

带区近似中的 $\pi-\pi$ 高能散射行为 和复 l 平面的奇异性*

曹 昌 祺
(北京大学物理系)

提 要

本文是在带区近似下研究非弹性中间态对复 l 平面奇异性及交叉道高能行为的贡献。处理的方法是应用迭代来求解 Chew, Frautschi 和 Mandelstam 所提出的高能联立方程组。文中给出了表示 s 道高能振幅 $f(s, t)$ 和 t 道分波振幅 $f_l(t)$ 的 n 次迭代结果的一般公式。在上述 $f(s, t)$ 的迭代公式中, Chew, Frautschi 和 Mandelstam 提出的愈来愈发散的困难实际上并不出现。

一次迭代的结果给出: i) 总截面在能量不是非常高时将缓慢下降, 但最后仍趋于常数; ii) 衍射角分布将有一较长的尾部, 随着能量增加, 长尾部分将向小角度范围扩张; iii) 在 t 道复 l 平面中出现割线, 割线位于实轴上, 右端当 $t=0$ 时在 $l=1$ 处, 随着 t 减少, 右端向左移动, 在 s 道小角度范围, 移动速度约为真空极点的一半。高次迭代结果定性上与一次迭代相似。

一、引 言

在非相对论的势散射情况, Regge^[1] 将分波振幅 f_l 推广为 l 的解析函数^[1], 并应用 Watson 迴路积分表示的方法, 得到散射振幅的一个重要性质, 即它在动量转移变量很大时的渐近行为, 是由 f_l 在 l 平面中的极点所决定。这种极点(所谓的 Regge 极点)同时还决定共振或束缚态的能级位置。随后不久, 许多作者即指出将 Regge 理论推广应用到场论的重要意义^[4-7], 其中最主要的是关于高能散射行为的研究。由于在相对论的场论中, 一个道的能量变量即为交叉道的动量转移变量, 因此, 如果假定 Regge 理论在场论中亦成立, 则得出一个道的高能散射行为应由交叉道的 Regge 极点所决定的结论。这样, 散射振幅的高能行为就与交叉道的共振态或束缚态有着密切的联系。通过引入具体的 Regge 极点(即所谓真空极点), 还可得出高能散射的 Померанчук 定理以及高能截面和衍射峰宽的一些新的特点。这些特点已部分地为实验所证实。由于 Regge 理论的重要性, 许多作者进一步讨论了在场论中引入 Regge 极点的理论基础^[7-10]。他们从 Mandelstam 表示出发, 将分波振幅推广到复 l 平面中, 并能够在弹性么正条件的近似下, 证明可动的奇异性只有极点, 或应用 Froissart 上限条件^[11]和弹性么正条件, 得出在 l 平面的一定范围

* 1963年6月18日收到。

1) Regge 证明了 f_l 在 $\text{Re } l > -\frac{1}{2}$ 范围是单纯的, 以后 Mandelstam^[2] 和 Hung Chen^[3] 进一步证明, 单纯区可以扩大到整个 l 平面。

内 f_l 亦为 l 的逐纯函数。以上的结果在一定程度上说明了应用 Regge 极点到场论中的合理性。不过所得的逐纯区较小, 对于高能行为的研究是不够的。值得注意的是, 在势散射中 f_l 逐纯性的证明是在只有弹性中间态¹⁾ 的条件下得出的, 而在场论中, 肯定地将有非弹性中间态的贡献。在上述关于在场论中引入 Regge 极点的理论基础的研究工作中, 所得到的局部逐纯性亦是与弹性中间态相联系的, 具体反映在弹性么正条件的应用上面。至于非弹性中间态会在 l 平面中(或其右半部分)给出怎样的奇异性, 则是不清楚的。

严格考虑非弹性中间态的贡献是很困难的, 在本文中我们将在带区近似 (strip approximation)^[13] 下来考察非弹性中间态对 l 平面奇异性的贡献以及它对交叉道高能行为的影响。处理的方法是应用迭代来求解 Chew, Frautschi 和 Mandelstam 所提出的高能联立方程组^[4]。我们得出, 非弹性中间态将在 l 平面中引起割线, 并对交叉道的高能行为给出一些新的特点。这些结果虽是在带区近似中得到的, 但看来可能具有更普遍的意义。Amati 等在多重边缘碰撞模型的理论中^[14] 也得到了类似的结果。

二、确定高能散射振幅的基本方程组

为清楚起见, 我们略去粒子的同位旋, 相当于考虑两个中性 π 介子的散射。显然这种简化并不影响理论的主要结论。

从对称性立即可以知道, 这时只有一个双重谱函数, 散射振幅可以表示为²⁾

$$f(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} ds' dt' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho(t', u')}{(t' - t)(u' - u)} dt' du' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho(u', s')}{(u' - u)(s' - s)} du' ds', \quad (1)$$

而且 $\rho(x, y)$ 是 x 和 y 的对称函数, 即 $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ 。

带区近似是在双重谱函数中只考虑三个道的弹性谱^[13]。具体地说, 在 $\rho(s, t)$ 中只取 s 道和 t 道的弹性谱部分, 略去对两个道都是非弹性谱的部分, 即取

$$\rho(s, t) = \rho_1(s, t) + \rho_3(s, t), \quad (2)$$

ρ_1 和 ρ_3 分别代表 s 道和 t 道的弹性谱, 它们存在的区域如图 1 所示。这样取的 $\rho(s, t)$ 在 $4\mu^2 < s < 16\mu^2$ 和 $4\mu^2 < t < 16\mu^2$ 的两个带区中是精确的, 在其余的区域则是近似的。

实际上, 由于对称性, ρ_1 和 ρ_3 两个函数不是

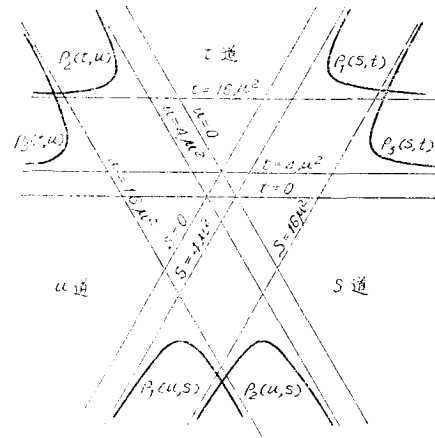


图 1

- 1) 这里以及下文中所谓的弹性中间态和非弹性中间态, 确切地说, 是指没有粒子产生的中间态和有粒子产生的中间态。在不包含产生道的多道势散射情况, 亦得出 f_l 具有同样的逐纯性^[12]。
- 2) 在(1)式里, 双重色散关系没有作减出。在需要作减出时, 它的意义可以如下来理解, 即减出项并不是独立的, 它可由双重谱来决定。另外, 也可以从解析延拓的意义来理解它, 参见 Chew, Frautschi 和 Mandelstam 的文章^[4]。

独立的,它們之間有如下的关系:

$$\rho_1(s, t) = \sigma(s, t), \quad \rho_3(s, t) = \sigma(t, s). \quad (3)$$

同样对 $\rho(t, u)$ 和 $\rho(u, s)$ 亦可作类似的分解.

根据引言中的討論,我們提出下列假定作为本文处理的出发点,即 Regge 极点是由弹性譜贡献的, t 道的弹性譜贡献 t 道的 Regge 极点, s 道的弹性譜贡献 s 道的 Regge 极点等等. 并且假定在 $t > 4\mu^2$ 的某一范围内, t 道的 Regge 极点将决定 t 道弹性譜当 s 很大时(或当 u 很大时)的行为. s 道和 u 道的情况亦同样.

在带区近似中, t 道的非弹性譜即为 s 道和 u 道的弹性譜,因此我們的任务就是研究他們对 t 道 l 平面的奇异性和 s 道高能散射的贡献.

根据带区近似和上述假定,我們即可写出散射振幅在 s 很大时的渐近表示式. 令 $\alpha(t)$ 表示 t 道中主要的 Regge 极点¹⁾的位置, 則对于 s 道的向前衍射峰区域以及 $t > 0$ 的区域,有

$$f(s, t) \cong -\frac{B(t)}{\sin \pi \alpha(t)} [(-s)^{\alpha(t)} + (-u)^{\alpha(t)}] + \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\sigma(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} du' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\sigma(u', t')}{(u' - u)(t' - t)}, \quad (4)$$

其中第一項即为 t 道的 Regge 极点項, 它代表 t 道弹性譜的贡献. 后二項是本文中所新考虑的項, 它們即为图 1 中 $\rho_1(s, t)$ 和 $\rho_2(t, u)$ 两片譜函数的贡献. 可以预料, 它們对 s 道衍射峰内角度稍大的部分是重要的.

双重譜函数 $\sigma(s, t)$ 可以由 Mandelstam 方程来确定, 当 s 很大时, Mandelstam 方程的形式为

$$\sigma(s, t) = \frac{2}{\pi s} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \int_{4\mu^2}^{\infty} dt'' \frac{\theta(K(t, t', t''))}{\sqrt{K(t, t', t'')}} A_t(s, t') A_t^*(s, t''), \quad (5)$$

其中

$$K(t, t', t'') = t^2 + t'^2 + t''^2 - 2(tt' + t't'' + t''t),$$

$A_t(s, t)$ 代表 t 道的吸收部分. 由(4)式,

$$A_t(s, t) = A_{ei}(s, t) + \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int \frac{\sigma(u', t)}{u' - u} du', \quad (6)$$

$A_{ei}(s, t)$ 是 t 道弹性譜的贡献, 它可表为

$$\left. \begin{aligned} A_{ei}(s, t) &= \frac{1}{2i} [f_e(s, t + i\epsilon) - f_e(s, t - i\epsilon)], \\ f_e(s, t) &= -\frac{B(t)}{\sin \pi \alpha(t)} [(-s)^{\alpha(t)} + (-u)^{\alpha(t)}]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(6)式后二項代表 t 道非弹性譜的贡献.

(5)到(7)式即构成带区近似中确定高能散射振幅的联立方程組, 它們是 Chew 等^[4]首先給出的, 但在这里有所修正. 除了在(5)式右方多乘了一个因子 1/2 以外(这是考虑到全同粒子的对称性, 从而当初的么正条件只是对半个球面积分的結果), 我們在(6)式

1) 指在 l 平面中最右方的极点, 它在决定 s 很大时的行为时是主要的, 下同.

中增加了 u 道的谱积分项, 因为对于 u 很大时重要的项对于 s 很大时也同样重要, 这与 Regge 项中同时含有 $(-s)^{\alpha(t)}$ 和 $(-s)^{\alpha(t)}$ 的道理是一样的, 它也是宇称性(或 Gellmann 等所谓的 Signature^[6])的要求; 在(7)式中, 我们并确切地表示出 $A_{e_s}(s, t)$ 是 $f_c(s, t + i\varepsilon)$ 与 $f_c(s, t - i\varepsilon)$ 两项的差, 这一点对以后将么正条件还原成它的初始形式也是重要的。

如 Blankenbecler 等所指明的^[15], 通过(5)式和(6)式的迭代, 可将 $\sigma(s, t)$ 用 $A_{e_s}(s, t)$ 表示出来, 而且对于任何有限的 t 值, $\sigma(s, t)$ 只须经过有限次迭代就能完全确定. n 次迭代能够完全确定 $t < (2n + 4)^2 \mu^2$ 范围内 $\sigma(s, t)$ 的值。

在本文中我们就是应用迭代法来求解积分方程(5)和(6)式, 并把 Regge 极点项 $f_c(s, t)$ 看作是已知的, 在定出 $\sigma(s, t)$ 后, 由(4)式即可决定 $f(s, t)$ 。

Chew 等^[4]曾提出当有高于 p 波的共振时, 上述联立方程存在着困难. 他们提出, 若

$$A_{e_s}(s, t) \sim s^{\alpha(t)}, \quad (8)$$

而且在某些 t 值, $\text{Re} \alpha(t)$ 大于 1, 例如

$$\text{Re} \alpha(t_0) > 1, \quad (9)$$

则当 $t > 4t_0$ 时, $t' = t'' = t_0$ 的点将对(5)式右方的积分有贡献, 得出的一次迭代解 $\sigma^{(1)}(s, t)$ 将 $\gtrsim S^{2\alpha(t_0)-1}$, 再代入(6), $A_i^{(1)}(s, t)$ 亦将 $\gtrsim S^{2\alpha(t_0)-1}$. 继续迭代一次, 即得 $t > 16t_0$ 时, 二次迭代解 $\sigma^{(2)}$ 将 $\gtrsim S^{4\alpha(t_0)-3}$, 因而发散度愈来愈大. 并认为 $A_i(s, t)$ 的振动行为亦不能减弱 σ 的发散度。

我们将说明, 在 s 道物理区的 $f(s, t)$ 的逐次迭代结果中, 上述困难并不出现. 这可能对 σ 进行两次积分时发生抵消的结果, 但也可能在(8)式用更确切的(7)式替换后, σ 本身就不出现愈来愈发散的困难。

设将(5)和(6)式进行 n 次迭代后, 所得的双重谱函数的解为 $\sigma^{(n)}(s, t)$. 我们要求出相应的振幅 $f^{(n)}(s, t)$ 和分波振幅 $f_l^{(n)}(t)$ 的一般表示式。

首先, s 道吸收部分的 n 次迭代结果 $A_s^{(n)}(s, t)$ 为

$$\begin{aligned} A_s^{(n)}(s, t) &= A_{e_s}(s, t) + \frac{1}{\pi} \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\sigma^{(n)}(s, t')}{t' - t} = \\ &= A_{e_s}(s, t) + \frac{1}{\pi^2 s} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \int_{4\mu^2}^{\infty} dt'' G(t, t', t'') A_i^{(n-1)}(s, t') A_i^{(n-1)*}(s, t''), \quad (10) \end{aligned}$$

其中 $A_{e_s}(s, t)$ 代表极点项 $f_c(s, t)$ 的 s 道吸收部分¹⁾,

$$A_{e_s}(s, t) = B(t) s^{\alpha(t)}, \quad (11)$$

$$G(t, t', t'') = \frac{1}{\sqrt{K(t, t', t'')}} \ln \frac{t' + t'' - t + \sqrt{K(t, t', t'')}}{t' + t'' - t - \sqrt{K(t, t', t'')}}}, \quad (12)$$

上式中 \sqrt{K} 在 t 平面中的割线是取自 $(\sqrt{t'} - \sqrt{t''})^2$ 到 $(\sqrt{t'} + \sqrt{t''})^2$, 函数 $G(t, t', t'')$ 规定在 $t < (\sqrt{t'} - \sqrt{t''})^2$ 的实轴上取实数值, 它在沿实轴自 $(\sqrt{t'} + \sqrt{t''})^2$ 到 ∞ 割开的 t 平面上正规解析^[16]。

在 s 道物理区, t 为小于零的实数, 这时通过表成回路积分的形式, 并应用变换回路的方法, 即可将(10)式还原成弹性么正条件的初始形式

1) 在本文中, 所有注脚 e 都代表 t 道弹性谱所贡献的部分。

$$A_s^{(n)}(s, t) = A_{es}(s, t) + \frac{1}{\pi s} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dt' dt'' \frac{\theta(-K)}{\sqrt{-K}} f^{(n-1)}(s, t') f^{(n-1)*}(s, t''), \quad (13)$$

在带区近似中, $A_s(s, t) - A_{es}(s, t)$ 即代表 s 道弹性吸收部分.

由 $A_s^{(n)}(s, t)$ 不难得出 $f^{(n)}(s, t)$ 的表示式:

$$f^{(n)}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' A_s^{(n)}(s', t) \left(\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' - t} \right), \quad (14)$$

若 $A_s^{(n)}(s, t)$ 在 s 很大时发散, 则上式不能直接积分, 它的意义应按第 597 页附注²⁾中的说明来理解. 下面我们提出一种具体处理(14)式的方法, 即先由 $A_s^{(n)}(s, t)$ 计算出 $f_l^{(n)}(t)$, 再通过 Watson 积分表示出 $f^{(n)}(s, t)$. 这种方法不仅便于实际计算, 而且直接将 s 道的高能行为与 t 道复 l 平面中的奇异性联系起来.

考察 t 道的分波振幅. 由于对称性, 只有偶次分波不为零. 令

$$f_l(t) = [1 + (-1)^l] \varphi_l(t), \quad (15)$$

则 $\varphi_l(t)$ 可用 s 道的吸收部分表示出来^[7-10]:

$$\varphi_l(t) = \frac{2}{\pi(t - 4\mu^2)} \int_{4\mu^2}^{\infty} Q_l \left(1 + \frac{2s}{t - 4\mu^2} \right) A_s(s, t) ds, \quad (16)$$

这种 $\varphi_l(t)$ 的表达式适宜于将 l 推广到复 l 平面中去. 根据 Q_l 在 s 很大时的渐近行为, 当 $\text{Re } l$ 足够大时, (16)式的积分是收敛的, 而由此得到的结果可以直接延拓到小的 $\text{Re } l$ 范围(参见后文). 对于小的 $\text{Re } l$, 当(16)中的积分不收敛时, 我们即从上述解析延拓的意义来理解它.

$Q_l \left(1 + \frac{2s}{t - 4\mu^2} \right)$ 作为 l 的函数, 在 $\text{Re } l > -\frac{1}{2}$ 的半平面上是正规的, 实际上它只在 l 等于负整数处有极点, 因而(16)式的积分在积到任一有限的上限值时, 所得的结果都将具有同样的解析性. 于是 $\varphi_l(t)$ 在 $\text{Re } l > -\frac{1}{2}$ 的奇异性完全是由无穷积分所贡献的. 由此可知, 当近似地用 s 很大时的 $A_s(s, t)$ 的渐近式代入(16)式时, 对确定 $\varphi_l(t)$ 的主要奇异性没有影响. 将 $A_s^{(n)}(s, t)$ 代入(16)式, 得

$$\varphi_l^{(n)}(t) = \frac{2}{\pi(t - 4\mu^2)} \int_{4\mu^2}^{\infty} Q_l \left(1 + \frac{2s}{t - 4\mu^2} \right) A_s^{(n)}(s, t) ds, \quad (17)$$

再利用散射振幅的 Watson 积分表示, 即可得到 s 很大时 $f^{(n)}(s, t)$ 的渐近式

$$f^{(n)}(s, t) = - \int_L \frac{\left(l + \frac{1}{2} \right) \varphi_l^{(n)}(t)}{i \sin \pi l} [P_l(-z) + P_l(z)] dl, \quad (18)$$

其中 L 为正向环绕 $\varphi_l^{(n)}(t)$ 奇异性的回路积分. 上式中的 z 等于 $1 + \frac{2s}{t - 4\mu^2}$.

(13), (17)和(18)即为在 s 道小角度范围内表示 $f(s, t)$ 和 $\varphi_l(t)$ 的 n 次迭代结果的一般公式. 由此可以看出, 实际上并不需要先从(5)和(6)式迭代出 $\sigma^{(n)}(s, t)$ 再对它作积分, 直接用(13), (17)和(18)进行迭代即可逐次地决定 $A_s(s, t)$, $\varphi_l(t)$ 和 $f(s, t)$. 因此, (13), (17)和(18)可作为决定高能小角度散射振幅的联立方程组, 以代替原来的(5)和(6)式. 这两组方程的迭代结果是完全相当的.

从新的联立方程组可以清楚地看出,在 $f(s, t)$ 的逐次迭代结果中不会出现愈来愈发散的困难. 因为由 Froissart 上限条件,在 $t \leq 0$ 时,

$$\operatorname{Re} \alpha(t) \leq 1,$$

故用 $f_c(s, t)$ 作为零级解代入(13)式时,所得的 $A_s^{(1)}(s, t)$ 的发散度小于 s^1 ,而由(17)和(18)决定的 $f^{(1)}(s, t)$ 将与 $A_s^{(1)}(s, t)$ 具有相同的发散度,代回(13)即知 $A_s^{(2)}(s, t)$ 的发散度亦小于 s^1 等等.

在本节的最后,我们对 $t > 0$ 即 s 道非物理区的情况作一些讨论. 当 $4\mu^2 > t > 0$ 时,情况比较简单,将(10)式表成回路积分形式后,通过变换回路同样可得

$$A_s^{(n)}(s, t) = A_{cs}(s, t) + \frac{1}{\pi s} \int_{-\infty}^0 dt' \int_{(\sqrt{t}-\sqrt{t'})^2}^{(\sqrt{t}+\sqrt{t'})^2} dt'' \frac{1}{(\sqrt{-K})^*} f^{(n-1)}(s, t') f^{(n-1)*}(s, t''), \quad (19)$$

其中 $\sqrt{-K}$ 取虚部为正的, (19)式可看作 s 道弹性吸收部分么正条件在 $4\mu^2 > t > 0$ 区域的推广.

至于 $t > 4\mu^2$ 的情况,由于比较复杂,下面又不用到,故这里不再讨论¹⁾.

关于 $4\mu^2 > t > 0$ 时,在 $f(s, t)$ 的逐次迭代结果中是否会出现愈来愈发散的困难,由(19)式尚不能得出确切的结论,因为在(19)式中需要用到 t'' 取复数时的 $f^{(n-1)}(s, t'')$, 即(19)与(17)和(18)式尚不能构成完整的方程组,迭代还须通过(5)和(6)式来进行[除非由(19)式计算出来的结果能直接延拓到 $\operatorname{Re} t > 4\mu^2$ 的复平面上]. 但(19)式仍可表明, $A_s^{(n)}(s, t)$ 的发散度不大于前一級振幅 $f^{(n-1)}(s, t)$ 在 $\operatorname{Re} t < 4\mu^2$ 区域的最大发散度.

三、一次迭代解在 s 很大时的行为和复 l 平面奇异性的贡献

将 $f_c(s, t)$ 作为零级解代入(13)式中,即可求出 s 道高能物理区的一次迭代解 $A_s^{(1)}(s, t)$. 对于物理值, s 实际上表示割线上侧的值 $s + i\varepsilon$, 利用 $(-u)^\alpha \cong s^\alpha$ 和 $(-s - i\varepsilon)^\alpha = s^\alpha e^{-i\pi\alpha}$, 即得

$$A_s^{(1)}(s + i\varepsilon, t) = A_{cs}(s + i\varepsilon, t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dt' dt'' \frac{\theta(-K)}{\sqrt{-K}} \cdot \frac{B(t')B(t'')}{\sin \pi\alpha(t') \sin \pi\alpha(t'')} [1 + e^{-i\pi\alpha(t')}] [1 + e^{i\pi\alpha(t'')}] s^{\alpha(t')+\alpha(t'')-1}. \quad (20)$$

我们令

$$R_1(l', t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 dt' dt'' \frac{\theta(-K)}{\sqrt{-K}} \frac{B(t')B(t'')}{\sin \pi\alpha(t') \sin \pi\alpha(t'')} \cdot [1 + e^{-i\pi\alpha(t')}] [1 + e^{i\pi\alpha(t'')}] \delta(\alpha(t') + \alpha(t'') - 1 - l'), \quad (21)$$

由于 $\alpha(t)$ 在 $t < 0$ 时为 t 的渐增函数, 故 $R_1(l', t)$ 只当 l' 在 $2\alpha(-\infty) - 1$ 到 $l_1(t)$ 之间才不为零, 其中 $l_1(t)$ 为 $\alpha(t') + \alpha(t'') - 1$ 在(21)式的实际积分域(如图2所示的

1) 在本文送出后,作者了解到 Грибов 与 Дятлов 曾进行了将弹性么正条件延拓到非物理区的工作,见 ЖЭТФ, 42 (1962), 196. —校改时注

阴影区,它的边綫依赖于 t 中所取的极大值.

对于真空极点, $\alpha(0) = 1$, 在衍射峰范围内 α 变化不大,故可将 $\alpha(t)$ 表为

$$\alpha(t) = 1 + \alpha't,$$

这时 $\alpha(t') + \alpha(t'') - 1$ 在阴影区所取的极大值可近似地求出,得到的结果是

$$l_1(t) \cong 1 + \frac{1}{2} \alpha't. \quad (22)$$

将(21)代入(20)式,

$$A_s^{(1)}(s + i\varepsilon, t) = A_{es}(s + i\varepsilon, t) + \int_{2\alpha(-\infty)-1}^{l_1(t)} R_1(l', t) s^{l'} dl'. \quad (23)$$

由(23)和(17)式不难求出 $\varphi_l^{(1)}(t)$, 根据前面所说明的理由, (17)式中的 Q_l 亦可用它在 s 很大时的渐近式代

入. 当 s 很大时,

$$Q_l \left(1 + \frac{2s}{t - 4\mu^2} \right) \cong \frac{\Gamma^2(1+l)}{2\Gamma(2+2l)} \left(\frac{t - 4\mu^2}{s} \right)^{l+1},$$

因此积分

$$\int_{4\mu^2}^{\infty} Q_l \left(1 + \frac{2s}{t - 4\mu^2} \right) A_s^{(1)}(s + i\varepsilon, t) ds$$

在 $\text{Re } l > 1$ 时是收敛的, 积出得

$$\begin{aligned} \varphi_l^{(1)}(t) = & -\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma^2(1+l)}{\Gamma(2+2l)} (t - 4\mu^2)^l (4\mu^2)^{\alpha(t)-l} B(t) \frac{1}{\alpha(t) - l} - \\ & -\frac{1}{\pi} \frac{\Gamma^2(1+l)}{\Gamma(2+2l)} (t - 4\mu^2)^l \int_{2\alpha(-\infty)-1}^{l_1(t)} (4\mu^2)^{l'-l} R_1(l', t) \frac{dl'}{l' - l}. \end{aligned} \quad (24)$$

如前所述, 这个结果可以直接延拓到 $\text{Re } l < 1$ 的区域.

(24)式第一项为 t 道弹性谱的贡献, 它给出原来所设的真空极点 $l = \alpha(t)$, 第二项是 t 道非弹性谱的贡献, 它在 l 平面中给出一段割綫, 割綫的右端点 $l_1(t)$ 是随着 t 移动的, 由(22)式知, 移动速度在小 t 范围只是真空极点的一半.

以上所得结果的意义可以这样来理解. 在一次迭代中, 我們所考虑的过程如图3所示. 从 t 道来看, 图3(2)中间态有两对粒子, $\sqrt{t'}$ 和 $\sqrt{t''}$ 就分别是两粒子对的质量 ($\sqrt{t'} > 2\mu$, $\sqrt{t''} > 2\mu$). 对于一定的 t , 即一定的 t 道总能量, t' 和 t'' 可以有一变化范围, 它們可以在两粒子对的质量和小于总能量的条件下 (即 $\sqrt{t'} + \sqrt{t''} < \sqrt{t}$) 連續地取值. 这样, 当这对粒子都形成共振态时, 它們所对应的极点即連續地移动而形成割綫.

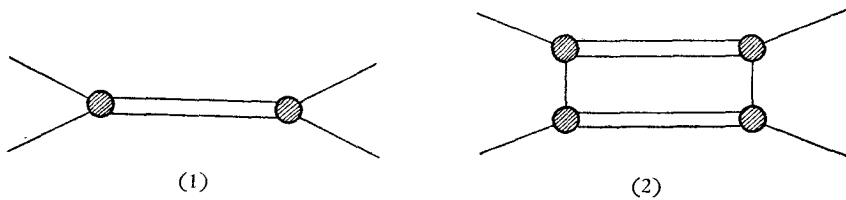


图 3

我們再考察图 3(2) 对 s 道高能散射的贡献。这个图形相应于交换两个真空系统的弹性中间态散射, 它给出的 t 道非弹性谱在 $36\mu^2 > t > 16\mu^2$ 范围是完全的(在带区近似的意义下)。在能量较高时, 小角度的动量转移平方就可达到这样的数量级¹⁾, 因此可以预料, 它对高能衍射峰的尾部将很重要。将 $\varphi^{(1)}(t)$ 代入(18)式中, 并利用 $P_a(-z)$ 和 $P_a(z)$ 的渐近式:

$$P_a(-z) = \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)} \left(-\frac{s}{t-4\mu^2} \right)^\alpha,$$

$$P_a(z) = \frac{\Gamma(1+2\alpha)}{\Gamma^2(1+\alpha)} \left(-\frac{u}{t-4\mu^2} \right)^\alpha.$$

即得

$$f^{(1)}(s, t) = -\frac{B(t)}{\sin \pi\alpha(t)} [(-s)^{\alpha(t)} + (-u)^{\alpha(t)}] - \int_{2\alpha(-\infty)-1}^{l_1(t)} \frac{R_1(l', t)}{\sin \pi l'} [(-s)^{l'} + (-u)^{l'}] dl'. \quad (25)$$

对于物理值, s 应用 $s + i\varepsilon$ 代替, 这时

$$f^{(1)}(s + i\varepsilon, t) = -\frac{B(t)}{\sin \pi\alpha(t)} [1 + e^{-i\pi\alpha(t)}] s^{\alpha(t)} - \int_{2\alpha(-\infty)-1}^{l_1(t)} \frac{R_1(l', t)}{\sin \pi l'} [1 + e^{-i\pi l'}] s^{l'} dl'. \quad (26)$$

可以求出上式中积分的近似值。当 s 很大时, 积分的主要贡献来自上限附近。函数 $\frac{R_1(l', t)}{\sin \pi l'} (1 + e^{-i\pi l'})$ 随 l' 的变化比较缓慢而且在上限处不为零, 因此它可以作为常数提出于积分号外, 剩余的积分立即可以积出, 我們得到

$$f^{(1)}(s + i\varepsilon, t) = -\frac{B(t)}{\sin \pi\alpha(t)} [1 + e^{-i\pi\alpha(t)}] s^{\alpha(t)} - \frac{B_1(t)}{\sin \pi l_1(t)} [1 + e^{-i\pi l_1(t)}] \frac{1}{\ln s} s^{l_1(t)}, \quad (27)$$

其中

$$B_1(t) = R_1[l_1(t), t], \quad (28)$$

当 t 小时, 利用(22)式可以求得

$$B_1(t) \cong \frac{1}{2\alpha'} B^2\left(\frac{t}{4}\right). \quad (29)$$

如果定义 t_0 为

$$s^{\frac{1}{2}\alpha' t_0} = \frac{\alpha'}{B(0)} \ln s \quad (30)$$

(t_0 为 s 的函数), 则当角度较大, 即约使

$$-t > t_0(s) \quad (31)$$

时, 第二项即图 3(2) 的贡献将超过 Regge 极点项。

1) 例如入射动能为 7 Bev 时, 质心系散射角 $\theta_c = 5^\circ$ 和 10° 相应的 $(-t)$ 约为 20 和 $75 \mu^2$ 。

最后,我们对一級解的結果作一簡單的討論. 首先,根据光学定理

$$\sigma_{tot}^{(1)} \sim \frac{1}{s} A_s^{(1)}(s + i\varepsilon, 0) = B(0) + \frac{1}{2\alpha'} B^2(0) \frac{1}{\ln s}, \quad (32)$$

因此,当能量不是非常高时,总截面将随着能量緩慢下降,最后仍趋于真空极点所給出的常数值.

其次,衍射峯将有較长的尾部,因当 $(-t)$ 大于 $t_0(s)$ 时,(27)右方第二項变成主要的,而它的寬度根据(22)式將比原来的大一倍. 随着能量增加, $t_0(s)$ 將减少,长尾部分將向小角度范围扩张.

四、高次迭代的結果

上节的結果不难推广到高次迭代的情况. 例如从(26)和(13)式立即可得

$$A_s^{(2)}(s + i\varepsilon, t) = A_s^{(1)}(s + i\varepsilon, t) + \int_{3\alpha(-\infty)-2}^{t_2(t)} R_2(l', t) s^{l'} dl' + \int_{4\alpha(-\infty)-3}^{t_2'(t)} R_2'(l', t) s^{l'} dl', \quad (33)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} R_2(l, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dt' \int_{-\infty}^0 dt'' \int_{2\alpha(-\infty)-1}^{t_1(l'')} dl' \frac{\theta(-K)}{\sqrt{-K}} \frac{B(t') R_1(l', t'')}{\sin \pi \alpha(t') \sin \pi l'} \\ &\cdot [1 + e^{-i\pi \alpha(t')}] [1 + e^{i\pi l'}] \delta(\alpha(t') + l' - 1 - l) + \text{复共軛項}, \\ R_2'(l, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 dt' \int_{-\infty}^0 dt'' \int_{2\alpha(-\infty)-1}^{t_1(l'')} dl' \int_{2\alpha(-\infty)-1}^{t_1(l'')} dl'' \frac{\theta(-K)}{\sqrt{-K}} \\ &\cdot \frac{R_1(l', t') R_1(l'', t'')}{\sin \pi l' \sin \pi l''} (1 + e^{-i\pi l'}) (1 + e^{i\pi l''}) \delta(l' + l'' - 1 - l). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

于是分波振幅为

$$\begin{aligned} \varphi_l^{(2)}(t) &= \varphi_l^{(1)}(t) - \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma^2(1+l)}{\Gamma(2+2l)} (t - 4\mu^2)^l \int_{3\alpha(-\infty)-2}^{t_2(t)} (4\mu^2)^{l'-l} \frac{R_2(l', t)}{l' - l} dl' - \\ &- \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma^2(1+l)}{\Gamma(2+2l)} (t - 4\mu^2)^l \int_{4\alpha(-\infty)-3}^{t_2'(t)} (4\mu^2)^{l'-l} \frac{R_2'(l', t)}{l' - l} dl', \end{aligned} \quad (35)$$

其中新增的两項皆在复 l 平面中給出割綫,割綫仍在实軸上, $t < 0$ 时右端在 $l = 1$ 的左方,而当 $t = 0$ 时皆到达 $l = 1$ 点. 將(35)代入(18)式,得

$$\begin{aligned} f^{(2)}(s + i\varepsilon, t) &= f^{(1)}(s + i\varepsilon, t) - \int_{3\alpha(-\infty)-2}^{t_2(t)} \frac{R_2(l', t)}{\sin \pi l'} (1 + e^{-i\pi l'}) dl' - \\ &- \int_{4\alpha(-\infty)-3}^{t_2'(t)} \frac{R_2'(l', t)}{\sin \pi l'} (1 + e^{-i\pi l'}) dl'. \end{aligned} \quad (36)$$

当求 $A_s^{(2)}(s + i\varepsilon, t)$ 和 $f^{(2)}(s + i\varepsilon, t)$ 的近似值时,不能簡單地將 $R_2(l', t)$ 和 $R_2'(l', t)$ 取作积分上限处的值而提出到积分号外,因为它们在上限处等于零. 比較方便的求法是将(27)代入(13)式,由此求得 $A_s^{(2)}$ 和 $f^{(2)}$ 具有下述形式:

$$A_s^{(2)}(s + i\varepsilon, t) = B(t) s^{\alpha(t)} + B_1(t) \frac{1}{\ln s} s^{l_1(t)} + B_2(t) \frac{1}{\ln^2 s} s^{l_2(t)} + B_2'(t) \frac{1}{\ln^3 s} s^{l_3(t)}, \quad (37)$$

$$f^{(2)}(s + i\epsilon, t) = f^{(1)}(s + i\epsilon, t) - \frac{B_2(t)}{\sin \pi l_2(t)} [1 + e^{-i\pi l_2(t)}] \frac{1}{\ln^2 s} s^{l_2(t)} - \frac{B_2'(t)}{\sin \pi l_2'(t)} [1 + e^{-i\pi l_2'(t)}] \frac{1}{\ln^3 s} s^{l_2'(t)}, \quad (38)$$

其中 $B_2(t)$ 和 $B_2'(t)$ 为简略计, 不再写出. 另外, 仿前可得出, 在 t 小时

$$l_2'(t) \cong 1 + \frac{1}{4} \alpha' t. \quad (39)$$

不难看出, 在 n 次迭代时, $f^{(n)}$ 中所新增的项将自 $\left(\frac{1}{\ln s}\right)^n$ 开始一直到 $\left(\frac{1}{\ln s}\right)^{2^n-1}$, 而幂次低于 n 的项保持不变.

值得提出的是, 高次项将给出更长的尾部, 例如(38)第三项的宽度为原来 Regge 极点的四倍. 同样随着能量增高, 长尾部分将向小角度范围延长. 高次迭代结果中的总截面在能量非常高时仍趋于真空极点所给出的常数.

在无穷次迭代结果的总和中, 割线右端位置对所有 $t \leq 0$ 的值都保持在 $l = 1$ 处不变¹⁾, 但割线上的跳跃将随 t 发生变化, 当 $t < 0$ 时, $l = 1$ 处的跳跃值变为零. 对 s 道高能行为的影响定性上与以上所述相仿.

五、討 論

在本文中, 我們在一定的假定下得出, 非弹性中间态将对 l 平面的奇异性贡献割线. 这个结论虽是在带区近似中得到的, 但可能具有更普遍的意义, 例如考察交换两个真空系统的一般图形(见图 4), 它与图 3(2) 不同之处只是在于, 新的图形对于 s 道(或 u 道)来说, 中间态亦不是弹性的, 即不只两个粒子而是两组粒子系. 但是一组粒子系可以看成为一个具有复杂内部自由度和可变质量的复合粒子, 因而亦有可能仍得到类似的结果.

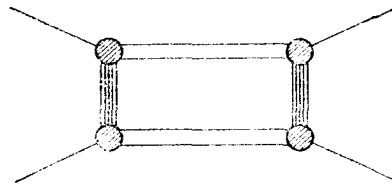


图 4

另外, 我們指出, 在势散射情况, 也可以用(13)和(14)式替代(5)和(6)式作为决定散射振幅的方程组, 只要对运动学因子作相应修改并令 $A_{cs}(s, t)$ 为零即可, 而零级振幅 $f^{(0)}(s, t)$ 即为 Born 项.

最后, 作者对胡宁教授对此工作的关怀和讨论表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Regge, *Nuovo Cimento*, 14 (1959), 951; 18 (1960), 947.

1) 这里只是将各次迭代结果中的割线简单地重迭在一起, 关于求和是否收敛以及求和是否引出新的奇异性并没有讨论.

- Bottino, Longoni and Regge, *Nuovo Cimento*, **23** (1962), 954.
- [2] Mandelstam, *Ann. of Phys.*, **19** (1962), 254.
- [3] Hung Chen, *Phys. Rev.*, **127** (1962), 647.
- [4] Chew, Frautschi and Mandelstam, *Phys. Rev.*, **126** (1962), 1203.
- [5] Blankenbecler and Goldberger, *Phys. Rev.*, **126** (1962), 766.
- [6] Frautschi, Gellmann and Zachariasen, *Phys. Rev.*, **126** (1962), 2204.
- [7] Грибов, *ЖЭТФ*, **41** (1961), 1962; **42** (1962), 1260.
- [8] Barut and Zwanziger, *Phys. Rev.*, **127** (1962), 974.
- [9] Squires, *Nuovo Cimento*, **25** (1962), 242.
- [10] Bardakci, *Phys. Rev.*, **127** (1962), 1832.
- [11] Froissart, *Phys. Rev.*, **123** (1961), 1053.
- [12] Favella and Reineri, *Nuovo Cimento*, **23** (1962), 616.
- [13] Chew and Frautschi, *Phys. Rev.*, **123** (1961), 1478.
- [14] Amati, Fubini and Stanghellini, *Phys. Letter*, **1** (1962), 29.
(在本文已基本完成时, 作者见到了这些作者发表在 *Nuovo Cimento*, **26** 卷上的文章.)
- [15] Blankenbecler, Goldberger, Khuri and Treiman, *Ann. of Phys.*, **10** (1960), 62.
- [16] Mandelstam, *Phys. Rev.*, **112**, (1958), 1344.

ASYMPTOTIC BEHAVIOUR OF π - π SCATTERING AMPLITUDE AND SINGULARITIES IN COMPLEX l -PLANE IN STRIP APPROXIMATION

TSAO CHANG-CHIE

(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The contribution of inelastic intermediate states to the singularities in complex l -plane and to the asymptotic behaviour of crossed channel are investigated in the strip approximation. The procedure is to solve the simultaneous equations suggested by Chew, Frautschi and Mandelstam by means of iteration method. The general iteration expressions for the s channel high energy amplitude $f(s,t)$ and the t channel partial wave amplitude $f_t(t)$ are derived. It is shown that the divergence difficulty mentioned by Chew, Frautschi and Mandelstam is not present in the iteration results of the above $f(s,t)$.

The main results of first iteration are as follows:

i) The total cross section falls slowly for not very high energies, but at the end tends to a constant.

ii) The diffraction angular distribution will have a long tail. As the energy increases, this long tail extends towards the small angle region.

iii) In the t channel a cut will appear along the real axis in complex l -plane; the right ending point of the cut is at $l=1$ when $t=0$, and moves to the left as t decreases, with a speed nearly half that of the vacuum pole.

Higher order iterations are also investigated; the results are qualitatively analogous to those of first order.