

螺旋綫迴旋加速器中粒子径向 自由振蕩的靜态分析*

方守賢 魏开煜

提 要

本文以 $N = 6$ 的螺旋綫迴旋加速器为例子, 用电子计算机对粒子径向自由振蕩作了靜态計算. 对所得到的結果进行了分析, 并与綫性理論的結果作了比較.

一、引 言

螺旋綫迴旋加速器中粒子自由振蕩的靜态理論(即不考虑粒子加速过程的理論), 早已在很多文章^[1,2]中用綫性近似方法加以分析和总结. 但是, 对于这种綫性近似方法所能达到的精确度, 至今还不知道. 本文以 $N = 6$ 的螺旋綫迴旋加速器为例子, 用电子计算机对粒子径向自由振蕩作了靜态計算. 对所得到的結果进行了分析, 并与文献[1]中的綫性理論結果作了比較.

二、运动方程的两种求解方法

在螺旋綫迴旋加速器中, 采用圆柱形坐标系, 并忽略 z 方向运动, 則带电粒子在磁場中心平面上的运动方程是^[1]

$$r'' - \frac{2r'^2}{r} - r = -\frac{e}{Pc} \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r} H_z(r, \varphi, 0), \quad (1)$$

式中 r 是粒子的径向坐标; e 是电荷; P 是动量; “ $'$ ”表示对方位角 φ 微分; $H_z(r, \varphi, 0)$ 是中心平面上磁場的 z 向分量, 其形式为

$$H_z(r, \varphi, 0) = H(r) \left[1 + \varepsilon \sin\left(\frac{r}{\lambda} - N\varphi\right) \right], \quad H(r) = \frac{H_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R_\infty}\right)^2}},$$

其中 R_∞ 为光速半径; H_0 是加速器中心的平均磁場; N 是螺旋綫数目; $2\pi\lambda$ 是螺旋綫的径向跨距; ε 是調变磁場的相对幅度.

众所周知, (1) 是一非綫性方程, 原則上无法求得解析形式的精确解. 因此在一般文章中, 通常都采用綫性近似方法. 在这种方法的处理过程中^[1], 认为动量为 P 的粒子的实际軌道与半径为 $R = PC/eH(R)$ 的参考圓的偏离很小. 即假設 $r = R + \rho$, 其中 $\rho \ll R$; 代入(1)式, 用普通的手續展开. 在綫性近似下得到 ρ 的解为二部分: 一部分是周期为 $2\pi/N$ 的解, 即物理上所謂閉合軌道(或称平衡軌道), 其形式如下:

* 1963年6月8日收到.

$$\bar{\rho} = \frac{\epsilon R}{N^2 - (1+n)} \sin\left(\frac{R}{\lambda} - N\varphi\right) - \frac{\epsilon^2 R(n+2)}{2[N^2 - (1+n)](1+n)}; \quad (2)$$

另一部分为围绕闭合轨道的自由振荡 ρ_s , 其具体形式可写成

$$\rho_s = e^{\frac{1}{2R} \int_0^\varphi [1 - 3\epsilon \sin(\frac{R}{\lambda} - N\varphi)]^{\bar{\rho}} d\varphi} [AM(\varphi) + A^*M^*(\varphi)], \quad (3)$$

式中 $M(\varphi)$ 为马奇也函数:

$$M(\varphi) = F(\varphi)e^{iQ_s\varphi},$$

$$F(\varphi) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{C_{2j}}{2} e^{ij(N\varphi - \frac{R}{\lambda})},$$

这里 Q_s 为自由振荡频率, 由马奇也方程的系数决定.

(3)式前面的指数上是以 $2\pi/N$ 为周期的函数, 所以这个指数因子不会给予系统以长期的阻尼或反阻尼. 此外, 由于指数上的绝对值很小, 通常都把它略去而将(3)式写为

$$\rho_s = |2AF(\varphi)| \cos(Q_s\varphi + \delta). \quad (4)$$

因为 $F(\varphi)$ 是 φ 的 $2\pi/N$ 为周期的函数, 这说明自由振荡的振幅不是常数, 而具有周期为 $2\pi/N$ 的调幅. 以上就是一般线性理论的主要结果.

由于线性理论有很多近似, 因此, 在实际设计中, 尤其是在发生非线性共振时, 必须进一步进行详细的研究. 为此, 可以利用电子计算机直接推求非线性方程(1)的数值解: 将(1)式两端除以 R_∞ 化成无量纲方程式:

$$\xi'' - \frac{2\xi'^2}{\xi} - \xi = -\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(\xi^2 + \xi'^2)^{3/2}}{\xi (1 - \xi^2)^{1/2}} \left[1 + \epsilon \sin\left(\frac{R_\infty}{\lambda} \xi - N\varphi\right) \right], \quad (5)$$

式中 $\xi = r/R_\infty$; $\frac{1}{\sqrt{n}} = eH_0R_\infty/PC$.

为了讨论方便, 我们在以 (ξ, ξ') 为坐标轴的相平面上来研究粒子的运动, 并且仍然认为粒子的运动是由闭合轨道和围绕闭合轨道的自由振荡两个部分相迭而成的. 我们以

$\bar{\xi}(\varphi), \bar{\xi}'(\varphi)$ 表示闭合轨道的坐标; $\xi_s(\varphi), \xi'_s(\varphi)$ 表示粒子对闭合轨道的偏离, 则方程(5)的全解可以写为

$$\xi(\varphi) = \bar{\xi}(\varphi) + \xi_s(\varphi), \quad (6)$$

$$\xi'(\varphi) = \bar{\xi}'(\varphi) + \xi'_s(\varphi).$$

在利用电子计算机计算上列方程时, 可以分为两个步骤.

1. 求闭合轨道 用电子计算机求得方程(5)满足条件 $\bar{\xi}\left(\varphi + \frac{2\pi}{N}\right) = \bar{\xi}(\varphi), \bar{\xi}'\left(\varphi + \frac{2\pi}{N}\right) = \bar{\xi}'(\varphi)$ 的解, 即为闭合轨道. 由于解的周期性, 闭合轨道在相平面 (ξ, ξ') 上的相图是一个椭圆(如图1), 椭圆的中心在 ξ 轴上, 其坐标相应于闭合轨道的平均半径. 椭圆在 ξ 轴上的投影等于闭合轨道无量纲振幅的两倍. 因为闭合轨道的周期是 $2\pi/N$, 所以每经过 $\Delta\varphi = 2\pi/N$ 时, 相点在椭圆上绕完一周又回到起始位置.

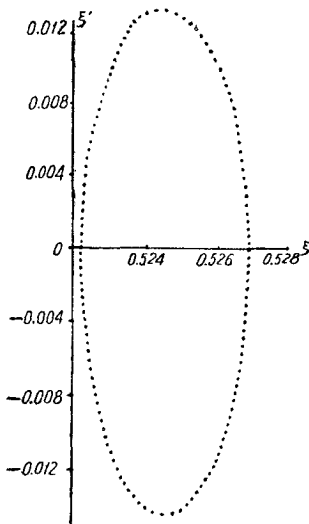


图1 $n = 0.38$ 处闭合轨道的相图

2. 求自由振蕩 在一般情況下,對於給定的起始條件,電子計算機只能從方程(5)給出全解 $\xi(\varphi)$, $\xi'(\varphi)$ 的一系列數值。為了從這些數值中把自由振蕩的圖象分離出來,對於同一個起始條件,我們把每隔 $\Delta\varphi = 2\pi/N$ 的那些數據組成一組。設第 i 組的起點是 φ_i , 這時由於 $\bar{\xi}(\varphi_i + \frac{2\pi}{N}m) = \bar{\xi}(\varphi_i)$, $\bar{\xi}'(\varphi_i + \frac{2\pi}{N}m) = \bar{\xi}'(\varphi_i)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$), 我們得到 k 組數據

$$\begin{aligned}\xi\left(\varphi_i + \frac{2\pi}{N}m\right) &= \bar{\xi}(\varphi_i) + \xi_s\left(\varphi_i + \frac{2\pi}{N}m\right), \\ \xi'\left(\varphi_i + \frac{2\pi}{N}m\right) &= \bar{\xi}'(\varphi_i) + \xi'_s\left(\varphi_i + \frac{2\pi}{N}m\right), \quad m=0, 1, 2, \dots, \infty; \quad i=1, 2, 3, \dots, k.\end{aligned}$$

對於每一組來說, $\bar{\xi}(\varphi_i)$, $\bar{\xi}'(\varphi_i)$ 為一常數。這就是說,每一組數據所描述的是固定在閉合軌道上的某一相位 (φ_i) 去觀察同一自由振蕩所得到的在每個時刻的情況。如果把各組的數據畫在相平面 ($\xi\xi'$) 上,則每一組的相點形成一個橢圓(如圖 2)。有 k 組數據就得到 k 個橢圓。這 k 個橢圓的中心分布在閉合軌道橢圓周界上 k 個不同的位置,其坐標為 $[\bar{\xi}(\varphi_i), \bar{\xi}'(\varphi_i)]$ ($i = 1, 2, \dots, k$)。第 i 個橢圓在 ξ 軸上的投影就等於在 $[\bar{\xi}(\varphi_i), \bar{\xi}'(\varphi_i)]$ 處所觀察到該自由振蕩“當地(無量綱)振幅”的兩倍。

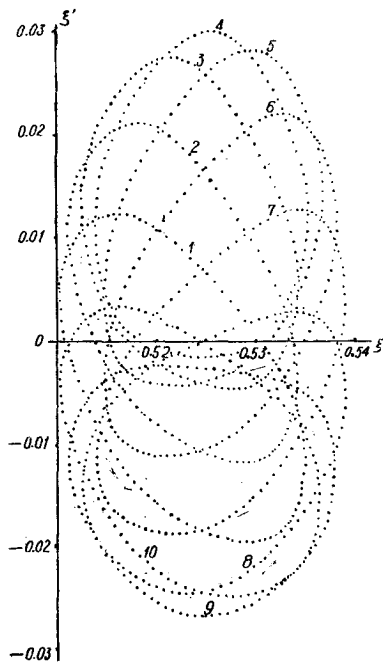


圖 2 $n = 0.38$ 處,以閉合軌道上 10 個不同位置作參考所得同一自由振蕩的相圖

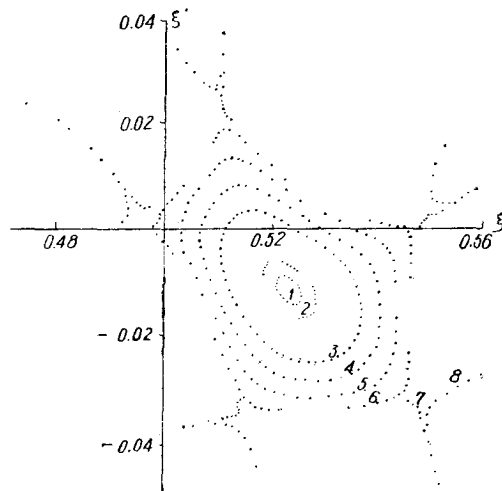


圖 3 $n = 0.38$ 處,以閉合軌道上 $\varphi_i = 0$ 為參考點所得各種振幅自由振蕩的相圖

為了研究不同振幅的自由振蕩,可以給定不同的起始條件進行計算。但是為了便於比較,我們應該對各種起始條件所得到的數據取同樣的 φ_i 進行分組。這樣對於所有的第 i 組,我們就可得到描寫各種振幅自由振蕩的同心橢圓族(如圖 3)。

三、計算結果的比較及分析

根据上述計算方法,我們取磁場参数为 $N=6$, $\lambda=6$ cm, $R_\infty=280.4$ cm, $n=0.38$, $\varepsilon = 0.1553$, 用电子计算机算出的閉合軌道橢圓如图 1; 对于初始条件 $\xi_0 = \sqrt{\frac{n}{1+n}}$, $\xi'_0 = 0$ (当 $\varphi = 0$ 时) 及 $\varphi_i = \frac{\pi}{30}, \frac{2\pi}{30}, \dots, \frac{\pi}{3}$ (或 0) 所得到的描写同一自由振蕩的 10 个橢圓如图 2; 对于各种振幅的自由振蕩, 在 $\varphi_i = 0$ 处所得到的同心橢圓族如图 3. 根据綫性理論, 上述参数相当于取垂直方向自由振蕩的頻率為 $Q_x \equiv 0.24$, 并可以求得在 $n = 0.38$ 处径向自由振蕩的頻率為 $Q_\rho = 1.176$. 下面我們將把綫性近似所得的結果与电子计算机数据加以比較.

1. 閉合軌道的比較

根据(2)式, 求得閉合軌道的平均半径 $\bar{R} = R - \frac{\varepsilon^2 R(2+n)}{2[N^2 - (1+n)](1+n)} = 147.06$ cm, 振幅 $\bar{\rho}_{\max} = \frac{\varepsilon R}{N^2 - (1+n)} = 0.660$ cm, 以及 $\bar{\rho}'_{\max} = \frac{N\varepsilon R}{N^2 - (1+n)} = 3.960$ cm; 而电子计算机所算得的閉合軌道橢圓的中心位于 $\bar{\xi} = 0.5245$, 橢圓在二坐标軸上的投影分別是 $\Delta\bar{\xi} = 0.00460$, $\Delta\bar{\xi}' = 0.0282$, 相应的 $\bar{R} = 147.07$ cm, $\bar{\rho}_{\max} = 0.645$ cm, $\bar{\rho}'_{\max} = 3.954$ cm. 两者比較, 最大誤差小于 2.5%.

2. 自由振蕩的比較及分析

(a) 振蕩頻率的比較

在加速器的設計过程中, 粒子自由振蕩的頻率是一个很重要的物理量, 它直接反映出被加速粒子的聚焦性能. 因此, 頻率的比較将是衡量綫性理論精确度的一个很重要的标准. 然而, 方程(5)所描述的是一非綫性振蕩, 振蕩的相速度¹⁾不是一常数, 而是与相位成一定的周期性依賴关系, 所以必須注意“頻率”这个概念是指相速度在一周期內的平均值. 根据电子计算机数据和附录中的方法, 我們求得在 $n = 0.38$ 处自由振蕩的頻率 Q_ρ 与振幅的关系如下:

振幅(cm)	0.97	2.07	3.60	5.28	6.03	6.53
頻率 Q_ρ	1.187	1.187	1.188	1.190	1.192	1.194

与綫性理論所求得的 $Q_\rho = 1.176$ 相比較, 在振幅为 3.6 cm 以內, 綫性理論的誤差 $\leq 1\%$.

(b) 振幅的比較及橢圓面积的不变性

(1) 按照綫性理論所給出的公式(4)可知, 自由振蕩的振幅有一个周期为 $2\pi/N$ 的調幅, 調幅度正比于 $|2F(\varphi)| \cong 1 + \frac{\varepsilon R}{N^2\lambda} \cos\left(\frac{R}{\lambda} - N\varphi\right)$, 因而最小振幅与最大振幅之比

是 $\frac{F_{\min}}{F_{\max}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon R}{N^2\lambda}}{1 + \frac{\varepsilon R}{N^2\lambda}} = 0.808$. 图 2 中由电子计算机所算出的 10 个橢圓在 ξ 軸上的投影

1) 对方位角 φ 微分.

也依次变化了一个周期, 相应的最小值与最大值之比为 $\frac{\Delta\xi_{\min}}{\Delta\xi_{\max}} = 0.792$. 两者相比, 綫性理論的誤差为 2%.

(2) 由綫性理論可以証明一个很重要的現象, 即在同一起始条件下, 自由振蕩所相应的橢圓的面积对于不同的 φ_i 是一常数, 証明如下: 将(4)經過一些演变后得到恆等式

$$|A|^2 = \frac{1}{-W^2} [|M'(\varphi)|^2 \rho^2 - |M(\varphi)|^2 \rho \rho' + |M(\varphi)|^2 \rho'^2], \quad (7)$$

这里 $|M(\varphi)|^2 = M'(\varphi)M^*(\varphi) + M(\varphi)M'^*(\varphi)$, 而 $W = M'(\varphi)M^*(\varphi) - M(\varphi)M'^*(\varphi)$ 为朗斯基表示式. 对于形式为(4)的解, W 为一虚常数, 而 $-W^2$ 为一正数. 式中 $|M'(\varphi)|^2$, $|M(\varphi)|^2$ 及 $|M(\varphi)|^2$ 均为 φ 的以 $2\pi/N$ 为周期的函数.

因为 A 是一积分常数, 故在整个运动中, (7)式右端亦为一不变量. 当 $\varphi = \varphi_i + \frac{2\pi}{N}m$ ($m = 0, 1, 2, \dots \infty$) 时, ρ, ρ' 在相空間的軌迹为一橢圓. 此橢圓即相应于上列(ξ, ξ')平面上 $\varphi = \varphi_i + \frac{2\pi}{N}m$ ($m = 0, 1, 2, \dots \infty$) 的一組相点所形成的橢圓. 令此橢圓在平面(ρ, ρ')上的面积为 S , 則

$$\begin{aligned} S &= \oint \rho' d\rho = \frac{\sqrt{-W^2}}{|M(\varphi_i)|^2} \int_{-2|M(\varphi_i)|^2 A}^{2|M(\varphi_i)|^2 A} \sqrt{4A^2|M(\varphi_i)|^2 - \rho^2} d\rho = \\ &= 2\pi\sqrt{-W^2} A^2. \end{aligned} \quad (8)$$

由此可見, 橢圓的面积与所参考的閉合軌道相位 φ_i 无关. 因此, 在整个运动中, 对于一定的起始条件, S 为一常数. 在相平面($\xi\xi'$)上, 令此橢圓的无量綱面积为 σ , 則

$$\sigma = S/R_\infty^2 = 2\pi\sqrt{-W^2} \left(\frac{A}{R_\infty}\right)^2, \quad (9)$$

因此, σ 亦是一常数.

实际上, 这与統計力学中的一个基本定理, 即刘維尔定理联系着. 按照这个定理: 在正則变换的条件下, 相空間体积保持不变¹⁾. 无疑地, 滿足(4)的变数 ρ, ρ' 实际上是一哈密頓函数 $H = \frac{1}{2} [\rho'^2 + \psi(\varphi)\rho^2]$ 的正則坐标与正則动量 [$\psi(\varphi)$ 为一周期函数]. 因此, 在整个运动过程中, 相空間体积应保持不变. 显然, 与这个运动不变量联系在一起的常数 A 是一个表征自由振蕩在长时期中的特性的物理量. 我們定义它为自由振蕩的“平均振幅”.

公式(7)–(9)是由綫性理論得到的結果. 对于非綫性方程(5)或(1), ξ, ξ' (或 r, r') 并不是哈密頓函数的正則变数, 因而 σ (或 S) 不是一严格的常数. 但是电子计算机計算的結果表明, 它很好地近似为一常数. 例如图 2 中的 10 个橢圓的面积, 大致都等于 510 个坐标单位.

以上所述的性質, 在研究引出及共振时都是很有用的.

1) 系統不必要是保守的.

四、結 論

由上面的結果看来,綫性理論在振幅为 3.6 cm 以內,無論在定性及定量方面都很有效地反映了实际情况.

关于自由振蕩振幅具有周期性調幅这一性質,可以用在实际的工程設計中,例如引出等. 尤其在大加速器中,由于磁間隙很狹,保証 D 形盒的足够高度有很大的困难. 这时 x 向自由振蕩振幅的这种調幅波谷所造成的空隙,用来安装 D 形盒冷却水管,有可能克服一部分技术上的困难.

附 录

頻率的需求: 利用电子計算机每隔 $2\pi/N$ 所得到的靜态数据,作 $\xi-\varphi$ 图. 在图上选择一适当的初始值 ξ^0 ,讀出在經過了 n 个周期之后, ξ 回到 ξ^0 时的 φ 值 φ_n , 即可求得自由振蕩的頻率

$$Q_p = \frac{2n\pi}{\varphi_n}.$$

假如讀图时的誤差为 $\Delta\varphi$, 則所求得的頻率的誤差为

$$\left| \frac{\Delta Q_p}{Q_{p_0}} \right| = \frac{Q_{p_0} \Delta\varphi}{2n\pi}.$$

提高作图的精确度及增加周期的数目, 均可使誤差减小. 本文中我們取 $n = 23$, $\Delta\varphi \leq \pi/30$, 当 $Q_p \cong 1, 18 \dots$ 时, $|\Delta Q_p/Q_{p_0}| < 0.001$.

参 考 文 献

- [1] Дмитриевский, В. П., Кольга, В. В., и т.п., *Атомная Энергия*, 8, вып. 3 (1960), 198.
 [2] Dull, P. D., CERN, E. T., *Symposium* (1956), 9.

АНАЛИЗ РАДИАЛЬНОГО БЕТАТРОННОГО КОЛЕБАНИЯ ЧАСТИЦ БЕЗ УЧЁТА УСКОРЕНИЯ В ЦИКЛОТРОНЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Фан Шоу-сянь Уай Кай-юе

РЕЗЮМЕ

В данной работе произведено с помощью электронной вычислительной машины исследование радиального бетатронного колебания частиц без учёта ускорения в циклотроне с пространственной вариацией при $N = 6$. Полученный результат проанализирован и сравнен с выводами линейной теории.