

# 平 面 輻 射 器 的 声 場\*

張 仁 和  
(中 国 科 学 院)

## 提 要

本文討論了垂直放置于分层介质中的平面輻射器所产生的声場。計算表明: 平面輻射器的声場, 可由某一綫性微分算符作用于球面点源的解而得到, 而且此綫性算符与輻射器在均匀空間中的指向系数相联系。本文对分层介质中的簡正波进行了討論。对于具有水平对称軸的平面輻射器, 当距离足够远时, 其每一号簡正波等于指向系数乘上相应球面点源的簡正波; 平面輻射器的簡正波在水平方向具有确定的指向性。

## 一、引 言

众所周知, 无指向性的球面点源在分层介质中的声場, 已有了較完整的理論<sup>[1-4]</sup>。具有指向性的輻射器在均匀介质中的声場, 也一直是人們所注意研究的問題<sup>[5,6]</sup>。然而, 关于具有指向性的輻射器在分层介质中的声場問題, 到目前还很少見諸討論; 实际上我們使用的輻射器却經常是非球对称輻射, 因此, 研究指向性輻射器在分层介质中的声場, 就具有理論上与实用上的重要意义。

我們討論垂直放置于分层介质中的平面輻射器所产生的声場: 由 Helmholtz 积分<sup>[7]</sup>得到了場的积分表达式, 然后将被积函数展开为泰勒級数, 积分后得一綫性微分算符, 将此算符作用于球面点源的解, 就可得到平面輻射器的声場。

以下討論的皆系簡諧情况, 時間因子  $e^{-i\omega t}$  省略。

## 二、平面輻射器声場的一般表达式

所討論的分层介质如图 1 所示: 它由一些非均匀层組成, 各层中的密度为常数  $\rho_i$ , 声速仅是垂直坐标  $z$  的函数  $c_i(z)$ 。如所熟知, 位于  $M$  点的球面点源所产生的声压場  $G(Q, M)$ , 除了要滿足波动方程、边界条件以及輻射条件外, 在声源邻近还应当具有球面点源的奇性, 即当  $R \rightarrow 0$  时有  $\frac{\partial G}{\partial R} = -\frac{1}{R^2} [1 + o(R)]$ ,  $R$  是  $M, Q$  点之間的距离,  $o(R)$  随  $R$  减小而趋于零。关于点源声場  $G(Q, M)$  的計算<sup>[1-4]</sup> 这里从略。

我們所討論的平面輻射器是一无限薄的平板, 平板的两面以大小相等、方向相反的法綫速度作簡諧振动; 将它垂直放置于分层介质中 (图 2), 它与无限大硬屏中的活塞等效。求这样一个輻射器在分层介质中的声場与球面点源的問題相似, 仅需将球面点源的奇性改为: 在輻射器表面邻近, 介质的法綫位移速度与輻射器表面相同。点源的解  $G(Q,$

\* 1962 年 12 月 25 日收到; 1963 年 3 月 23 日收到修改稿。

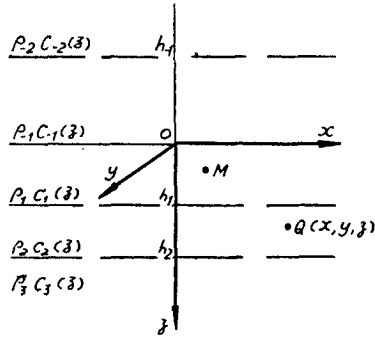


图 1

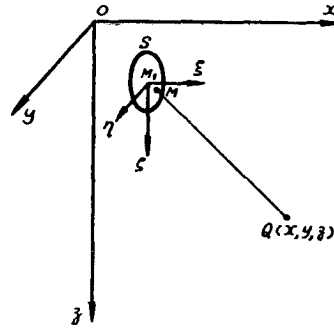


图 2

$M$ ) 具有 Green 函数的性质, 可以将 Helmholtz 公式<sup>[7]</sup>推广到分层介质; 考虑到在辐射器两方面的声场是对称的, 由 Helmholtz 公式得到平面辐射器的声场如下:

$$P(Q) = -\frac{i\rho_1\omega u}{2\pi} \iint_S G(Q, M) d\sigma_M, \quad (1)$$

公式中  $P(Q)$  是  $Q$  点的声压;  $\rho_1$  是放置辐射器的那一层介质的密度;  $\omega$  是圆频率;  $u$  是辐射表面的速度振幅, 积分沿辐射表面  $S$  进行;  $d\sigma_M$  是面积元。下面讨论积分(1)的计算。

在辐射器上取一点  $M_1$ , 它至辐射器边缘的最大距离为  $l$ , 我们选取的  $M_1$  点应使  $l$  最小。以  $M_1$  为原点, 取一新坐标系  $\xi-\eta-\zeta$ , 其坐标轴分别与  $x, y, z$  轴平行(见图 2)。在新坐标系中,  $M$  点的坐标为  $(0, \eta, \zeta)$ ; 在旧坐标系中,  $M_1$  点的坐标为  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M$  点的坐标为  $(x_1, y_1 + \eta, z_1 + \zeta)$ ,  $Q$  点的坐标为  $(x, y, z)$ 。将点源的解  $G(Q, M)$  展开为泰勒级数,

$$G(Q, M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \eta \frac{\partial}{\partial y_1} + \zeta \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^n G(Q, M_1). \quad (2)$$

将(2)代入(1), 得

$$P(Q) = -\frac{i\rho_1\omega u}{2\pi} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \iint_S \left( \eta \frac{\partial}{\partial y_1} + \zeta \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^n d\eta d\zeta \right] G(Q, M_1), \quad (3)$$

此级数在  $R > l$  的区域收敛, 这里  $R$  是  $Q, M_1$  点间的距离。

令

$$p = \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad q = \frac{\partial}{\partial z_1}. \quad (4)$$

引入线性微分算符  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \iint_S \left( \eta \frac{\partial}{\partial y_1} + \zeta \frac{\partial}{\partial z_1} \right)^n d\eta d\zeta = \frac{1}{S} \iint_S e^{\eta p + \zeta q} d\eta d\zeta \quad (5)$$

以及常数  $W$ :

$$W = -\frac{i\rho_1\omega u S}{2\pi}, \quad (6)$$

这里  $S$  是辐射表面的面积(单面)。将(5)与(6)代入(3), 就得

$$P(Q) = W \mathcal{L} \cdot G(Q, M_1). \quad (7)$$

公式(7)表明: 平面辐射器的声场可以由某一线性微分算符作用于球面点源的解得到; 因

此,对给定形状的辐射器,基本问题是寻求线性算符  $\mathcal{L}$ . 在附录中给出了几个具体例子.

对于均匀空间情况,不难证明:在公式(7)中,用  $\frac{e^{ikR}}{R}$  代替  $G(Q, M_1)$ ,就得到平面辐射器在均匀介质中的声场  $P_0(Q)$ ,

$$P_0(Q) = W\mathcal{L} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (8)$$

这里  $R$  是  $Q, M_1$  点之间的距离,  $R = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ .

当  $kR \gg 1$  时,有

$$\begin{aligned} p \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{e^{ikR}}{R} \cong (-ik \cos \alpha) \frac{e^{ikR}}{R}, \\ q \frac{e^{ikR}}{R} &= \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{e^{ikR}}{R} \cong (-ik \cos \beta) \frac{e^{ikR}}{R}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\cos \alpha = \frac{y-y_1}{R}$ ,  $\cos \beta = \frac{z-z_1}{R}$ , 它们分别是直线  $\overline{M_1Q}$  对  $\eta$  轴与  $\zeta$  轴的方向余弦(参见图 2). 将(9)代入(8),就得到:  $kR \gg 1$  时,

$$P_0(Q) \cong WD(\alpha, \beta, k) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (10)$$

其中

$$D(\alpha, \beta, k) = \frac{1}{S} \iint_S e^{-ik(\eta \cos \alpha + \zeta \cos \beta)} d\eta d\zeta. \quad (11)$$

函数  $D(\alpha, \beta, k)$  就是辐射器在均匀空间中的指向系数<sup>[8]</sup>, 因此,在算符  $\mathcal{L}$  中,代替  $p = -ik \cos \alpha$  与  $q = -ik \cos \beta$ , 就得到指向系数.

### 三、简正波声场

假定辐射器的形状对  $\eta$  轴(图 2 中的水平轴)对称,这将使结果简化. 现在将算符(5)表为无穷级数的形式;由于对称性,级数中将不含  $q$  的奇次项;由(5)得

$$\mathcal{L} = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} p^m q^{2n}, \quad (12)$$

其中  $b_{mn} = \frac{1}{m!(2n)!S} \iint_S \eta^m \zeta^{2n} d\eta d\zeta$ ; 相应地,指向系数为

$$D(\alpha, \beta, k) = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} (-ik \cos \alpha)^m (-k^2 \cos^2 \beta)^n. \quad (13)$$

如所熟知,分层介质中点源的声场  $G(Q, M_1)$  可表为简正波与旁侧波之和<sup>[1,2,4]</sup>; 然而,在许多实际情况下,旁侧波是可以忽略的,这里仅讨论简正波. 将简正波写成如下形式<sup>[1-4]</sup>:

$$G(Q, M_1) = 2\pi i \sum_{v_l} F(z, v_l) F(z_1, v_l) H_0^{(1)}(v_l r) v_l, \quad (14)$$

其中  $v_l$  是极点,  $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$ ,  $H_0^{(1)}(v_l r)$  是汉克尔函数,  $F(z, v_l)$  满足方程  $\frac{\partial^2}{\partial z^2} F(z, v_l) + [k^2(z) - v_l^2] F(z, v_l) = 0$ . 当  $kr \gg 1$  时可用渐近式  $\left(\frac{2}{\pi v_l r}\right)^{1/2} e^{i(v_l r - \frac{\pi}{4})}$

代替  $H_0^{(1)}(v_l r)$ , 于是得

$$G(Q, M_1) \cong 2(2\pi)^{1/2} e^{i\pi/4} \sum_{v_l} \sqrt{v_l} F(z, v_l) F(z_1, v_l) \frac{e^{iv_l r}}{\sqrt{r}}. \quad (15)$$

将算符(12)作用于(14), 得到平面辐射器的简正波如下:

$$P(Q) = 2\pi i W \sum_{v_l} v_l F(z, v_l) \left[ \sum_{m,n} b_{mn} p^m q^{2n} F(z_1, v_l) H_0^{(1)}(v_l r) \right], \quad (16)$$

式中  $W$  由(6)式给出.

注意到

$$q^{2n} F(z_1, v_l) = \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \right)^n F(z_1, v_l) = (-1)^n [k^2(z_1) - v_l^2]^n F(z_1, v_l),$$

以及  $kr \gg 1$  时有

$$p^m H_0^{(1)}(v_l r) = \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^m H_0^{(1)}(v_l r) \cong \left[ -iv_l \frac{(y - y_1)}{r} \right]^m \left( \frac{2}{\pi v_l r} \right)^{1/2} e^{i(v_l r - \frac{\pi}{4})},$$

因此, 当  $kr \gg 1$  时可得到

$$\begin{aligned} p^m q^{2n} F(z_1, v_l) H_0^{(1)}(v_l r) &\cong \\ &\cong (-1)^n [k^2(z_1) - v_l^2]^n \left[ -iv_l \frac{(y - y_1)}{r} \right]^m \left( \frac{2}{\pi v_l r} \right)^{1/2} F(z_1, v_l) e^{i(v_l r - \frac{\pi}{4})}. \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$v_l = k(z_1) \sin \beta_l, \quad v_l \frac{(y - y_1)}{r} = k(z_1) \cos \alpha_l, \quad (18)$$

由此而引入参数  $\alpha_l$  与  $\beta_l$ .

将(18)代入(17), 可以使(16)中的级数简化,

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} b_{mn} p^m q^{2n} F(z_1, v_l) H_0^{(1)}(v_l r) &\cong \\ &\cong \left( \frac{2}{\pi v_l r} \right)^{1/2} F(z_1, v_l) e^{i(v_l r - \frac{\pi}{4})} \sum_{m,n} b_{mn} [-ik(z_1) \cos \alpha_l]^m [-k^2(z_1) \cos^2 \beta_l]^n = \\ &= D(\alpha_l, \beta_l, k(z_1)) \left( \frac{2}{\pi v_l r} \right)^{1/2} F(z_1, v_l) e^{i(v_l r - \frac{\pi}{4})}, \end{aligned} \quad (19)$$

式中函数  $D(\alpha, \beta, k)$  由公式(13)给出. 当  $kr \gg 1$  时, 得到平面辐射器的简正波如下:

$$P(Q) \cong 2(2\pi)^{1/2} e^{i\pi/4} W \sum_{v_l} \sqrt{v_l} D(\alpha_l, \beta_l, k(z_1)) F(z, v_l) F(z_1, v_l) \frac{e^{iv_l r}}{\sqrt{r}}. \quad (20)$$

比较公式(15)与(20), 可以看出: 对  $\eta$  轴对称的平面辐射器所激发的简正波(20)与球面点源的简正波(15)相似; 由于平面辐射器具有指向性, 其各号简正波需要乘以相应的指向系数  $D(\alpha_l, \beta_l, k(z_1))$ .

我们来解释角度  $\alpha_l$  与  $\beta_l$  的意义. 由(18)的第一式得  $\beta_l = \arccos \frac{v_l}{k(z_1)}$ ,  $\beta_l$  就是组成第  $l$  号简正波的“准平面波”<sup>[9]</sup> 在  $M_1$  点的入射角; 当  $v_l$  小于  $k(z_1)$  的实数时,  $\beta_l$  为实数, 在图 3 上用角  $\angle AM_1 \zeta$  表示; 当  $v_l$  是复数或大于  $k(z_1)$  的实数时,  $\beta_l$  为复数. 图 3 上之  $A$  点处在包含  $M_1$  点以及  $Q$  点的垂直平面上(图 3 中之  $M_1 B Q$  平面), 由(18)知  $\cos \alpha_l = \frac{(y - y_1)}{r} \sin \beta_l$ , 故  $\alpha_l$  就是图 3 上之角  $\angle AM_1 \eta$ . 公式(20)就具有如下的物理意义: 各号

简正波由于平面辐射器的指向性所作的修正，决定于指向接收点  $Q$  的准平面波在  $M_1$  点（辐射器的中心）的方向角  $\alpha_i$  与  $\beta_i$ ；由于  $\alpha_i$  与  $\frac{(y-y_1)}{r}$  有关，因此简正波在水平方向具有指向性。

应当指出，当垂直放置的平面辐射器不具有水平的对称轴时，如果将整个辐射表面划分为几个部分，而每一部分都具有水平的对称轴，则对每一部分可由公式(20)计算，然后将各部分的贡献相加，就得到总的声场。

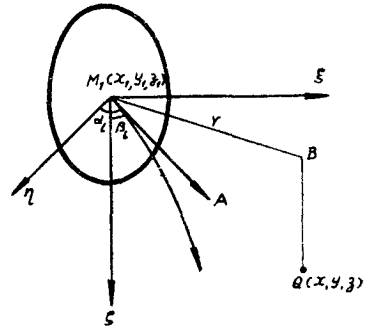


图 3

### 附 录

作为例子，我们在附录中给出常用的椭圆形与矩形辐射器的线性算符。

对于椭圆形辐射器，用  $\mathcal{L}_e$  表示其线性算符。设椭圆的二轴分别与  $\eta, \zeta$  轴平行，二半轴之长分别为  $a$  与  $b$ （见图 4），由公式(5)计算得到

$$\mathcal{L}_e = \frac{2J_1(i\sqrt{a^2p^2 + b^2q^2})}{i\sqrt{a^2p^2 + b^2q^2}}, \tag{21}$$

式中  $J_1$  是一阶贝塞耳函数， $p$  与  $q$  是微分算符  $\frac{\partial}{\partial y_1}$  与  $\frac{\partial}{\partial z_1}$ 。

在公式(21)中令  $a = b$ ，就得到圆形辐射器的线性算符  $\mathcal{L}_c$ ，

$$\mathcal{L}_c = \frac{2J_1(ia\sqrt{p^2 + q^2})}{ia\sqrt{p^2 + q^2}}. \tag{22}$$

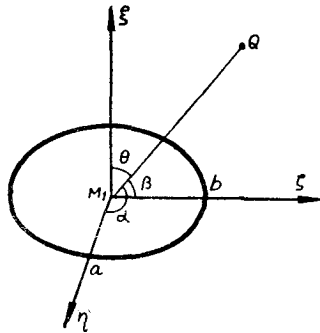


图 4

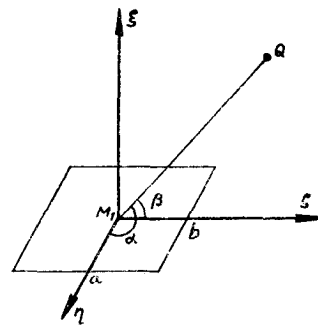


图 5

对于矩形辐射器，设二边分别与  $\eta, \zeta$  轴平行，边长为  $2a$  与  $2b$ （见图 5）。由公式(5)计算得到

$$\mathcal{L}_r = \frac{\text{sh } ap}{ap} \cdot \frac{\text{sh } bq}{bq}. \tag{23}$$

当线性算符作用于函数时，可将它表为级数而进行计算。

最后，作者对汪德昭教授的热情关怀与指导以及关定华同志给工作提出的意见表示感谢。

## 参 考 文 献

- [1] Бреховских, Л. М., Волны в слоистых средах (1957), §36.
- [2] Pekeris, C. L., *Geol. Soc. Am., Mem.* 27, Oct. 15 (1948).
- [3] Pekeris, C. L., *J. A. S. A.*, **18** (1946), 295.
- [4] Газарян, Ю. Л., *Аку. Жур.*, **3** (1957), 127.
- [5] Карновский, М. И., *Изв. АН. СССР., серия физич.*, **13** (1945), 698.
- [6] Bouwkamp, C. J., *Philips Research Rept.*, **1** (1946), 251.
- [7] Baker, V. B. and Copson, E. T., *The Mathematical Theory of Huyghens' Principle* (1950), §4.2.
- [8] Скучик, Е., *Основы акустики* (1958), ГЛ. 12, §2.
- [9] Полянская, В. А., *Аку. Жур.*, **5** (1959), 91.

## ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ПЛОСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Чжан Жэнь-хэ

(Академия Наук Китая)

Рассматривается звуковое поле плоского излучателя, вертикально поставленного в слоистой среде. Расчет показывает, что звуковое поле плоского излучателя можно найти путем воздействия некоторого линейного дифференциального оператора на решение для поля точечного источника, причем данный линейный оператор связан с коэффициентом направленности излучателя в однородном пространстве. Рассматриваются нормальные волны в слоистой среде. В случае плоского излучателя, имеющего горизонтальную ось симметрии, амплитуды нормальных волн на достаточно больших расстояниях от излучателя равны произведению коэффициента направленности на соответствующие амплитуды нормальных волн для точечного источника. Нормальные волны, возбуждаемые плоским излучателем, имеют определенную направленность в горизонтальной плоскости.