹性截面中共振的起因。但对于弹性散射的理论研究还刚开始, 尚无人同时考虑这两种作用的效果。Ball-Frazer 最近的工作<sup>[7]</sup>中只考虑了  $\pi$ - $\pi$  共振作用, 在物理上看来这是不够全面的。本文在 Carruthers 工作的基础上致力于弹性散射的研究, 其中第二节概述了推广的 Chew-Low 静止理论、解的普遍性质 (它和相互作用的具体形式无关), 并列出了双介子近似下的任意分波方程。第三节内在略去了交叉项的贡献后求得  $l \geq 2$  分波

\* 1962 年 12 月 21 日收到。

1) 本文是作者的毕业论文。

方程的近似解, 并利用 Carruthers 求得的单介子产生截面计算了  $\mathcal{D}_{3/2}$  道弹性散射截面, 定性和半定量地解释了第二共振处弹性散射截面中峰的出现、位置和大小, 从而和 Carruthers 的工作构成对第二共振峰的完整说明.

## 二、推广的 $\pi$ - $N$ 弹性散射静止理论概述, 双介子近似下的分波方程

由于相对论色散关系理论对介子产生现象尚不能真正进行定量计算, 目前有关单介子产生过程的定量理论大都采用静止核子近似. 这种静止理论的物理意义简明, 并且和相对论积分方程有一一对应的关系, 故它适用于初步探讨现象的主要特征, 为相对论理论的精确处理奠定了基础.

Carruthers<sup>[2]</sup> 指出: 可以不指定相互作用的具体形式而导出弹性散射振幅和介子产生振幅在静止近似下的 Low 方程. 现在我们列出弹性散射的 Low 方程: 介子由初态  $q$  到终态  $p$  的跃迁矩阵元  $T_{p,q} = \langle p - |V_q|0 \rangle$  满足

$$T_{p,q} = T_{p,q}^{\pi\pi} - \sum_n \left\{ \frac{\langle 0|V_q|n \rangle \langle n|V_p^+|0 \rangle}{E_n + \omega_p - i\varepsilon} + \frac{\langle 0|V_p^+|n \rangle \langle n|V_q|0 \rangle}{E_n - \omega_p - i\varepsilon} \right\}, \quad (2.1)$$

其中  $V_q = [H_I, a_q^+] = V_q^{\pi\pi} + V_q^{\pi N}$ ,  $H_I = H_{\pi\pi} + H_{\pi N}$ , 所用符号均同文献 [2].  $T_{p,q}^{\pi\pi} = \langle 0|[a_p, V_q]|0 \rangle$  代表直接作用振幅.

利用与相互作用具体形式无关的恒等式:

$$V_{-p} \equiv V_p^+, \quad V_{-q} \equiv V_q^+, \quad (2.2)$$

$$[a_p, V_q] \equiv [V_p^+, a_q^+] \equiv [a_{-q}, V_{-p}] \quad (2.3)$$

及由此导得的

$$[T_{q,p}^{\pi\pi}]^+ = T_{p,q}^{\pi\pi}, \quad T_{q,-p}^{\pi\pi}(-\omega) = T_{p,q}^{\pi\pi}(\omega). \quad (2.4)$$

我们证明了由 (2.1) 确定的振幅  $T_{p,q}$  满足么正性条件和交叉对称条件.

若记

$$T_{n,q} = \langle n - |V_q|0 \rangle, \\ T_{n,p}^+ = \langle n - |V_p|0 \rangle^* = \langle 0|V_p^+|n - \rangle,$$

则么正性条件可表为

$$T_{q,p}^+ - T_{p,q} = 2\pi i \sum_n \delta(E_n - \omega_p) T_{n,p}^+ T_{n,q}, \quad (2.5)$$

而交叉对称条件则要求

$$T_{p,q}(\omega) = T_{-q,-p}(-\omega). \quad (2.6)$$

仿照 Chew-Low<sup>[4]</sup>, 我们可定义复变函数

$$t_{p,q}(z) = - \sum_n \left\{ \frac{\langle 0|V_q|n \rangle \langle n|V_p^+|0 \rangle}{E_n + z} + \frac{\langle 0|V_p^+|n \rangle \langle n|V_q|0 \rangle}{E_n - z} \right\}, \quad (2.7)$$

则有

$$\lim_{z \rightarrow \omega + i\varepsilon} t_{p,q}(z) = T_{p,q}(\omega) - T_{p,q}^{\pi\pi}(\omega). \quad (2.8)$$

由(2.4), (2.7), 函数  $t_{p,q}(z)$  具有 Chew-Low 所指出的五个性质<sup>1)</sup>: (A) 满足么正性条件(2.5); (B) 是厄米矩阵函数:  $t_{p,q}(z) = t_{q,p}^+(z^*)$ , 满足交叉对称条件:  $t_{p,q}(z) = t_{-q,-p}(-z)$ ; (C) 在  $z = 0$ , 函数  $t_{p,q}(z)$  有极点, 其留数是  $R_{p,q} = \langle 0|V_p^+|0\rangle\langle 0|V_q|0\rangle - \langle 0|V_q|0\rangle\langle 0|V_p^+|0\rangle$ ; (D) 当  $z \rightarrow \infty$  时,  $t_{p,q}(z)$  的渐近行为如  $1/z$ ; (E) 具有  $z = \pm 1, \pm 2, \dots$  的分支点, 割线从  $z = +1$  起沿正实轴到  $+\infty$ ,  $z = -1$  起沿负实轴到  $-\infty$ . 这样按照 Chew-Low 的论证, 求满足积分方程(2.7)的解就归结为找寻具有上述性质的厄米矩阵函数  $t_{p,q}(z)$ , 通过(2.8)可求得物理散射振幅  $T_{p,q}(\omega) - T_{p,q}^{\pi\pi}(\omega)$ . 上面的论述和相互作用的具体形式无关, 故可认为静止 Low 方程是一种“准色散关系”, 它是求解分波积分方程的理论基础. 相互作用的具体形式只是用来确定过程的动力学原因——即方程的非均匀项的结构.

在单介子近似下, 如果非均匀项只取零介子项, 则由不变性和守恒定律, 只能有  $p$  波散射, 这是核子静止近似和介子的赝标性质的直接后果. 利用这种“玻恩近似”, 成功地解释了低能  $\pi-N$  实验的主要特征, 所以单介子近似和直接  $\pi-\pi$  作用振幅的忽略在低能时是合理的. 为了说明中能范围的散射现象, 在静止理论中必须考虑  $\pi-\pi$  作用和双介子近似, 这里以  $\mathcal{D}$  波散射(第二共振)为例, 假设直接  $\pi-\pi$  作用仍不占主要地位, 则  $\mathcal{D}$  波散射的动力学机构是经双介子中间态而引起. 如引言中所指出的, 弹性散射和介子产生过程是相互影响的, 原则上应该联立求解散射振幅在双介子近似下的方程和产生振幅在单介子近似下的方程. 我们沿着 Carruthers 的工作线索, 采用“逐次渐近”来解决这个问题.

在双介子近似下, 方程的明显形式是

$$\begin{aligned}
 T_{p,q} = T_{p,q}^{\pi\pi} - & \left\{ \frac{\langle 0|V_q|0\rangle\langle 0|V_p^+|0\rangle}{\omega_p} + \frac{\langle 0|V_p^+|0\rangle\langle 0|V_q|0\rangle}{-\omega_p} \right\} - \\
 & - \sum_k \left\{ \frac{\langle 0|V_q|k-\rangle\langle k-|V_p^+|0\rangle}{\omega_p + \omega_k} + \frac{\langle 0|V_p^+|k-\rangle\langle k-|V_q|0\rangle}{\omega_k - \omega_p - i\epsilon} \right\} - \\
 & - \sum_{k,r} \left\{ \frac{\langle 0|V_q|kr-\rangle\langle kr-|V_p^+|0\rangle}{\omega_p + \omega_r + \omega_k} + \frac{\langle 0|V_p^+|kr-\rangle\langle kr-|V_q|0\rangle}{\omega_k + \omega_r - \omega_p - i\epsilon} \right\}. \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

利用守恒定律和角动量的已知性质, 可将方程内有关角度、自旋、电荷的变数分离出来, 从而得到动力学上感兴趣的方程——这种手续即所谓“分波分析”.

态矢量的完全标志如下: 初态  $|q\rangle = |\mathbf{q}\alpha, \tau m_s\rangle$ , 终态  $|p\rangle = |\mathbf{p}\beta, \tau' m'_s\rangle$ , 中间单核子态  $|0\rangle = |\tau'' m''_s\rangle$ , 中间单介子态  $|k\rangle = |\mathbf{k}\gamma, \tau'' m''_s\rangle$ , 中间双介子态  $|rk\rangle = |\mathbf{k}\gamma, \mathbf{r}\delta, \tau'' m''_s\rangle$ . 这里选定总质心系为参考系, 核子动量可以不标明. 所用记号全同文献[2], 这里不多叙述. 例如初态:  $\mathbf{q}$  代表介子动量,  $\alpha$  代表介子电荷态,  $\tau$  代表核子电荷态,  $m_s$  代表核子自旋.

以角动量约化为例, 分波分析的手续如下<sup>[2,5,6]</sup>: 首先将各种跃迁振幅按和一定的总角动量态相应的子矩阵展开, 如对散射矩阵元有(同位旋变数暂不标明)

$$\langle p|V_q|0\rangle = \langle \mathbf{p}m'_s|T|\mathbf{q}m_s\rangle = \sum_{Jl} B_{Jl}^{m'_s m_s}(\hat{\beta}, \hat{q}) T_{Jl}(\omega_p, \omega_q), \quad (2.10)$$

1) 本文采取下列单位:  $\hbar = \mu = c = 1$ ,  $\mu$  是  $\pi$  介子静止质量.

其中

$$B_{Ji}^{m'_s m_s}(\hat{p}, \hat{q}) = \sum_M C\left(l \frac{1}{2} J; M - m'_s, m'_s\right) C\left(l \frac{1}{2} J; M - m_s, m_s\right) \times \\ \times Y_{l, M - m'_s}(\hat{p}) Y_{l, M - m_s}^*(\hat{q}), \quad (2.11)$$

而对交叉矩阵元有

$$\langle k - |V_p^\dagger|0\rangle = \langle \mathbf{pk}, m_s'' | T | m_s \rangle = \\ = \sum_{J_l, m_p} C\left(l_k \frac{1}{2} J; m_k m_s''\right) C\left(l_p J \frac{1}{2}; m_p, M\right) \times \\ \times Y_{l_p m_p}(\hat{p}) Y_{l_k m_k}(\hat{k}) T_{Jl}(\omega_p \omega_k, 0), \\ m_k + m_s'' = M, M + m_p = m_s.$$

将各种分波展开式代入方程(2.9)中,并完成对中间态角度自旋变数的求和,利用守恒定律及球函数和  $C$ - $G$  系数的正交性、循环关系,将方程中所有项的角度自旋依赖关系全用算符  $B_{Ji}^{m'_s m_s}(\hat{p}, \hat{q})$  和  $B_{Ji}^{m'_s m_s}(\hat{q}, \hat{p})$  表示,后者是从交叉项中分离出来的,和非交叉项的差别仅在于  $\hat{p}, \hat{q}$  的位置对换.然后略去核子自旋指标,将它看成核子自旋空间的矩阵方程,利用投影算符  $B_{Jl}(\hat{p}, \hat{q})$  的明显形式和正交性质<sup>[5,6]</sup>,可以求得我们所要的方程.同位旋分析完全相似,最终的分波方程如下:

$$T_{T, J_l}(\omega_p, \omega_q) = T_{T, J_l}^{*}(\omega_p, \omega_q) + \frac{T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} 1}^*(0, \omega_p) T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} 1}(0, \omega_q)}{\omega_p} \delta_{T, \frac{1}{2}} \delta_{J, \frac{1}{2}} \delta_{l, 1} - \\ - \frac{T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} 1}^*(\omega_q, 0) T_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} 1}(\omega_p, 0)}{\omega_p} \delta_{l, 1} \lambda_{TJ} - \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{T_{T, J_l}^*(\omega_k, \omega_p) T_{T, J_l}(\omega_k, \omega_q)}{\omega_k - \omega_p - i\epsilon} - \\ - \sum_{i, j, l_r, l_k} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r^2 dr \cdot k^2 dk}{2 \cdot (2\pi)^6} \frac{T_{T, J_l}^*(\omega_r, \omega_k, \omega_p) T_{T, J_l}(\omega_r, \omega_k, \omega_q)}{\omega_r + \omega_k - \omega_p - i\epsilon} - \\ - \sum_{T' J'} M_{T' J'}^{(l)} \left( \frac{2}{2J' + 1} \right) \left( \frac{2}{2T' + 1} \right) \left\{ \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \times \frac{T_{T', J_l}^*(\omega_q \omega_k, 0)}{\omega_k + \omega_p} \times \right. \\ \times T_{T', J_l}(\omega_p \omega_k, 0) + \\ \left. + \sum_{i, j, l_r, l_k} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k^2 dk \cdot r^2 dr}{2 \cdot (2\pi)^6} \frac{T_{T', J_l}^*(\omega_q \omega_r, \omega_k, 0)}{\omega_r + \omega_k + \omega_p} \times T_{T', J_l}(\omega_p \omega_r, \omega_k, 0) \right\}, \quad (2.12)$$

而  $i, j$  是三粒子间两个粒子耦合的中间同位旋和角动量量子数.其中交叉矩阵是

$$M_{T' J'}^{(l)} = \frac{1}{3(2l+1)} \begin{pmatrix} 1 & -2(l+1) & -4 & 8(l+1) \\ -2l & -1 & 8l & 4 \\ -2 & 4(l+1) & -1 & 2(l+1) \\ 4l & 2 & 2l & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

矩阵行列次序按  $(T, J) = \left(\frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}, l - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{2}, l + \frac{1}{2}\right)$  排列.

而

$$\lambda_{TJ} = \begin{cases} -\frac{1}{9} & \text{当 } l=1 & T = \frac{1}{2} & J = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{9} & l=1 & T = \frac{1}{2} & J = \frac{3}{2} \\ \frac{2}{9} & l=1 & T = \frac{3}{2} & J = \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{9} & l=1 & T = \frac{3}{2} & J = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (2.14)$$

方程(2.9)的分波分析只依赖于相互作用遵从守恒定律, 而和其细节无关, 得到两个结论:

(1) 零介子项只有  $p$  波散射,  $p$  波方程结构和 Chew-Low<sup>[4]</sup> 一样, 但现包含双介子项. 高分波 ( $l \geq 2$ ) 方程无零介子项的贡献.

(2) 在  $l$  分波振幅的方程中, 只含有  $l$  分波但  $T, J$  不同的交叉振幅. 交叉矩阵  $M_{TJ, T'J'}^{(l)}$  是四阶矩阵, 而  $l=1$  时和 Chew-Low 所得的相同.

### 三、高分波方程的解, $\pi$ - $N$ 第二共振的弹性散射峰的解释

现在我们转入求解高分波 ( $l \geq 2$ ) 散射方程, 为此需进一步做有关散射机构的动力学假设. 由(2.12)的结构, 产生高分波散射有两种原因: 直接  $\pi$ - $\pi$  作用和介子产生过程. 按导言所述, 中能范围内介子产生现象可能是最本质的, 故可合理地略去  $T_{T, J_l}^*$  及交叉项的贡献, 后者是由于具有相对大的能量分母的缘故, 所以相应的高分波散射机构完全是衍射型的(图1).

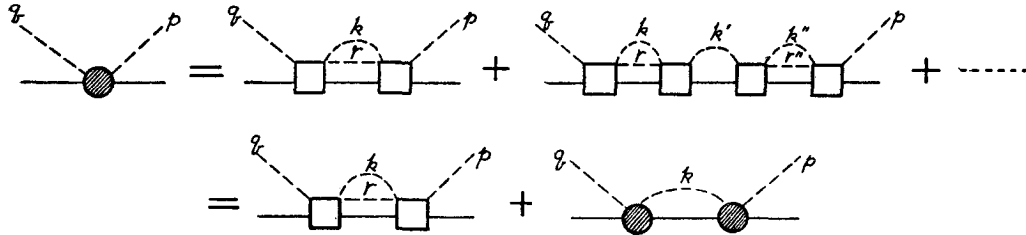


图1 高分波散射机构

我们的任务是由已知的产生过程截面求出弹性散射较高分波 ( $l \geq 2$ ) 振幅. 在所假设下, 分波方程(2.12)简化为 ( $l \geq 2$ )

$$T_{T, J_l}(\omega_p, \omega_q) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{k^2 dk T_{T, J_l}^*(\omega_k, \omega_p) T_{T, J_l}(\omega_k, \omega_q)}{\omega_k - \omega_p - i\epsilon} - \sum_{i, \alpha} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{r^2 dr k^2 dk T_{T_i, J_{\alpha l}}^*(\omega_r, \omega_k, \omega_p) T_{T_i, J_{\alpha l}}(\omega_r, \omega_k, \omega_q)}{2 \cdot (2\pi)^6 \omega_r + \omega_k - \omega_p - i\epsilon}. \quad (3.1)$$

这里  $\omega_p = \omega_q = \omega$ ,  $\alpha$  代表中间角动量量子数  $j_l, l_k$ .

按照 Chew-Low 和 Carruthers, 我们设

$$T_{T, J_l}(\omega_p, \omega_q) = -\frac{8\pi^2 pq v(p) v(q)}{(\omega_p \omega_q)^{1/2}} h_{T, J_l}(\omega_p, \omega_q),$$

$$T_{T_i, J_{\alpha l}}(\omega_r, \omega_k, \omega_q) = (4\pi)^3_i \frac{r k q v(r) v(k) v(q)}{(\omega_r \omega_k \omega_q)^{1/2}} \varphi_{T_i, J_{\alpha l}}(\omega_r, \omega_k, \omega_q);$$

并利用  $\omega_p = \omega_q$ , 方程可简化为

$$h_{T,Jl}(\omega_p, \omega_q) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega_k \cdot k^3 v^2(k) \frac{|h_{T,Jl}(\omega_k, \omega_q)|^2}{\omega_k - \omega_p - i\varepsilon} + \frac{4}{\pi^2} \int_1^\infty \int_1^\infty d\omega_r d\omega_k r^3 v^2(r) k^3 v^2(k) \left[ \sum_{i,a} \frac{|\varphi_{Tl,Ja}(\omega_r, \omega_k, \omega_q)|^2}{\omega_r + \omega_k - \omega_p - i\varepsilon} \right]. \quad (3.2)$$

相应于(2.7), 我们通过下列积分方程定义复变函数:

$$h_{T,Jl}(z, \omega_q) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty d\omega_k k^3 v^2(k) \frac{|h_{T,Jl}(\omega_k, \omega_q)|^2}{\omega_k - z} + \frac{4}{\pi^2} \int_1^\infty \int_1^\infty d\omega_r d\omega_k r^3 v^2(r) k^3 v^2(k) \left[ \sum_{i,a} \frac{|\varphi_{Tl,Ja}(\omega_r, \omega_k, \omega_q)|^2}{\omega_r + \omega_k - z} \right], \quad (3.3)$$

其中参数  $\omega_q = \omega$  保持固定.

引入相移, 可简化(3.3), 假设

$$h_{T,Jl}(\omega_p, \omega_q) = \frac{1}{v^2(q) \cdot q^3} f(\omega_q) \quad \omega_p = \omega_q, \quad (3.4)$$

$$f(\omega_q) = \frac{e^{2i\delta} - 1}{2i},$$

其中  $\delta(\omega_q)$  是相移, 当  $\omega_q$  比介子产生阈能  $\omega_0$  大时, 它是复数  $\delta = \delta_R + i\delta_I$ ,  $\delta_I > 0$ .

利用截面的表示式

$$\sigma_{T,Jl}^{el}(\omega_q) = \frac{4\pi(J+1/2)}{q^2} |f(\omega_q)|^2, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{T,Jl}^{prod}(\omega_q) = 8\pi(J+1/2)q \int_1^\infty \int_1^\infty r^3 k^3 v^2(r) v^2(k) \delta(\omega_r + \omega_k - \omega_q) \times \left[ \sum_{i,a} |\varphi_{Tl,Ja}(\omega_r, \omega_k, \omega_q)|^2 \right] d\omega_r d\omega_k. \quad (3.6)$$

由方程(3.2)或(3.3)得

$$\text{Im } h_{T,Jl}(\omega_p, \omega_q) = q^3 v^2(q) |h_{T,Jl}(\omega_q)|^2 + \frac{1}{4\pi(J+1/2)} \sigma_{T,Jl}^{prod}(\omega_q).$$

但由定义(3.4), 又有

$$\text{Im } h_{T,Jl}(\omega_p, \omega_q) = \frac{1}{v^2(q)q^3} \left[ |f(\omega_q)|^2 + \frac{1 - \eta^2(\omega_q)}{4} \right] \quad \eta = e^{-2\delta_I}.$$

所以得到

$$\sigma_{T,Jl}^{prod}(\omega_q) = \frac{4\pi\left(J + \frac{1}{2}\right)}{q^2} \left[ \frac{1 - \eta^2}{4} \right]. \quad (3.7)$$

这样由已知的介子产生截面可确定相移的虚部  $\delta_I$  或  $\eta$ .

我们的目的是由已知的  $\eta$  来确定分波振幅. 和第二节中对方程(2.7)的讨论相应, 求解(3.3)完全相应于找寻具有下列性质的解析函数:

$$(A') \text{ 满足么正性条件: 当 } z \rightarrow \omega_q + i\varepsilon, \omega_q > \omega_0 \text{ 时, } h(z, \omega_q) \rightarrow \frac{1}{q^3 v^2(q)} \frac{e^{2i\delta} - 1}{2i},$$

$\delta = \delta_R + i\delta_I$ , 而  $\delta_I > 0$  并具有已知值.

$$(B') \quad h^*(z, \omega_q) = h(z^*, \omega_q).$$

$$(C') \quad \text{当 } z \rightarrow \infty \text{ 时, } h(z, \omega_q) \rightarrow \frac{1}{z}.$$

(D') 具有分支点  $z = +1, +2, \dots$ , 割线从  $z = +1$  起沿正实轴到  $+\infty$ . [现在  $h_{T,II}(z, \omega_q)$  无交叉对称性质和极点.]

根据与 Ball-Frazer<sup>[7]</sup> 相似的方法, 可以求得方程 (3.3) 的一个近似解, 令

$$h_{T,II}(z, \omega_q) = \frac{1}{q^2 v^2(q)} A(z), \quad (3.8)$$

并取

$$A(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} f(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}} \frac{e^{2i\delta(z)} - 1}{2i}, \quad (3.9)$$

其中  $\sqrt{z^2 - 1}$  的割线和单值分支规定见图 2. 为使  $h_{T,II}(z, \omega_q)$  满足条件 (A')—(E'),

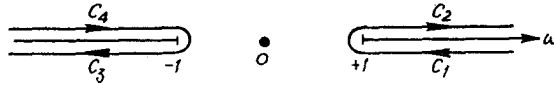


图 2  $\sqrt{z^2 - 1}$  的单值分支和割线的规定

$C_1$  上取  $-q$ ,  $C_2$  上取  $+q$ ,  $C_3$  上取  $+q$ ,  $C_4$  上取  $-q$

只需找寻解析函数  $\delta(z)$ , 它当变数  $z \rightarrow \omega_q + i\epsilon$ ,  $\omega_q > \omega_0$  时, 具有给定的虚部  $\delta_I$ , 在  $|\operatorname{Re} z| > 1$  时有,  $\delta^*(z) = -\delta(z^*)$ . 这样的  $\delta(z)$  容易找到:

$$\delta(z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta_I(\omega')}{q'(\omega' - z)} d\omega', \quad (3.10)$$

这里  $q' = \sqrt{\omega'^2 - 1}$ . 当  $z \rightarrow \omega_q + i\epsilon$  时, 立即求得相移实部

$$\delta_R(\omega_q) = \frac{q}{\pi} \mathfrak{P} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\delta_I(\omega')}{q'(\omega' - \omega_q)} d\omega', \quad (3.11)$$

而分波散射振幅是

$$T_{T,II}(\omega_p, \omega_q) = -\frac{8\pi^2 e^{2i\delta}}{\omega_q} \frac{1}{2iq}. \quad (3.12)$$

应该指出, 由于运动学因子  $\sqrt{z^2 - 1}$  引入附加的分支点  $z = -1$  和从  $-1$  起沿负实轴到  $-\infty$  的割线, 这使得  $A(z)$  在负实轴 ( $z = -\omega_q < -1$ ) 上有附加的跳跃

$$\lim_{z \rightarrow -\omega_q + i\epsilon} A(z) = e^{2i\delta_R(-\omega_q)} \times \lim_{z \rightarrow -\omega_q - i\epsilon} A(z),$$

其中  $\delta_R(-\omega_q)$  由 (3.11) 决定.

作为初步近似, 这个附加的奇异性并不要紧, 原因是  $\delta_R(-\omega_q)$  数值很小, 可以忽略. 另一方面, 这附加奇异性 and 原始方程 (2.7) 的解的交叉割线位置相同. 故解 (3.10) 可作为动力学上只考虑右割线 ( $z = +1 \rightarrow +\infty$ ) 贡献的近似解, 而且和具有交叉对称性的严格解定性上相似.

现在我们利用求得的近似解来计算弹性散射截面. 为此应先求得  $\eta(\omega)$  或  $\delta(\omega)$ . 我们将采用 Carruthers 关于单介子产生过程的理论. 相应的产生机构是: 入射介子首先和

核子云中的虚介子在  $l_{\pi\pi} = j_{\pi\pi} = 1$  共振态碰撞, 然后所产生的两个低能介子中的一个又和核子在低能 3-3 态不断发生再散射, 另一个介子的能量随入射介子动能的高低而定, 见图 3.

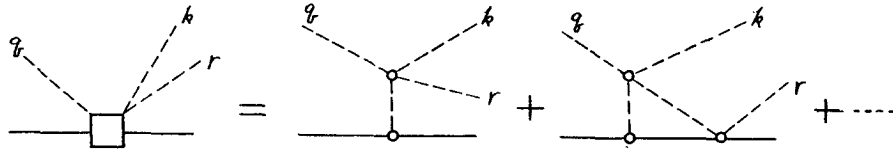


图 3 单介子产生机构

Carruthers 已求得具有 3-3 再散射效应的产生振幅, 在出射介子  $r$  的能量  $\omega_r$  近于 3-3 共振能量  $\omega^{res}$  时, 它可近似表为

$$\varphi_{\beta} \cong e^{i\delta(\omega_r)} \sin \delta(\omega_r) \cdot \frac{\omega_r}{r^3 v^2(r)} \frac{\mathfrak{P}}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} d\omega' \cdot \frac{r'^3 v^2(r') \varphi_{\beta}^{\pi\pi}(\omega' \omega_k, \omega_q)}{\omega'(\omega' - \omega_r)}$$

其中  $\beta = (T\mu, Jj_l, l_k l_l) = (T \frac{3}{2}, J \frac{3}{2} 1l_k l_l)$ ,  $r' = \sqrt{\omega'^2 - 1}$ . 对于  $\mathcal{D}_{3/2} \rightarrow sp_{3/2}$  跃迁, 他近似地得到分波产生截面(文献[2](8-10)式):

$$\sigma_{\mathcal{D}_{3/2} \rightarrow sp_{3/2}}^{\text{prod}} = \frac{8q\Lambda}{\pi[1 + (\omega_q/M)]} \left( \frac{9f\Gamma}{2\pi\alpha} \right)^2 \int_1^{\omega_q^{-1}} d\omega_r \cdot \omega_r^2 \sigma_{33}(\omega_r) \frac{|I_1|^2}{rk}, \quad (3.13)$$

其中  $\Lambda = \left( \sum_{T, l=0,2} a_{Tl} \xi_{Tl} \right)^2 + \left( \sum_T a_{T1} \xi_{T1} \right)^2$ . 符号的詳細意义見原文[2].

由于(3.13)中积分号下含有尖锐峰值的 3-3 共振散射截面  $\sigma_{33}(\omega_r)$ , 故只有当积分上限  $\omega_q - 1$  比共振能量  $\omega^{res}$  大时, 积分值才是大的. 这要求入射介子能量  $\omega_q > \omega^{res} + 1$ . 所以当  $\omega_q$  超过产生一个介子具有形成 3-3 激发态的能量而另一介子静止的阈能时, 产生截面有很快的上升, Carruthers 认为这是  $\mathcal{D}_{3/2}$  道共振(第二共振)的原因, 它使产生截面具有一个尖锐的峰.

和 Ball-Frazer 的分析相似, 我们将看到如此尖锐的很快上升的非弹性(产生)截面将引起弹性散射截面中也有尖锐的峰出现.

在对  $\sigma_{33}(\omega_r)$  作零宽度近似后, 得到

$$\sigma_{\mathcal{D}_{3/2} \rightarrow sp_{3/2}}^{\text{prod}} = \frac{64q\Lambda}{3\pi(1 + \omega_q/M)} \left( \frac{9f^2\Gamma}{\alpha} \right)^2 \frac{(\omega^{res})^2}{k_{res}} |I_1^{res}|^2, \quad (3.14)$$

这里  $\omega^{res} + \omega_k = \omega_q$ , 由此可确定  $k_{res}$ . 由于在第二共振附近,  $T = 3/2$  截面中并无共振现象, 且数值也很小, 因此我们将用  $\sigma_{\mathcal{D}_{3/2}}^{\text{prod}}(T = 1/2) \cong \frac{3}{2} \sigma_{\mathcal{D}_{3/2} \rightarrow sp_{3/2}}^{\text{prod}}(\pi^- p)$  来求  $T = \frac{1}{2}$  态的  $\mathcal{D}_{3/2}$  道产生截面, 而  $\sigma_{\mathcal{D}_{3/2} \rightarrow sp_{3/2}}^{\text{prod}}(\pi^- p)$  可由(3.14)得到, 其中取  $\Lambda = 0.11$ .

应用 Frazer-Fulco 关于  $p$  波  $\pi$ - $\pi$  共振的位置 ( $2\pi$  质心系总能量平方是 10) 及 Carruthers 关于  $I_1^{res}$  的数值结果, 得到产生截面的四点理论值, 见表 1 与图 4. 其中  $\Gamma$  和 Frazer-Fulco 共振公式中的宽度  $\Gamma'$  有下列联系:  $\Gamma' = \frac{\pi\Gamma}{\pi + \zeta\Gamma}$ ,  $\zeta = 3.9$ .

表 1

点的标记	D	A	B	C
$\omega_q$	3.10	3.46	3.64	4.47
相应的介子	$k = 0$	$k = \frac{1}{2}$	$k = 1$	$k = 2$
质心系动量值	$\omega_r = \omega^{res}$	$r = 2$	$r = 2$	$r = 2$
$\sigma_{D_{3/2}}^{prod} (T = \frac{1}{2})$	0	$\frac{3}{2} \cdot 34I^2$	$\frac{3}{2} \cdot 47I^2$	$\frac{3}{2} \cdot 37I^2$

但我们的解(3.10)需要知道整个产生截面随能量如何变化,所以我们选取适当的  $\pi-\pi$  耦合常数,使上述四点理论值全被么正极限  $2\pi k^2$  所限制(见图4)。由此确定出的宽度  $\Gamma = 0.078$  相应于  $\Gamma' = 0.071$ ,大约是 Frazer-Fulco 从核子电磁结构中所获得的值的  $\frac{1}{5}$ 。

Carruthers 指出,若采用较高的共振位置,则  $\Gamma$  将增大。而整个产生截面,则近似用经过头三点(D, A, B)而很快上升到么正极限的曲线代表。由此定出  $\eta$  和  $\delta_I$ , 并代入(3.11)完成数值积分,我们算得  $\delta_R$  和弹性散射截面。结果列在表2(参见图5,图6)。

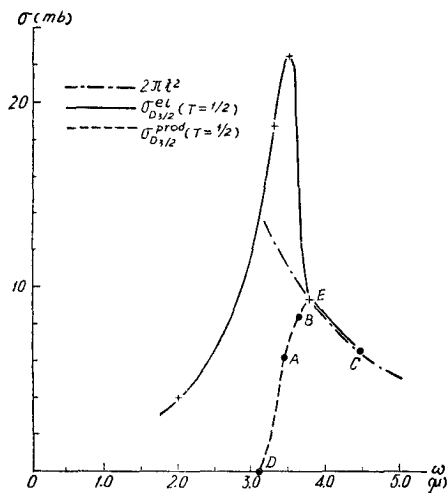


图4  $D_{3/2}(T = 1/2)$  道截面图

散射共振,极大的数值约为 22 mb, 所以由我们的计算结果,得到和实验相接近的共振位置和截面的数值<sup>1)</sup>。

在我们的模型中,这弹性共振物理上的起因是:它主要由非弹性产生过程引起,具有衍射散射的性质,相应于产生一个介子在  $p_{3/2}$  态,另一个介子在  $s$  态。由于这种产生过程在经过和上述组态相应的阈能  $\omega_q = \omega^{res} + 1$  时作用特别强烈,从而导致弹性散射中也出现共振。

表 2

$\omega_q$	2.00	3.30	3.50
$\delta_R$	9.0°	38.9°	54.7°
$\sigma_{D_{3/2}}^{el} (T=1/2)(mb)$	4.05	18.8	22.6

整个弹性散射截面由于么正极限而具有尖锐的峰(见图4),它在  $\omega_q = 3.50$  (相应入射介子实验室系动能 640 Mev) 附近上升到极大值,这可认为是实验中发现的  $D_{3/2}, T = \frac{1}{2}$  的弹性

1) 由文献[1],第二共振(600 Mev)处  $T = 1/2$  态的截面实验数值是

$$\sigma_{tot} = 60 \text{ mb}, \sigma_{el} = 35 \text{ mb}, \sigma_{inel} = 25 \text{ mb}.$$

由较高能(1500 Mev 以上)可知,非共振背景约为 30 mb,可合理地设背景中弹性截面为 15 mb,非弹性截面为 15 mb,则实验的共振截面约为

$$\sigma_{el} (T = 1/2, D_{3/2}) \cong 20 \text{ mb},$$

$$\sigma_{inel} (T = 1/2, D_{3/2}) \cong 10 \text{ mb}.$$

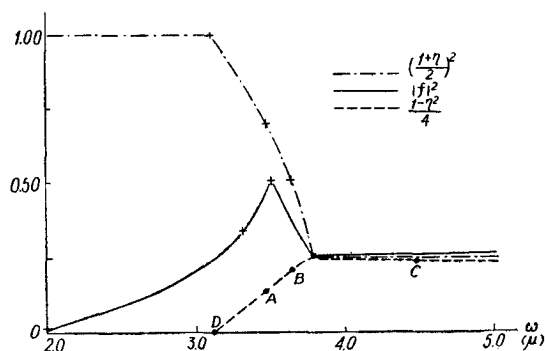


图 5

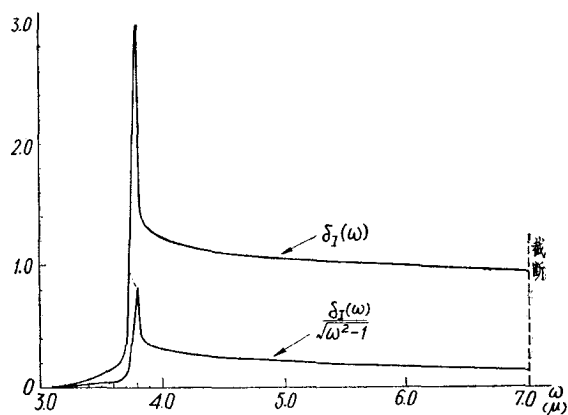


图 6

和 Ball-Frazer<sup>[7]</sup>的工作比較,我們的工作基于靜止理論,同时考虑了两种基本作用,物理上較為合理。他們是基于相对論色散关系,但只考虑  $\pi$ - $\pi$  共振作用,物理上不够全面。处理方法两者基本相似,他們的解較為严格,沒有附加奇异性出現。

#### 四、結 語

本文首先进一步討論了推广的靜止理論的普遍性質,指出它和相互作用形式无关,是一种准色散关系,并且首次推导得任意級分波方程。然后利用上述普遍的靜止理論,通过一个較為合理的模型,定性和半定量地解释了  $\pi$ - $N$  第二共振中弹性散射峯的出現、位置和大小,結果和实验大致相符,从而和 Caruther 的工作构成对  $\pi$ - $N$  第二共振的完整說明。方程的解和数值計算較為粗略,关于共振位置和截面随能量的变化情况是可信的,但关于散射截面的真实大小和峯的精确形状則需等待产生截面更詳細的定量知識。本文还只是对中能弹性散射的一个初步研究,今后尚需在理論上进一步探索,特别是考虑核子反冲所引起的效应。

最后作者对导师胡宁教授的热心指导表示衷心的感谢。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] Falk-Vairant, P. and Valladas, G., *Review of modern Physics*, **33** (1961), 362.
- [ 2 ] Carruthers, P., *Annals of Physics*, **14** (1961), 229.
- [ 3 ] Peierls, R. F., *Phys. Rev.*, **118** (1960), 325.
- [ 4 ] Chew, G. F. and Low, F. E., *Phys. Rev.*, **101** (1956), 1570.
- [ 5 ] Ciulli, S. and Fischer, J., *Nuovo Cimento* [10], **12** (1959), 264.
- [ 6 ] Ritus, V. I., *Soviet Physics (JETP)*, **5** (1957), 1249.
- [ 7 ] Ball, J. S. and Frazer, W. R., *Phys. Rev. Lett.*, **7** (1961), 204.

THE SECOND RESONANCE IN  $\pi - N$  ELASTIC SCATTERING

CHANG SHIH-CHUN

*(Department of Physics, Peking University)*

## ABSTRACT

The extended Chew-Low equation for  $\pi - N$  scattering under two pion approximation is solved by neglecting contribution from the crossing terms. From rapidly increasing pion-production cross-section we calculated the elastic scattering cross-section of the  $D_{3/2}$  channel ( $T=1/2$ ). The peak of elastic scattering cross-section in the second resonance is explained.