

等时性迴旋加速器中希尔方程的近似解*

方守賢 孙松嵐

提 要

本文基于微扰概念,应用常数变易法,求得了希尔方程的近似解及其特征数近似公式。在二次近似的条件下(保留到 q_2^2 项),用本文公式算出的特征数相对誤差不超过 0.1%。因此,对等时性迴旋加速器中精密度要求較高的理論問題,可以利用本文的結果較方便地来进行探討。

在中能或高能加速器的理論設計中經常遇到希尔(Hill)方程^[1]

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + [a - 2q\psi(\xi)]y = 0.$$

众所周知,它的解是无法用初等函数来表示的,只能采用各种数值解法。

在文献[2—6]中,已經对希尔方程的数值解法提出了一系列的方法。但是在这些方法中,有的計算方法异常困难及繁复,有的只适用于方程中系数 $q\psi(\xi)$ 依 ξ 周期性变化是矩形波的情况,有的其精密度較差或者在稳定区的边界附近即迅速下降。这样,在实际中采用这些方法往往会遇到一定的困难。在加速器的設計过程中有很多重要的問題,例如引出的問題、高次或低次諧波对共振綫位置的移前或推后等,希望能有一个精密度較高的近似公式,来进行一些有意义的分析。显然上列各种方法是很难满足这些要求的,因此本文中設法从另外的途径求得了希尔方程的数值解及其特征数。

这种方法基于下面的物理概念:

在研究螺旋形准迴旋加速器时,当假設中心面内沿方位角变化的磁場具有简单的正弦波形时,我們在綫性近似下将遇到一个很简单的馬奇也(Mathieu)方程来描写粒子流的运动,而象文献[1]所給出的一些方法那样,对于馬奇也方程來說,求得其精密的数值解是没有什么困难的。

但实际的物理場往往不是简单的正弦波,然而可以肯定地說,亦不会与正弦波偏离得太远。換言之,如果将实际測得的物理場用傅里叶級数展开后,它与正弦波的偏离将不会太大(即級数收敛很快)。在这种情况下,粒子运动所滿足的方程将与以前的馬奇也方程偏离不太大,再加上希尔方程的特性(高次諧波的影响随着其次数的增长,貢獻迅速下降),我們所得到的这种希尔方程的解及特征数很接近于馬奇也方程的相应数值,因此可以看作在馬奇也方程中多了一些微扰項。在上述概念下,利用一般的常数变易法,就可以求得此微扰函数的貢獻。

我們將上述方法用于第一稳定区,求得的特征数在該区域内部及边界附近均有极高的精密度,在二次近似下与电子計算机的結果相比,其誤差只有 0.2%,比文献[5]中所介紹的方法好一个数量級。本文所采用的方法也同样适用于下面的情况,即当希尔方程的

* 1963 年 5 月 18 日收到。

高次諧波衰減得很慢時，甚至於沒有衰減時（即 $q_2 = q_4 = \dots = q_{2i}$ ）。嚴格地說，此時這些項已經不能看作是微擾項，但如仍用上法，則求得的特征數誤差約為 1%。這是由於希爾方程的性質決定的。

一、希爾方程近似解的求得

在高性能及中能加速器理論設計中，經常遇到下面類型的二級綫性微分方程：

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + [a - 2q_2 \cos 2\xi - 2q_4 \cos 4\xi - 2q_6 \cos 6\xi \dots] y = 0, \quad (1)$$

即所熟悉的希爾方程，其中 $a, q_{2i} (i = 1, 2, 3, \dots)$ 是參數。當 $j \geq 2, q_{2i} = 0$ 時，(1) 式化為馬奇也方程：

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + [a - 2q_2 \cos 2\xi] y = 0. \quad (2)$$

眾所周知，此方程式的一般解^[1]為

$$y_0(\xi) = b_1 M(\xi) + b_2 M^*(\xi), \quad (3)$$

b_1, b_2 是方程的積分常數； $M(\xi), M^*(\xi)$ 為馬奇也函數，即

$$M(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{2l} e^{i(2l+\mu_0)\xi}, \quad (4)$$

$M^*(\xi)$ 為其共軛函數。由文獻 [1] 知，當參數 a, q_2 已知時，用近似方法，即可算出馬奇也方程的特征數 μ_0 。從而，當給出馬奇也函數的常系數 $C_{2l} (l = -\infty \sim \infty)$ 的歸一化條件之後，就很容易地算出 C_{2l} ，求得了馬奇也方程的數值解。 μ_0 和 C_{2l} 的精密度根據需要而定。

在實際的物理場中，粒子自由振動所滿足的綫性方程往往與馬奇也方程相差不遠。這也就是說，方程式里的高次諧波振幅 q_4, q_6, q_8, \dots 衰減得很快。因此實際上我們可以將 $2q_{2i} \cos 2j\xi y (j \geq 2)$ 看作是高次諧波微擾項。於是可以把 (1) 式改寫為

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + [a - 2q_2 \cos 2\xi] y = 2q\psi(\xi)y, \quad (5)$$

式中

$$2q\psi(\xi)y = 2 \sum_{j=2}^{\infty} q_{2j} \cos 2j\xi y \quad (6)$$

是希爾方程的微擾項； q 為一小參數； $\psi(\xi)$ 為 ξ 之週期函數。當 $q = 0$ 時，(5) 式化為相應的馬奇也方程 (2)。利用拉格朗日常數變異法，就可以寫出 (5) 式的一般解

$$y(\xi) = y_0(\xi) + \frac{1}{W} \int_0^\xi q\psi(\xi_1) [M(\xi)M^*(\xi_1) - M(\xi_1)M^*(\xi)] y(\xi_1) d\xi_1, \quad (7)$$

式中 ξ_1 是積分變量，而 W 是馬奇也方程式 (2) 的朗斯基行列式

$$W(\xi) = M'(\xi)M^*(\xi) - M(\xi)M'^*(\xi) = \text{const},$$

“'”表示函數對 ξ 的一次微商。

公式 (7) 是 $y(\xi)$ 的一個積分方程，利用它可以確定方程 (5) 的級數解。由於 $q\psi(\xi)$ 為一微擾函數，我們可以把這個解寫成 q 的幕級數形式：

$$y(\xi) = y_0(\xi) + qy_1(\xi) + q^2y_2(\xi) + \dots + q^ny_n(\xi) + \dots, \quad (8)$$

把它代入(7)式,使等式两端的 q 的同次项相等,即得

$$\begin{aligned}
y_1(\xi) &= \frac{1}{W} \int_0^\xi \psi(\xi_1) y_0(\xi_1) [M(\xi) M^*(\xi_1) - M(\xi_1) M^*(\xi)] d\xi_1, \\
y_2(\xi) &= \frac{1}{W} \int_0^\xi \psi(\xi_1) y_1(\xi_1) [M(\xi) M^*(\xi_1) - M(\xi_1) M^*(\xi)] d\xi_1, \\
&\dots\dots\dots \\
y_n(\xi) &= \frac{1}{W} \int_0^\xi \psi(\xi_1) y_{n-1}(\xi_1) [M(\xi) M^*(\xi_1) - M(\xi_1) M^*(\xi)] d\xi_1,
\end{aligned} \tag{9}$$

由此即可求得希尔方程(5)的数值解.

二、希尔方程的特征数

由弗洛克(Floquet)定理^[1]知道,具有周期系数的二級綫性微分方程的特征数 μ , 可以由它的滿足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的特解 $y(\xi)$ 决定: $\cos \mu T = \frac{1}{2} [y(T) + y(-T)]$ (T 是系数的周期). 在此,利用(8)即可求得希尔方程(5)的特征数:

$$\cos \mu T = \cos \mu_0 T + \frac{q}{2} [y_1(T) + y_1(-T)] + \frac{q^2}{2} [y_2(T) + y_2(-T)] + \dots, \tag{10}$$

式中第一項中之 μ_0 是相应的馬奇也方程的特征数. 将(9)式代入(10)式,并利用公式

$$\int_0^T f(\xi) \int_0^\xi g(\eta) d\eta d\xi = \int_0^T g(\eta) \int_\eta^T f(\xi) d\xi d\eta,$$

加以簡化,即得

$$\begin{aligned}
\cos \mu T &= \cos \mu_0 T + \frac{i2 \sin \mu_0 T}{W} \int_0^T q\psi(\xi) |M(\xi)|^2 d\xi + \\
&+ \frac{2}{W^2} \left\{ i \sin \mu_0 T \left[2 \int_0^T \int_0^{\xi_2} q\psi(\xi_1) M^{*2}(\xi_1) \cdot q\psi(\xi_2) M^2(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 - \right. \right. \\
&- \left. \int_0^T q\psi(\xi) M^2(\xi) d\xi \cdot \int_0^T q\psi(\xi) M^{*2}(\xi) d\xi \right] + \\
&+ \cos \mu_0 T \left[\left(\int_0^T q\psi(\xi) |M(\xi)|^2 d\xi \right)^2 - \int_0^T q\psi(\xi) M^2(\xi) d\xi \times \right. \\
&\times \left. \int_0^T q\psi(\xi) M^{*2}(\xi) d\xi \right] \left. \right\} + \dots, \tag{11}
\end{aligned}$$

式中 ξ_1, ξ_2 是积分变量. 在一般情況下,近似到 q^2 項已給出 $\cos \mu T$ 很高的精密度. 把微扰函数(6)代入(11)式,得

$$\cos \mu T = \cos \mu_0 T + \sum_{j=2}^{\infty} A_{2j} q_{2j} + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} B_{2j,2k} q_{2j} q_{2k} + \dots, \tag{12}$$

式中 $A_{2j}, B_{2j,2k}$ 是常系数,决定于馬奇也函数的系数:

$$\begin{aligned}
A_{2j} &= G h_{2j}, \quad B_{2j,2k} = G_1 h_{2j,2k}^{(1)} + G_2 h_{2j,2k}^{(2)}, \\
G &= \frac{iT \sin \mu_0 T}{4W}, \quad G_1 = \frac{T^2 \cos \mu_0 T}{32W^2}, \quad G_2 = -\frac{T \sin \mu_0 T}{32W^2}, \\
h_{2j} &= 2 \sum_{l,l'=-\infty}^{\infty} C_{2l} C_{2l'} |_{l-l'+j=0}, \quad h_{2j,2k}^{(1)} = h_{2j} \times h_{2k}, \\
h_{2j,2k}^{(2)} &= \sum_{l,l'=-\infty}^{\infty} \sum_{m,m'=-\infty}^{\infty} C_{2l} C_{2l'} C_{2m} C_{2m'} \left[\frac{1}{m+m'+\mu_0-k} \right]_{m+m'-k=l+l'+j} + \\
&+ \frac{1}{m+m'+\mu_0+k} \left. \right]_{m+m'+k=l+l'+j}. \tag{13}
\end{aligned}$$

利用(12)式可以進行具體的數值計算。例如當 $a = 0$, $q_2 = 0.2$ 時, $\mu_0 = 0.14255$; 由(12)式求得

$$\begin{aligned} \cos \mu\pi \approx & 0.90139 + 0.03699q_4 - 0.00068q_6 - \\ & - 0.62074q_4^2 + 0.06685q_4q_6 - 0.00067q_6^2. \end{aligned}$$

對於 $q_4 = \pm 0.10, \pm 0.20$ 及 $q_6 = 0.05$, 由此式求得的 $\cos \mu\pi$ 的近似值及用電子計算機得到的精密值列於表 1.

表 1

q_4	q_6	$\cos \mu\pi$			$\Delta \cos \mu\pi$	
		精密值	一次近似值	二次近似值	一次近似	二次近似
-0.10	0	0.89150	0.89769	0.89148	0.00168	-0.00002
0.10	0	0.89890	0.90508	0.89888	0.00618	-0.00002
-0.20	0	0.86931	0.89399	0.86926	0.02470	-0.00015
0.20	0	0.88411	0.90878	0.88395	0.02470	-0.00015
0	0.05	0.90067	0.90135	0.90068	0.00068	0.00001

表中 $\Delta \cos \mu\pi = \cos \mu\pi|_{\text{近似值}} - \cos \mu\pi|_{\text{精密值}}$. 一次近似只計算到 q_{2j} 項, 二次近似還要計入 q_{2i}^2 項.

同樣, 還可以計算出有更多的高次諧波存在時 $\cos \mu\pi$ 的近似值. 這時 $\cos \mu\pi$ 的項相應地增多. 不過 q_{2i} 及 q_{2i}^2 的係數隨著諧波次數 i 的增大而減小. 因此當 i 大到一定的數目(例如 $i = 5$)時, q_{2i} 及 q_{2i}^2 項常常可以略去, 而不致使精密度變壞. 但二次耦合項 $q_{2i}q_{2k}$ 收斂較慢, 不可隨便略去.

在更普遍的情況下, 我們可以取 (a_0, q_{20}) 作為所謂“參考點”, 仍用(12)式來計算希爾方程(1)的特徵數. 不過, (12)式中的 μ_0 是與 (a_0, q_{20}) 對應的特徵數, 取和號下的 j 與 k 應當改為自 0 算起. 這相當於在微擾函數(6)以及最後在式(12)中又加入了兩項“微擾項”: Δa 與 $2\Delta q_2 \cos 2\xi$ ($\Delta a = a_0 - a$, $\Delta q_2 = q_2 - q_{20}$). 這時, 我們把方程(5)和式(6)、式(12)改寫為

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + [a_0 - q_{20} \cos 2\xi]y = 2q\psi(\xi)y, \quad (5a)$$

$$2q\psi(\xi)y = 2 \sum_{j=0}^{\infty} q_{2j} \cos 2j\xi y, \quad (6a)$$

$$\cos \mu T = \cos \mu_0 T + \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j} g_{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_{2j, 2k} g_{2j} g_{2k}. \quad (12a)$$

注意, 在上面三式中, $2g_0 = \Delta a = a_0 - a$, $2g_2 = 2\Delta q_2 = 2(q_2 - q_{20})$, 而當 $j, k \geq 2$ 時, $g_{2i} = q_{2i}$. 係數 $A_{2i}, B_{2i, 2k}$ 仍由(13)式計算. 具體計算的例子如下: 當 $a_{20} = 0, q_{20} = 0.20$ 時, 由(12a)得出下式:

$$\begin{aligned} \cos \mu\pi = & 0.90139 + 4.8712\Delta a - 0.98533\Delta q_2 + 0.03699q_4 - 0.00068q_6 + \\ & + 4.0403\Delta a^2 - 0.6245\Delta q_2\Delta a - 2.456\Delta q_2^2 + 0.01094\Delta a q_4 + \\ & + 0.3667\Delta q_2 q_4 - 0.62074q_4^2 + 0.06685q_4 q_6 - 0.00067q_6^2 + \dots \end{aligned}$$

計算的結果見表 2 ($q_6 = 0$).

表 2

a	q ₂	q ₄	cos μπ			Δ cos μπ	
			精密值	一次近似值	二次近似值	一次近似	二次近似
0.03	0.30	-0.1	0.64045	0.66042	0.63874	0.0200	-0.00166
0.06	0.40	-0.1	0.34846	0.41595	0.34060	0.0673	-0.00788
0.09	0.45	-0.1	0.13102	0.22034	0.11648	0.0893	-0.0146
0.03	0.30	0.1	0.62401	0.65302	0.62413	0.0290	0.00013
0.06	0.40	0.1	0.31961	0.40835	0.31868	0.0887	-0.00093
0.09	0.45	0.1	0.09494	0.21295	0.09095	0.118	-0.00399
0.03	0.30	-0.2	0.63087	0.66411	0.62750	0.0332	-0.0337
0.06	0.40	-0.2	0.34574	0.41945	0.33294	0.0737	-0.0128
0.09	0.45	-0.2	0.13257	0.22404	0.11062	0.0915	-0.0220
0.03	0.30	0.2	0.59799	0.14932	0.59817	0.0513	0.00019
0.06	0.40	0.2	0.28803	0.40465	0.28909	0.117	0.00107
0.09	0.45	0.2	0.06043	0.20925	0.059563	0.149	-0.00087

誤差分布见图 1.

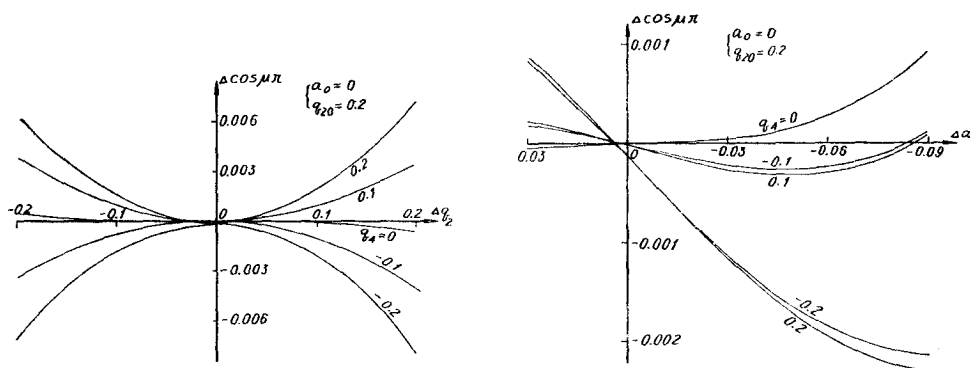


图 1

由(6a)与(12a)式还可以看出,当 $j \geq 2, g_{2j} = 0$ 时,以 (a_0, q_{20}) 作“参考点”,用式(12a)可以计算马奇也方程(2')的特征数. 作为例子,我们仍取 $a_0 = 0, q_{20} = 0.20$ 作“参考点”,由(12a)得

$$\begin{aligned} \cos \mu\pi = & 0.90139 + 4.8712\Delta a - 0.98533\Delta q_2 + 4.0403\Delta a^2 - \\ & - 0.6245\Delta a\Delta q_2 - 2.456\Delta q_2^2. \end{aligned}$$

计算结果如表 3. 误差分布见图 1 ($q_4 = 0$ 的曲线).

由表 2 可以看出, Δa 的影响比 Δq_2 的较为显著. 这是由于 Δa 是经常起作用的, Δq_2 是周期性起作用的. 所以在 Δa 和 Δq_2 相等的情况下, Δa 引起的 $\cos \mu\pi$ 的误差较大, 因此 Δa 应取得尽可能小.

计算表明, (12a)式在马奇也稳定区的边界附近也有很高的精密度, 只要被计算的点离“参考点”不要太远即可. 例子如表 4.

表 3

a	q_2	$\cos \mu\pi$			$\Delta \cos \mu\pi$	
		精 密 值	一 次 近 似 值	二 次 近 似 值	一 次 近 似	二 次 近 似
0	0.1	0.97533	0.99992	0.97536	0.0246	0.00003
0	0.3	0.77835	0.80285	0.77829	0.0245	-0.00006
0	0.4	0.60653	0.70432	0.60608	0.0978	-0.00045
0.03	0.2	0.75885	0.75525	0.75889	-0.00360	0.00003
0.06	0.2	0.62338	0.60911	0.62366	-0.01430	0.00028
0.09	0.2	0.49477	0.46298	0.49570	-0.0328	0.00097
0.03	0.3	0.63818	0.65672	0.63767	0.01850	-0.00051
0.06	0.4	0.33977	0.41205	0.33585	0.07230	-0.00392
0.09	0.5	0.11849	0.21665	0.10992	0.09820	-0.00857

表 4

a	q_2	$\cos \mu\pi$			$\Delta \cos \mu\pi$	
		精 密 值	一 次 近 似 值	二 次 近 似 值	一 次 近 似	二 次 近 似
0	0	1	1.0985	1.0002	0.0985	0.0002
-0.03	0.20	1.0512	1.0475	1.0512	-0.0037	0.0000
-0.03	0.10	1.1266	1.1461	1.1270	0.0195	0.0004

計算公式和表 3 的相同。[$\cos \mu\pi > 1$ 的點 (a, q_2) 在穩定區外,]

在導言中已經指出,利用本文的方法,不僅對實際物理場的情況,可以求出特徵數,而且對於周期變化的矩形場,也可以算出特徵數。在這種情況下,希爾方程的高次譜波振幅沒有衰減(即 $q_2 = q_4 = q_6 = \dots = q_{2j} = q$)。例如在扇形等時性迴旋加速器中,粒子軸向自由運動方程為: $z'' + A \frac{2}{\pi} \sum_j \cos 2j\xi z = 0, j = 1, 3, 5, \dots, A = \text{const}$ 是一參數。這時,由於磁場是矩形的(在扇面里邊是均勻的,在邊界上有一突變),粒子的自由振動頻率 μ , 利用矩陣法可以精確地求出。設 $A = 1$, 得 $\cos \mu\pi = 1 - \frac{\pi^2}{32} = 0.69158$ 。利用本文的方法,同樣可以求出 $\cos \mu\pi$ 的近似值。如前所述, g_{2j} 與 g_{2j}^2 項收斂很快,自 $j \geq 5$ 的項可以略去,因此在 $\cos \mu\pi$ 的二次近似公式里只需保留 $g_{2j} g_{2k}$ 的各項,此時

$$\cos \mu\pi = \cos \mu_0\pi + \sum_j A_{2j} g_{2j} + B_{6,6} q_6^2 + \sum_{j \neq k} B_{2j,2k} g_{2j} g_{2k} \quad (j = 0, 1, 3, 5, \dots).$$

取“參考點” $a_0 = -0.03844, q_{20} = 0.3$ ($\mu_0 = 0.08$), 得

$$\cos \mu\pi = 0.96866 + 5.1069\Delta a - 1.5119\Delta q_2 + 0.00234q_6 - 0.2873q_6^2 - 0.1675q^2.$$

由此得出 $\cos \mu\pi = 0.69931$, 與矩陣法相比,誤差為 $\Delta \cos \mu\pi = 0.00773, \Delta \cos \mu\pi / \cos \mu\pi |_{\text{精}} = 1.1\%$ 。

三、討 論

為了今後便於實用,我們給出了與十二個“參考點”(a_0, q_{20})所相應的 $\cos \mu_0\pi$ 值和係數 $A_{2j}, B_{2j,2k}$ 值(見表 5)。

表 5

a_0	q_{20}	$\cos \mu_0 \pi$	$\frac{A_0}{2}$ (Δa)	$-A_2$ $-(\Delta q_2)$	A_4 (q_4)	$\frac{B_{0,0}}{4}$ (Δa^2)	$-\frac{B_{0,2}}{2}$ $-(\Delta a \Delta q_2)$	$-B_{2,2}$ $-(\Delta q_2^2)$	$\frac{B_{0,4}}{2}$ ($\Delta a q_4$)	$B_{2,4}$ ($\Delta q_2 q_4$)	$-B_{4,4}$ $-(q_4^2)$
0.03844	0.3	0.96866	5.1069	+1.5119	0.0844	4.150	0.8110	2.5127	-0.04113	0.5522	0.6864
0	0.2	0.90139	4.8712	+0.98533	0.0370	4.0403	0.6245	2.4560	0.0102	0.3663	0.6207
0.20	0.2	0.07855	3.4069	+0.86454	0.0342	3.2978	0.5774	2.1533	0.0137	0.3366	0.4579
0.50	0.2	-0.67634	1.7188	0.70567	0.0303	2.3661	0.5030	1.7552	0.0147	0.2916	0.2544
-0.06	0.4	0.90202	5.1714	2.0382	0.1512	4.2120	1.2061	2.5227	-0.0144	0.7271	0.7100
0.15	0.4	-0.01010	3.5692	1.7779	0.1391	3.4292	1.2169	2.1824	0.0582	0.6489	0.5041
0.50	0.4	-0.85742	1.5726	1.4042	0.1206	2.3781	1.3359	1.6045	0.2109	0.3214	0.2523
-0.15	0.6	0.86551	5.6294	3.2124	0.3515	4.4411	1.7964	2.6250	-0.1457	1.0661	0.8992
0.03	0.6	-0.00912	4.1331	2.8606	0.3271	3.8088	2.0311	2.2622	0.1444	0.9077	0.6209
0.30	0.6	-0.87262	2.3483	2.3964	0.2925	3.0693	2.9398	1.3810	0.8094	-0.1575	0.3507
-0.20	0.8	0.38901	5.6056	4.3727	0.6343	4.6213	2.9989	2.5005	0.1411	1.1920	0.9190
-0.12	0.8	-0.03054	4.8925	4.1546	0.6141	4.3369	3.1413	2.2859	0.3005	1.0054	0.7941

我們利用表 5 作了大量的計算,并將結果与电子計算計数据进行了比較。除了图 1 之外,再將由部分数据画成的誤差分布图画在图 2、图 3 上。由图可以看出公式的适用范围。

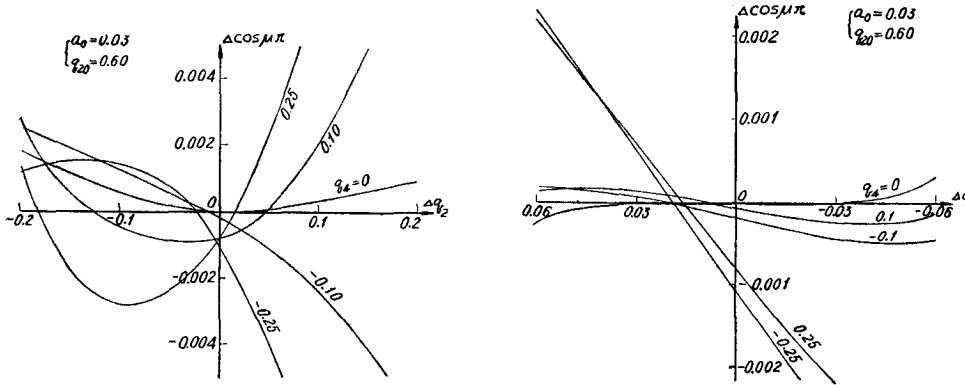


图 2

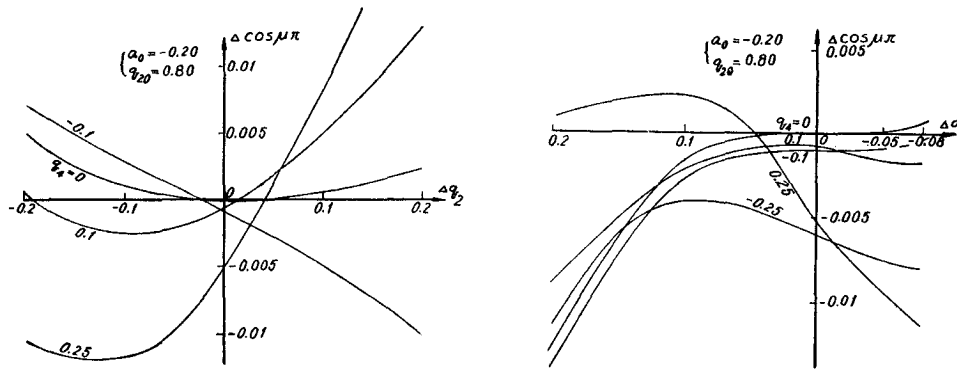


图 3

在計算 A_{2i} , $B_{2i,2k}$ 时,我們略掉了某些項,如 $h_{2,2}^{(0)}$ 中之 $\frac{C_{-2}^2 C_2^2}{\mu_0}$ 、 $\frac{C_0 C_{-2} C_2 C_{-4}}{\mu_0 - 1}$ 等,如果計入这些項,估計精密度还可提高。

在文献[2—6]中亦建議了一系列的方法,但是值得指出的是,这些方法的精密度不够高。例如,与文献[5]比較,在同为二級近似的情况下,本文的結果比文献[5]的精密度要高一数量級。例如用文献[5]中的計算公式

$$\cos \mu \pi = \cos \sqrt{a} \pi - \frac{\pi^2 \sin \sqrt{a} \pi}{4 \sqrt{a} \pi} \left[\frac{q_2^2}{1-a} + \frac{q_4^2}{4-a} \right]$$

与本文表 5 中第九行所相应的公式进行比較,計算結果見表 6。

表 6

q_2	q_4	cos $\mu\pi$ 精 密 值	文献[5]的結果		本文的結果	
			cos $\mu\pi$	Δ cos $\mu\pi$	cos $\mu\pi$	Δ cos $\mu\pi$
0.4	-0.1	0.47827	0.46256	-0.01571	0.48084	0.00259
0.5	-0.1	0.27047	0.24479	-0.02568	0.27174	0.00127
0.6	-0.1	0.01756	-0.02138	-0.03895	0.01738	-0.00018
0.7	-0.1	-0.27979	-0.33595	-0.05616	-0.28222	-0.00243
0.8	-0.1	-0.62084	-0.69891	-0.07807	-0.62707	-0.00623
0.4	0.1	0.44907	0.46256	0.01349	0.45174	0.00627
0.5	0.1	0.22489	0.24479	0.01990	0.22447	-0.00042
0.6	0.1	-0.04798	-0.02138	0.02660	-0.04804	0.00006
0.7	0.1	-0.36886	-0.33595	0.03298	-0.36580	0.00306
0.8	0.1	-0.73695	-0.69891	0.03804	-0.72880	0.00815
0.4	-0.25	0.46890	0.43152	-0.03737	0.47009	0.00120
0.5	-0.25	0.27314	0.21375	-0.05939	0.27459	0.00145
0.6	-0.25	0.03493	-0.05242	-0.08735	0.03385	0.00108
0.7	-0.25	-0.24512	-0.36699	-0.12187	-0.25214	0.00702
0.4	0.25	0.39589	0.43152	0.03563	0.39731	0.00141
0.5	0.25	0.15920	0.21375	0.05456	0.15642	-0.00278
0.6	0.25	-0.12892	-0.05242	0.07650	-0.12971	-0.00079
0.7	0.25	-0.46778	-0.36699	0.10079	-0.46108	-0.00669

文献[5]的誤差分布見图 4。

由于文献[5]中公式之收敛性較慢,因此即使用它作到第三、第四次近似也改变不了其精密度,有的反而变坏。

值得指出的是,本文中(12)式比文献[5]中 $\cos \mu T$ 的二次近似表达式多了 q_{2i} 的一次項。由于这种差异,利用文献[5]之公式求得的 $\cos \mu T$ 是与 q_{2i}^2 成正比的,即与高次諧波 q_{2i} 的正負号无关(即对于基波有相角 π 的改变),这是与实际情况不符合的。进一步考察可知,文献[5]的三次近似才反映出这一性質。

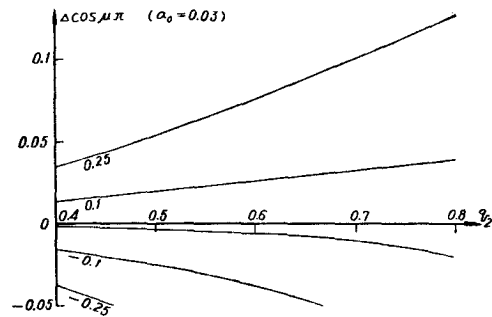


图 4

尤其在稳定区边界上,有些公式的精密度大大下降(如文献[2]).而本文所建议的方法不仅可以计算稳定区内的点子,而且可以计算稳定区边界上及稳定区之外的点子;并且只要被计算的点子离“参考点”同样远,得到的 $\cos \mu\pi$ 的精密度是一样的,不会因被计算的点子处于稳定区边界而减低精密度.“参考点”也可以置于稳定区边界及其附近.

此外,在本文公式中,各次谐波的影响可以单独计算,因此可以分别估计各次谐波的作用.由于这个特点,用本文所得的分析公式,很方便地可以用来处理加速器理论研究所遇到的精密度要求较高的工作,以便于利用分析的方法进行定量的探讨,而避免用电子计算机的繁复计算,物理意义亦为明确.例如高次谐波对共振线位置的移前或推后;粒子的共振引出等等.

最后指出,本文只考虑了高次谐波的情况(即 $q_{2j} \cos 2j\xi$, $j \geq 2$).实际上,在微扰概念的基础上,我们可以考虑更普遍的情况,例如,存在着周期为 2π 的高次谐波 ($q_{2j+1} \cos(2j+1)\xi$, $j \geq 1$) 的情况;低次谐波 ($q_{\frac{L}{N}j} \cos \frac{L}{N} j\xi$, L, N 为正整数, $\frac{L}{N} \leq 1$) 的情况;以及各次谐波之间有相位差[如 $q_j \cos(j\xi + \delta_j)$] 的情况等等.由于式(5)中 $q\psi(\xi)$ 的一般性,由本文之公式(11)很容易得出上述各种情况下的广义希尔方程的特征数.

本文列举的大量数据是王自正等同志计算的,在此表示感谢.

参 考 文 献

- [1] McLachlan, N. W., Theory and Application of Mathieu Functions, Oxford, London, 1951.
- [2] Adler, F. T., Baroncini, D., *Nuovo Cimento*, **IV** (1956), 959.
- [3] Symon, K. R., etc, *Phys. Rev.*, **103** (1958), 1837.
- [4] Ltig Lundquist, *Phys. Rev.*, **91** (1953), 981.
- [5] Bell, Mrs. N., AERE-T/M - 139 (1956).
- [6] Кольга, В. В., отчет, оияи (1959).

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА ИЗОХОРНОГО ЦИКЛОТРОНА

Фан Шоу-сян Сунь Сун-лань

Резюме

На основе понятия возмущения, применяя методы вариации постоянной, получили приближенные решения и формулы для вычисления характеристических показателей уравнения Хилла. Во втором приближении (при сохранении членов порядка q_{2j}^2) относительные погрешности характеристических показателей, вычисленных по нашим формулам, не превышают 0.2%. Таким образом, наши формулы вполне могут быть применены к изохорному циклотрону для исследования теоретических вопросов, требующих сравнительно высокой точности.