

低能 π - N 散射 p 波共振中交叉过程的贡献*

竺 迺 宜

(北京大学物理系)

提 要

本文用等效极点代替 π - N 散射左割线, 计算了交叉过程短程相互作用的贡献, 在相移计算中得到与实验一致的 low p 波 3-3 共振。计算结果要求至少用四个极点来代替左割线的贡献, 说明左割线振幅的行为是相当复杂的。

一、引 言

Chew, Goldberger, Low 和 Nambu^[1] 将固定动量的色散关系应用到介子、核子散射问题中。在色散关系右边积分中共振部分为主的假设下, 得到与静止理论^[2]完全一致的 p 波积分方程, 在其中只取 $\frac{1}{M}$ 级近似, 且设在共振范围内小相移态的贡献可忽略。但是他们所给出的 3-3 共振的位置和 s 波的主要散射长度并不能与实验一致。

Frautschi 和 Walecka^[3] 利用 Mandelstam 双重表象中振幅的分波解析性计算了 π - N 散射。在其中考虑了单核子项和交叉道的长程相互作用部分(即振幅 Legendre 展开收敛的部分), 而忽略了交叉道的短程相互作用部分和非弹性过程。在用单个极点代替做计算后, 发现交叉道的长程相互作用部分的贡献比单核子项小得多, 对振幅的改动不大。他们所给出的 3-3 共振发生在能量很低的位置。

在 π - π 散射 p 波共振问题的讨论中, Moffat^[4] 利用分波振幅双重色散关系的减除(subtraction)处理, 在适当地选取减除位置和常数后(要求在 $\nu_0 = -652$ 处进行减除, 实质上相当于在左割线上引进一个很远的等效极点), 能得到由 Frazer 和 Fulco^[5,6] 从核子同位旋矢量电磁形式因子研究中得到的单极点近似 p 波振幅(由 Chew-Mandelstam 积分方程中用极点 ν_0 代替左割线而得)。

Chew 和 Mandelstam^[7] 在 π - π 散射 p 波问题中, 用双极点代替左割线的贡献, 在适当选择参量后能给出所要求之共振, 且极点的位置是落在割断收敛范围之内。但由于对左割线作了割断, 且在交叉关系中忽略了 s 波, 所以上述等效极点并不能与对称点的交叉条件很好符合。

为了考虑 π - N 散射中交叉道的短程相互作用, 我们也采用两个以上的极点来代替左割线的贡献。计算结果发现, 至少要用四个极点来代替左割线, 才能使 α_{33} 相移在整个低能范围都与实验较好地符合, 给出所要求的 p 波 3-3 共振, 这说明左割线振幅的行为是相当复杂的。在第二节中简单介绍了 Frautschi 和 Walecka 的工作^[3], 第三节介绍了我们

* 1962 年 12 月 21 日收到。

在他們工作的基础上进一步計算了交叉道的短程相互作用，第四节对計算結果进行了討論。

二、单核子項和交叉过程中长程相互作用的貢獻

在 Mandelstam 表象中，很容易得到 π - N 散射过程的一般运动学公式。分波振幅的解析性及其积分表达式^[1,3,8]

$$\begin{aligned} g_l(W) = & \frac{1}{\pi} \int_{M+1}^{\infty} dW' \frac{\text{Im } g_l(W')}{W' - W} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-M-1} dW' \frac{\text{Im } g_l(W')}{W' - W} - \frac{g_1^2 \delta_{l0}}{2(M+W)} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-(M^2+2)^{\frac{1}{2}}}^{-M+\frac{1}{M}} dW' \frac{\alpha_l^i(W')}{W' - W} + \frac{1}{\pi} \int_{M-\frac{1}{M}}^{(M^2+2)^{\frac{1}{2}}} dW' \frac{\alpha_l^i(W')}{W' - W} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-M+1}^{M-1} dW' \frac{\alpha_l^i(W')}{W' - W} + \frac{(M^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\pi} \int_0^{2\pi} i d\phi \frac{\alpha_3^i(\phi)}{W e^{-i\phi} - (M^2-1)^{\frac{1}{2}}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\alpha_l^i(y)}{y + iW}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中 $g_1^2 = W(E+M)g^2$, $\alpha_l^i (i=1,2,3,4)$ 表示对应割綫两边振幅虛部之差。

$$g_{1+} = W^2 e^{i\delta_{1+}} \sin \delta_{1+} / q^3. \quad (2.2)$$

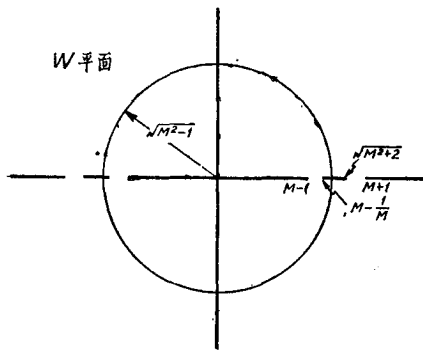


图1 π - N 散射分波振幅的解析性

(2.1)式右边前两项代表物理割綫，第三項代表物理极点，第四、五两项代表交叉极点，第六項代表交叉 π - N 割綫的长程相互作用部分，第七項代表 π - π 作用圆，最后一項代表交叉极点、交叉 π - N 割綫和 π - π 作用的短程相互作用部分。以上各項与图1中各段割綫是一一对应的。

Frautschi 和 Walecka 用“等效极点”或“共轭极点对”分别代替了(2.1)式中的后三项^[3]：

$$g_{1+}^x = \frac{g^2}{54\pi} \left(\frac{1}{W - 0.68M} \right), \quad (2.3)$$

$$g_{1+}^{\pi\pi} = -(1.88i) \left[\frac{1}{W - M e^{ix_0}} - \frac{1}{W - M e^{-ix_0}} \right], \quad (2.4)$$

其中 $x_0 = 12^\circ 50'$ 。

$$g_{1+}^{N'} = \frac{g^2}{3} \left[\left(\frac{2.03}{W - 2.12iM} + \frac{2.03}{W + 2.12iM} \right) + \left(\frac{-2.85i}{W - 4.32iM} + \frac{2.85i}{W + 4.32iM} \right) \right]. \quad (2.5)$$

这些等效极点都落在振幅 Legendre 展开的收斂范围之中[(2.5)式仅代替了交叉极点項的貢獻，它在整个虛軸上都是收斂的]，且它們的留数是满足对应割綫上收斂部分的 Cauchy 积分和交叉条件的。它們的收斂范围分别为^[3,8]

$$\begin{aligned} |W| & \leq (M+1), \\ 0 \lesssim |x| & \leq 33^\circ, \quad 147^\circ \leq |x| \leq 180^\circ, \\ y^2 & \lesssim 3 \text{ (交叉割綫和 } \pi\text{-}\pi \text{ 作用左割綫的收斂范围)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

所以 Frautschi 和 Walecka 只是考虑了单核子項和交叉过程长程相互作用的貢獻(也包括

交叉极点項的短程部分), 而忽略了交叉割綫和 π - π 作用中短程相互作用的贡献, 其計算結果由图 2 中曲綫表示。他們所給出的 3-3 共振发生在能量很低的地方, 与实验結果不符(見图 2)。

三、交叉道短程相互作用对 p 波共振的贡献

关于短程作用的贡献我們也采用等效极点来代替, 其极点的位置当然应落在 W^2 复平面的負实軸上, 但由于在这部分割綫上振幅 Legendre 展开不收敛, 所以我們暫不考虑交叉条件的限制, 这将在最后一节中討論。我們的計算同样是在 W 平面中进行, 但为了簡單起見, 我們写出 W^2 平面中极点的形式。

在 W^2 复平面中, 交叉道割綫的等效极点 W_0^2 对振幅的贡献取作

$$g_{1+}^x = \frac{A + iB}{W^2 - W_0^2} \quad (3.1)$$

在以下的計算中, 我們只考虑振幅的实部, 由于取 $\mu = 1$, 所以 $M \approx 6.8$ 。我們仍然采用第二节中公式 (2.1), (2.2), 并利用了 Frautschi 和 Walecka 已經作出的結果。首先用一个等效极点

$$g_{1+}^x = \frac{a}{W^2 - W_a^2} \quad (3.2)$$

代替交叉道短程作用的贡献(即 W^2 平面中左割綫的贡献)。

表 1 单极点近似下各种参量計算出的 3-3 相移与实验之比較

	W_a^2	a	$\frac{\omega^*}{\mu} =$	2.06	2.12	2.18
单极点近似	-10	630.1	$\alpha_{33} =$	94.3°	90°	90.2°
	30	391.6	$\alpha_{33} =$	91.4°	90°	88.4°
	73.3	47.4	$\alpha_{33} =$	87.0°	90°	92.3°
实 驗			$\alpha_{33} =$	80°	90°	100°

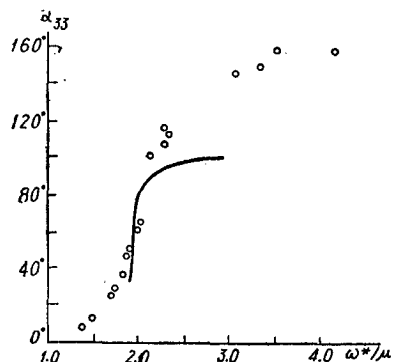


图 3 图中曲綫为单极点近似計算之結果, 其参量为 $W_a^2 = 73.3$; $a = 47.4$

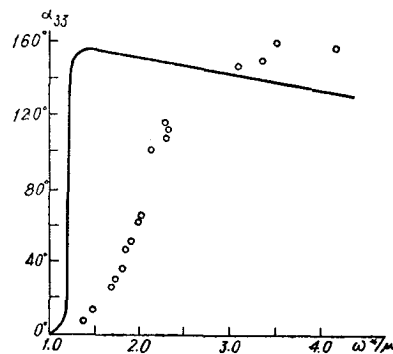


图 2 π -N 散射 3-3 相移
○ 为实验点

从表 1 中各組参量与实验比較看出, 此极点是吸引的, 且只有当它落在右边物理区时才能給出較适当的 3-3 共振位置和寬度。若极点位置选在左割綫上, 則只能給出要求的共振位置, 而相应的共振寬度就与实验差得很远, 如在图 3 中极点位置越靠左边, 則給出的曲綫越平緩, 与实验相差越远, 实际上即相当于在要求的共振位置略低处假設有一共振态存在, 这当然是不合理的。选取表 1 中最后一組参量的計算結果, 由图 3 中曲綫表示。

如果我們采用双极点近似,

$$g_{1+}^x = \frac{a}{W^2 - W_a^2} + \frac{b}{W^2 - W_b^2}. \quad (3.3)$$

表 2 双极点近似下各組参量計算的 3-3 相移与实验之比較

	W_a^2	W_b^2	a	b	$\frac{\omega^*}{\mu} =$	2.06	2.12	2.18
双极点近似	-5	-5.5	2131271	-2143243	$\alpha_{33} =$	86°	90°	95.1°
	40	39.5	234628	-237300	$\alpha_{33} =$	85°	90°	95.9°
	59.0	58.6	41884	-42547	$\alpha_{33} =$	83.2°	90°	96.5°
实 驗					$\alpha_{33} =$	80°	90°	100°

从表 2 各組参量看出, 仅当此二极点的位置很靠近, 且都落在右边非物理区的端部时, 才能给出与实验符合的 3-3 共振位置和宽度. 其中 a 为吸引极点, b 为排斥极点, $W_a^2 > W_b^2$. 我們只将表 2 中最后一組参量之計算結果画在图 4 曲线上. 极点落在右边非物理区, 即要求有束缚态存在, 但事实上并未观察到束缚态, 所以用双极点代替左割线也是有困难的.

进一步我們用四个极点来代替交叉割线:

$$g_{1+}^x = \frac{a}{W^2 - W_a^2} + \frac{b}{W^2 - W_b^2} + \frac{c}{W^2 - W_c^2} + \frac{d}{W^2 - W_d^2}. \quad (3.4)$$

选取

$$\begin{aligned} W_c^2 = -5.0, \quad c = 8899400; \quad W_d^2 = -5.5, \quad d = -8949400; \\ W_a^2 = -10, \quad a = -566620; \quad W_b^2 = -20, \quad b = 626894. \end{aligned}$$

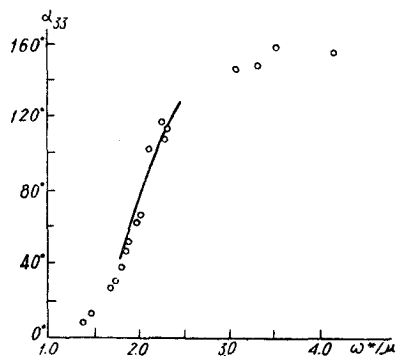


图 4 图中曲线为双极点近似計算之結果, 参量选取为

$$\begin{aligned} W_a^2 = 59.0; \quad a = 41884; \\ W_b^2 = 58.6; \quad b = -42547 \end{aligned}$$

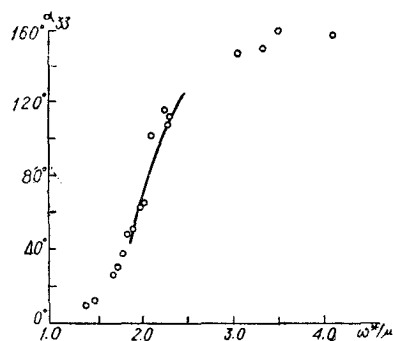


图 5 图中曲线的参量由(3.4)式给出

图 5 中用四极点近似(3.4)的計算結果, 虽然也只能在共振位置附近与实验符合, 但已不存在束缚态的困难. 四个极点的分布, 說明左割线中部是排斥的, 而外围是吸引的.

以上所有的計算, 都只给出了 $1.8 \leq \frac{\omega^*}{\mu} \leq 2.5$ 范围中的曲线, 这是由于在此范围以外計算出来的 $|\sin \alpha_{33}| > 1$, 所以不能在图中给出, 即这些曲线都不能通过实验所要求的 α_{33} 的零点. 为了克服这个困难, 我們可以采用 W 复平面中的“共轭极点对”来代替交叉道的

贡献(相当于 W^2 复平面中负实轴上的“简单极点”), 于是交叉割线对 p 波振幅的贡献(3.2)式将变成

$$g_{1+}^x = \frac{a_1 + b_1 i}{W - iW'_0} + \frac{a_1 - b_1 i}{W + iW'_0} = \frac{2(a_1 W - b_1 W'_0)}{W^2 - W_0'^2}.$$

若选取 $b_1 = \frac{a_1(M+1)}{W'_0}$, $2a_1 = a$, $W'_0 = W_0$, 则

$$g_{1+}^x = \frac{a(W - M - 1)}{W^2 - W_0^2}, \quad (3.5)$$

即相当于在原来振幅上, 乘上一个简单的因子 $(W - M - 1)$, 它保证了我们的曲线能通过零点.

所以当我们选用 W 复平面中四对“共轭极点对”来代替交叉道短程相互作用, 则只需将(3.4)式改成

$$g_{1+}^x = (W - M - 1) \left[\frac{a}{W^2 - W_a^2} + \frac{b}{W^2 - W_b^2} + \frac{c}{W^2 - W_c^2} + \frac{d}{W^2 - W_d^2} \right]. \quad (3.6)$$

我们选取

$$W_c^2 = -5.0, \quad c = 9549270; \quad W_d^2 = -5.5, \quad d = -9597820;$$

$$W_a^2 = -10, \quad a = -620457; \quad W_b^2 = -20, \quad b = 680547.$$

计算结果由图 6 中曲线给出, 它在整个低能范围都与实验较好地符合.

另外需要指出的是在我们的计算过程中, 为了简单起见, 积分方程(2.1)右边前两项中的振幅是采用 Frautschi 和 Walecka 未包括交叉 π -N 割线和 π - π 割线短程相互作用时计算的结果, 这样对我们的结果可能发生影响. 其中第二项积分由于和 d 波振幅相联系, 所以在此处影响不大, 我们只讨论第一项积分. 由于只计算弹性散射部分, 所以积分范围是(以 $\mu = 1$ 为单位)

$$\frac{1}{\pi} \int_{7.8}^{10} dW' \frac{\text{Im } g_l(W')}{W' - W}. \quad (3.7)$$

粗略计算结果由表 3 给出.

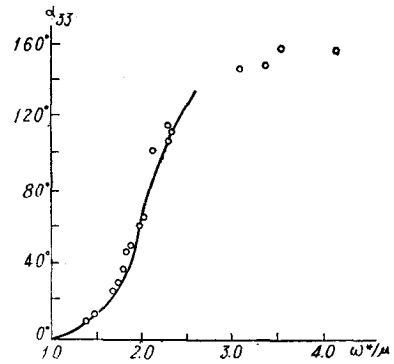


图 6 图中曲线的参量由(3.6)式给出

表 3 积分方程(2.1)中右边第一项由于近似计算可能引起的误差

$\frac{W}{\mu} =$	8.2	8.6	8.8	8.9(共振)	8.97
交叉道短程相互作用对 $g_{1+}(W)$ 的直接改正	54	30	14	8.0	4.5
交叉道短程作用通过(3.7)对 $g_{1+}(W)$ 的间接改正	3	5	1.5	0.4	1.5

可以看出, 在共振能量以下积分方程(2.1)中右边第一项, 由于采用近似而引起对振幅 $g_{1+}(W)$ 的改正的误差一般 $\lesssim 10\%$. 它主要影响到我们所取极点的留数, 而对极点位置的改变不大. 它不可能把交叉道短程作用单极点和双极点近似中极点的位置由右边拉到左边(W^2 平面中), 即不能克服“共振态”和“束缚态”的困难, 所以采用四个极点, 来等效地代

替左割綫短程相互作用的貢獻仍然是必要的。

四、总 結

由前一节的計算和討論說明:要使整个低能范围都符合实验,至少要用四个极点来等效地代替左割綫的貢獻(在 W^2 平面中)。但是在适当調整极点的参数以后,有可能使极点 a 和 d 合并,这样总共只需三个极点,且左割綫的性质是中間排斥、两端吸引。当然也可能在适当調整后,使 a 与 d 两个“排斥极点”的位置跑到两端,而 c 与 d 两个“吸引极点”跑到了中間且合并在一起。这样总共也只需三个等效极点,而左割綫的性质就变成中間吸引、两端排斥了。

由于 π - π 作用和交叉 π - N 过程同时包含有 s 复平面中負实軸上的割綫(即左割綫),所以我們的等效极点应该认为是同时代替了此二种过程的短程相互作用部分,至于它們每一部分所占的比例,应当由其他的考虑来决定。

由于交叉道的短程相互作用部分在振幅的 Legendre 展开中是发散的,所以并不能利用現有的帶有割断的交叉条件来限定我們所用等效极点的数目和它們所对应的参量,这样就使我們的等效极点有較大的任意性。如果我們能够得到更严格的交叉条件(在正确估計了割断引起的修正以后),这样就必須进一步調整各个极点的参量,以滿足它的要求(由于在我們的計算工作中,只是对各个极点的留数做了較认真的調整,而极点的位置是事先选好的,所以还存在进一步調整的可能性)。

我們在图 6 中的曲綫,仍不能給出 $\frac{\omega^*}{\mu} > 2.5$ 部分的結果。在更好地調整参量或增加极点数以后,也許有可能在能量更高的部分也与实验符合。另外我們計算中未考虑的高能非弹性过程(物理割綫上)也可能影响我們曲綫中能量較高的部分。

以上这些可能性都有待于进一步的計算来檢驗,但是我們可以认为左割綫振幅的行为是相当复杂的。

最后,十分感謝胡宁教授在整个工作中所給予的指导。

参 考 文 献

- [1] Chew, G. F., Goldberger, M. L., Low, F. E., Nambu, Y., *Phys. Rev.*, **106** (1957), 1337.
- [2] Chew, G. F., Low, F. E., *Phys. Rev.*, **101** (1956), 1570.
- [3] Frautschi, S. C., Walecka, J. D., *Phys. Rev.*, **120** (1960), 1486.
- [4] Moffat, W., *Phys. Rev.*, **121** (1961), 926.
- [5] Frazer, W. R., Fulco, J. R., *Phys. Rev., Letters*, **2** (1959), 365.
- [6] Frazer, W. R., Fulco, J. R., *Phys. Rev.*, **117** (1960), 1609.
- [7] Chew, G. F., Mandelstam, S., *Nuovo Cimento*, **19** (1961), 752.
- [8] Frazer, W. R., Fulco, J. R., *Phys. Rev.*, **119** (1960), 1420.

THE CONTRIBUTION OF THE CROSS-DIAGRAM IN THE p -WAVE RESONANCE OF LOW-ENERGY MESON-NUCLEON (π - N) SCATTERING

CHU NAY-I

(*Department of Physics, Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, it is assumed that the left-cut of π - N scattering can be better approximated by four effective poles than by only one or two poles in the usual way. The author has made calculation for the contribution due to the short range interactions of the cross-diagram. The resulting phase-shift agrees with the experiment^[3], and indicates that low-energy p -wave 3-3 resonance exists. Furthermore, from the calculated results, it can be seen that, to make better approximation, at least four poles must be taken, therefore the behaviour of the amplitude of the left-cut is very complicated.