

螺旋綫迴旋加速器中粒子流通过非綫性 共振綫($Q_p=6/5$)的研究*

方守賢 魏开煜

提 要

本文用电子计算机对 $N=6$ 的螺旋綫迴旋加速器中粒子流通过非綫性共振綫($Q_p=6/5$) 的动态过程进行了定量計算及分析。求得了在一定的加速电压下, 粒子流在通过此共振綫时的損失率。

一、引 言

在螺旋綫迴旋加速器中, 由于采用了調变磁場, 既保証了粒子运动的軸向聚焦, 又保証了粒子加速所需的等时性条件。但是, 另一方面, 这种磁場形式也有其根本的缺点。就是在一定的条件下^[1], 它会激发強烈的非綫性共振, 导致某些粒子自由振蕩振幅的劇烈增长, 而使运动的稳定性遭到破坏。

原則上, 在建造磁鉄时, 可以把調变磁場的高次和低次諧波的幅度垫补到不危险的程度。但是, 調变磁場基波的幅度却完全由聚焦的要求确定, 不能随意降低。因此, 这种基波将引起不可避免的和最危险的非綫性共振。为了确保加速器正常的运转, 在设计工作中, 必須对这些強烈的共振作仔細的研究。

在螺旋綫迴旋加速器中, D形盒在垂直方向(z 方向)的尺寸是很小的, 决不允許这个方向上的自由振蕩在工作过程中发生任何強烈的共振。所以在設計过程中, 我們把 z 向自由振蕩的頻率限制在 0 与 0.5 之間。但是在这种限制下, 水平方向(r 方向)自由振蕩的頻率却随着能量的增加由 $Q_p=1$ 逐漸增长。在螺旋綫的数目 $N=6$ 的情况下, 粒子能量在 180 MeV 及 420 MeV 左右时, 将先后遇到 $Q_p=6/5$ 及 $Q_p=6/4$ 两条非綫性共振綫。后者是一条非常強烈的四級共振綫。估計在这条共振綫上将会使大多数的粒子丢掉。因此, 加速器参数的选择必須保証粒子流能够順利地通过 $Q_p=6/5$ 共振綫, 至于 $Q_p=6/4$ 共振綫則可作为引出之用。

对于上述非綫性共振的研究, 重要的并不在于粒子流停留在 $Q_p=6/5$ 或 $6/4$ 的运动情况(即靜态), 而在于粒子流如何通过这些共振綫(即动态)。但是到目前为止, 我們所看到的文章, 例如文献[2,3]等没有一个計算动态的。我們在苏联联合原子核研究所德米特利也夫斯基(В. П. Дмитриевский)和高里加(В. В. Кольга)所提出的計算方法的基础上, 进一步进行了研究, 并利用电子计算机对 $Q_p=6/5$ 共振綫进行了靜态和动态

* 1963年6月8日收到。

的一系列計算。所采用的磁場参数是 $N = 6$, $\lambda = 6\text{cm}$, $\varepsilon = 0.1553$ 及 $R_\infty = 280.4\text{cm}$ 。本文中将对計算的方法和結果加以叙述和討論。

二、运动方程

在螺旋綫迴旋加速器中,我們采用圓柱形坐标。当忽略 z 向运动时,带电粒子在磁場中心平面上运动的无量綱方程是^[4]

$$\xi'' - \frac{2\xi'^2}{\xi} - \xi = -\frac{1}{\sqrt{n\xi}} \frac{(\xi^2 + \xi'^2)^{3/2}}{(1 - \xi^2)^{1/2}} \left[1 + \varepsilon \sin\left(\frac{R_\infty}{\lambda}\xi - N\varphi\right) \right], \quad (1)$$

式中 $\xi = r/R_\infty$, r 是粒子的徑向坐标, R_∞ 是光速半径; $2\pi\lambda$ 是螺旋綫的跨距; n 是平均磁場的梯度指数; ε 是調变磁場的相对幅度; “ $\prime$ ”表示对方位角 φ 微分。

由(1)式看出,在螺旋綫的数目 N 选定之后,对 R_∞/λ 具有相同值的加速器,它們有相似性。因而,在电子模型和它所模拟的大加速器中,粒子的运动規律是一样的。这样一来,原則上大加速器中非綫性共振的情况也可以用电子模型来模拟。但是,实际上还有一定程度的困难。例如电子模型在建造中所遇到的高精密度低磁場的產生和測量以及建成后对电子流性能的測量等技术問題,都还没有充分的把握。所以在設計工作中,預先利用电子計算机作詳細的分析是不可缺少的一环。

由綫性理論^[5]可知,在調变磁場的参数选定之后,粒子自由振蕩的頻率 Q_p 随着 n 單調地增长。所以在方程(1)中, n 的增长率就代表粒子流通过共振区的速度。然而 n 与粒子的能量有下列关系:

$$n = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1, \quad (2)$$

假如取共振区前緣的某一能量 $E^{(0)}$ 为起算点(算作 $\varphi = 0$), 則

$$E = E^{(0)} + \frac{eV}{2\pi} \varphi, \quad (3)$$

式中 eV 是粒子每圈所得到的能量。把(3)式代入(2)式,我們有

$$n = n_0 + \sqrt{1 + n_0} \left(\frac{eV}{\pi E_0}\right) \varphi + \left(\frac{eV}{2\pi E_0}\right)^2 \varphi^2, \quad (4)$$

这里 n_0 是 $E = E^{(0)}$ 时的 n 值; E_0 是粒子的靜止能量。(1)与(4)就是电子計算机所使用的基本方程。

(4)式表明,粒子流通过共振区的速度最終取决于加速电压 V 。但是众所周知,在共振时,振幅的增长与共振諧波轉交給自由振蕩的能量是成正比的。粒子流通过共振区的速度愈慢,共振的时间就愈长,积累在自由振蕩方面的能量就愈多,振幅的增长亦愈大,也就愈加危险。这样一来,为了保証足够数量的粒子能够安全地通过共振区,势必对加速电压的大小有一定的要求。因此,我們在計算中采用了两种加速电压,分別是 140 KV 及 70 KV。

三、計算方法与結果分析

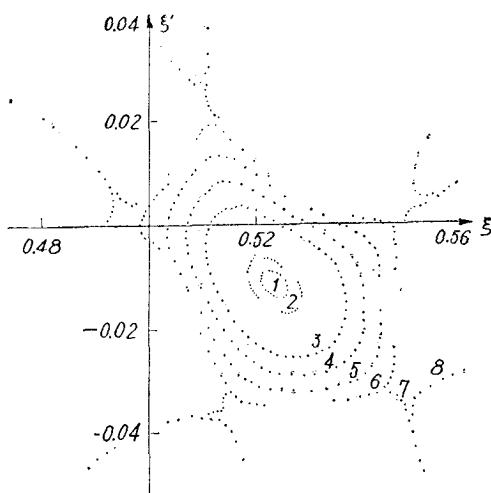
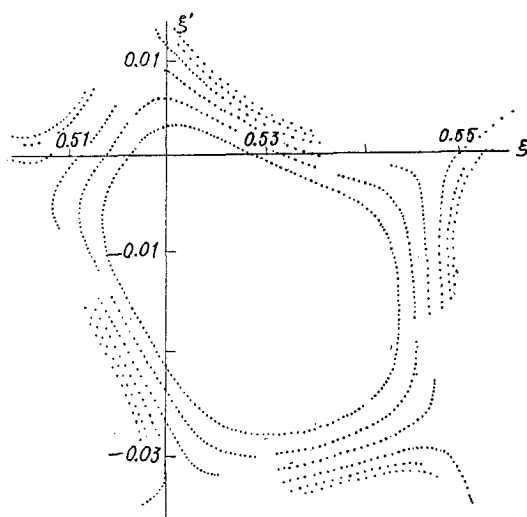
計算是分为两个步驟进行的,即“靜态”計算与“动态”計算。

I. 静态计算

所谓“静态”就是不考虑粒子的加速[即令(4)中的 $V = 0$]来研究它们的自由振荡。这时 n 为常数。作静态计算的目的是求得共振线的精确位置 $n = n_{\text{res}}$ ；研究在共振之前所有可能的自由振荡状态的分布情况，以便选取具有代表性的状态作为动态计算的初始条件。这样可以避免计算的盲目性，减少电子计算机的工作量。

静态计算的步骤和计算结果的相图描述方法，我们在文献[4]中都已讲过了，这里不再重复。从文献[4]中可以看到，在 $(\xi\xi')$ 为坐标轴的相平面上，闭合轨道的相图是一个中心位于 ξ 轴上的椭圆（见文献[4]中的图1）。若以闭合轨道上的某一相位 φ_i 作参考点去观察自由振荡，得到此自由振荡的“部分”相图也是一个椭圆，其中心在闭合轨道椭圆的周界上。对于同一起始条件的自由振荡，取不同的参考点去观察，就得到不同的椭圆（文献[4]中的图2），这些椭圆的中心在闭合轨道椭圆上的不同位置。由于这些椭圆都描写同一个自由振荡，在通过共振区时，其变化行为是唯一确定的，所以我们只要研究其中的一个就够了。就是说，在研究共振过程时，我们可以只固定在闭合轨道的某一相位上去观察粒子的自由振荡。

对于 $n = 0.38$ ，以闭合轨道上的 $\varphi_i = 0$ 作参考点，就得到各种振幅自由振荡的静态相图如图1（即文献[4]中的图3）。在文献[4]中已经指出，这时 3.6cm 以内的小振幅自由振荡的频率为 $Q_p = 1.187$ ；而 6.5cm 以上的大振幅自由振荡的频率已经非常接近 1.2，即进入了 $Q_p = 6/5$ 的共振状态。从图1中我们看到，在振幅为 6.5 cm 以内是闭合的椭圆族。振幅超过 6.5 cm 时，椭圆退化成不封闭的线段，并且随着 φ 的增长相点是发散的。这表示粒子只分布在 6.5 cm 以内的振幅范围内，超过此振幅是不稳定的状态。

图1 $n = 0.38$ 时自由振荡的静态相图图2 $n = 0.39$ 时自由振荡的静态相图

在大振幅范围椭圆的退化可以如下解释：在每隔 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$ 给出一个相点的情况下，当粒子自由振荡的频率接近 $Q_p = N/q$ 时，刚好应该有第 $kq, kq + 1 \cdots kq + (q - 1)$ ($k = 0, 1, 2, 3 \cdots$) 等 q 组相点分别向 q 个相位集中。这样一来，椭圆便断开成 q 个线

段。随着 Q_p 更准确地接近 N/q , 这些綫段本身对相图中心的张角将愈来愈窄。如果 $Q_p = N/q$ 是共振綫, 并且使粒子自由振蕩的振幅強烈增长, 这些綫段便形成有縮向射綫趋势的 q 支拋物綫。图 1 的特征正是这样, 这里 $N = 6, q = 5$, 所以大振幅范围椭圆的退化是从 5 处断开并发散出去的。

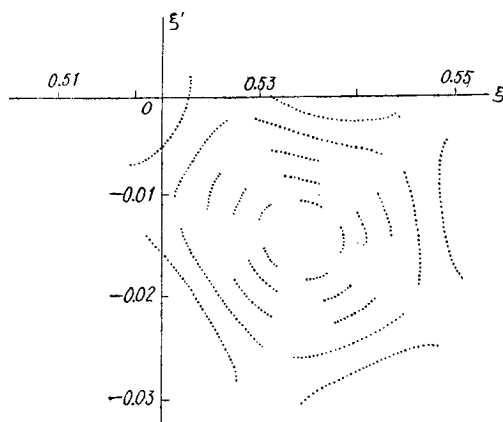


图 3 $n = 0.40$ 时自由振蕩的静态相图

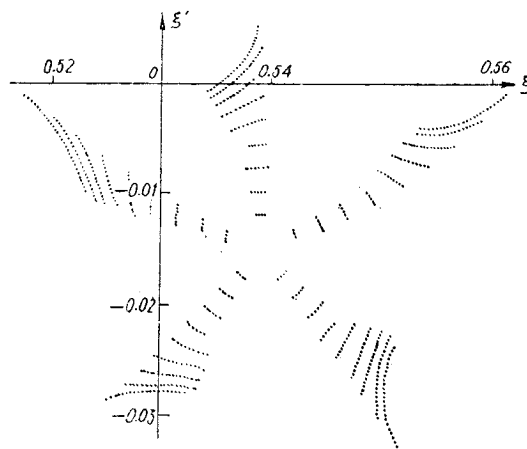


图 4 $n = 0.41$ 时自由振蕩的静态相图

根据上述特征, 我們可以寻找共振綫的精确位置。設想当小振幅自由振蕩的頻率接近 $6/5$ 时, 它們的椭圆也断开成 5 个綫段。当綫段对相图中心的张角縮到最窄时便是共振綫的位置。图 2—5 依次是 $n = 0.39, 0.40, 0.41$ 及 0.42 时自由振蕩的静态相图。从这些图上看, 共振綫的位置在 $n_{\text{pes}} = 0.41$ 。

II. 动态計算

所謂“动态”, 就是有加速电压时, 粒子流在加速过程中通过共振区的行为。这时 n 是 φ 的函数 [即(4)式]。作动态計算的目的是研究在通过共振区时粒子流的損失情况。

动态計算的起算点 (即 n_0) 和計算范围 [即共振区的寬度 $\Delta\varphi \cong 2(n_{\text{pes}} - n_0)/\sqrt{1 + n_0 \left(\frac{eV}{\pi E_0} \right)}$] 可先由近似方法加以估

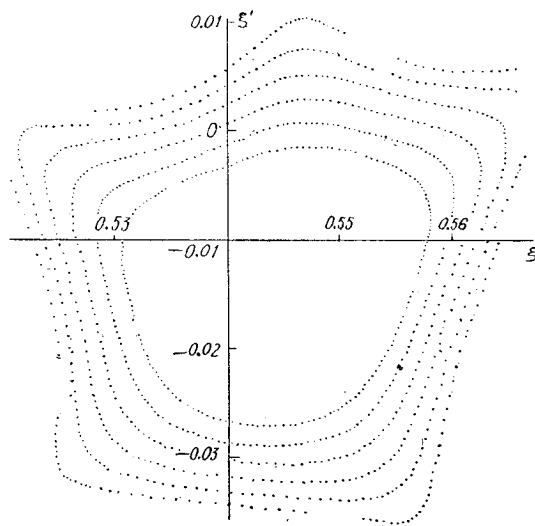


图 5 $n = 0.42$ 时自由振蕩的静态相图

計, 然后再加上一定的安全系数来确定。一般來說, 計算的范围約为几百 π 。相当于粒子要轉几百圈才能够通过共振区。在我們这里, $n_0 = 0.38$, 对于加速电压为 140KV, 大約要轉 150 圈 ($\Delta\varphi \cong 300\pi$); 而对于 70 KV, 大約要轉 250 圈 ($\Delta\varphi \cong 500\pi$)。可見計算的工作量是很大的。但是, 在非綫性分析理論尚不完备可靠的情况下, 这种計算是必須的。即

使在分析理論有了一定的結果时,这种定量計算对于檢驗分析結果也有着重要的意义。

考虑到在所研究的加速器中,由于耦合共振、自共振等因素,过大振幅的粒子終究是会損失的。因此,我們的計算更进一步限制在較小的振幅范围以內。这个范围是图 1 中的第 3 号椭圆。此椭圆所相应的“当地振幅”^[4]是 3.60 cm,而它所代表的自由振蕩的平均振幅是 3.32 cm。此外,我們初步假定,在通过共振区时,凡振幅增长 15% 以上的粒子是会損失的¹⁾。在計算中可以找到一条振幅增长 15% 左右的界限。按照非綫性理論,起始振幅愈大,共振愈強烈。因而,由上述界限向远离椭圆中心的一側,振幅的增长大于 15%,而另一側小于 15%。假定粒子在小振幅的相空間里是均匀分布的²⁾,那么这条界限所割除的面积(損失区面积)在椭圆总面积上所佔的比数,就是在通过共振区时粒子流的損失率。

因为在非綫性共振中振幅的增长不仅依赖于初始振幅,而且依赖于初始相位;所以初看起来,似乎应该在椭圆所包的整个面积上取初始值。但这是不必要的。从靜态图 1 中我們看到,大振幅范围相点的发散只发生在 5 个相角。这就是說,在共振时这 5 个相角附近是最危險的状态。因此,我們可以只在这些相角附近取初始值。但是这 5 个相角每一

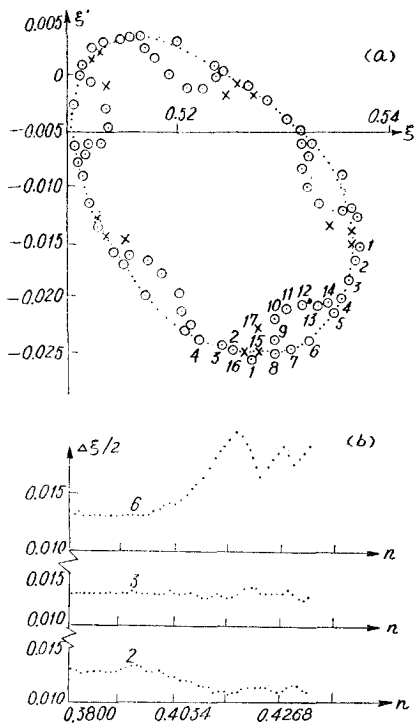


图 6 (a) 損失区分布图; (b) 第 6, 3, 2 号点振幅的动态变化图

个是前一个經過 $\frac{\pi}{3}$ 的靜态变换,而另一方面 n 是 φ 的非常慢的变化函数。在第一个自由振蕩的周期中,“动态”和“靜态”的差别完全可以忽略。这样一来,只要在一个危險相角附近取初始值就够了。在这个相角附近求出了損失区的界限之后,按照靜态計算把它变换到其他四个危險相角附近,就得到了全部損失区域。

根据上述方法,对加速电压为 140 KV 及 70 KV 得到了图 6(a) 及表 1—2 所列的結果。为了便于了解通过共振区时振幅的变化过程,我們选择了三种典型的图形放在图 6(b) 中,分別代表振幅增长、减小和基本上无增減等三个类型。

从表 1 和图 6(a) 中可以看到,当加速电压为 140 KV 时,損失区的界限大致由第 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 及 4 号点連接而成。五个損失区的面积一共約为 83 个坐标单位,占椭圆总面积 (510 个坐标单位) 的 16%。

从表 2 和图 6(a) 可以看到,当加速电压为 70 KV 时,損失区沿順时針方向显著地扩大了一块面积 [图 6(a) 中的“x”号表示扩大部分的大致边界。估計³⁾,全部損失区的面积約为 115 个坐标单位。占椭圆总面积的 22% 左右。

- 1) 在螺旋綫迴旋加速器中,有一系列的非綫性共振綫,如果在 $Q\rho = 6/5$ 共振綫上振幅就增长了 15% 以上的話,穿过下面的共振綫时就将是非常危險的。
- 2) 当然亦可以假定粒子流具有其他分布形式,但是在沒有实验数据之前,我們暫用均匀分布。
- 3) 由于其他因素,实际上不会使用如此低的电压,故无必要精确計算。

表 1 $V = 140$ KV 的动态計算結果

地 量 点 名 号	共振之前 $n_0 = 0.38$ $R_0 = 147.1$ cm	共振			
	振 幅 cm	最 大 振 幅 cm	增 长 比 %	出 現 位 置 n 值	相应半径 R cm
1	3.77	3.08	-18	0.4180	152.2
2	3.69	3.01	-18	0.4151	151.9
3 ¹⁾	3.60	3.51	-2.5	0.4151	151.9
		3.79	5.3	0.4189	152.3
4	3.60	4.21	17	0.4180	152.2
5	3.60	4.77	33	0.4244	153.1
6	3.69	5.82	58	0.4157	151.9
7	3.60	4.63	29	0.4151	151.9
8	3.65	4.21	15	0.4227	152.8
9	3.39	4.21	24	0.4136	151.7
10	2.87	3.36	17	0.4165	152.0
11	2.75	3.15	15	0.4183	152.3
12	2.89	3.15	9.0	0.4186	152.3
13	3.22	3.76	17	0.4177	152.2
14	3.35	3.86	15	0.4171	152.1

1) 此点振幅平均地讲基本上无增减。

表 2 $V = 70$ KV 的动态計算結果

地 量 点 名 号	共振之前 $n_0 = 0.38$ $R_0 = 147.1$ cm	共振			
	振 幅 cm	最 大 振 幅 cm	增 长 比 %	出 現 位 置 n 值	相应半径 R cm
4 ¹⁾	3.60	3.22	-11	0.4116	151.4
		3.79	5.3	0.4145	151.8
5	3.60	4.77	33	0.4143	151.8
6	3.69	无 限 增 长			
8	3.65	无 限 增 长			
11	2.75	3.08	12	0.4157	151.9
15	3.60	5.19	44	0.4130	151.6
16	3.60	4.21	17	0.4117	151.4
17	3.10	4.35	40	0.4117	151.4

1) 此点振幅平均地讲基本上无增减。

在相邻两个损失区之間还有一个振幅減小的区域(如第1, 2号点)。这是因为在这些初始相角的粒子, 它們的自由振蕩相位与共振諧波的相位处于某种“相反”的状态。在这种状态下发生共振, 首先是振蕩能量損失, 振幅減小, 一直要到粒子振蕩的相位改变到与共振諧波处于某种“相同”的状态时, 粒子的振蕩能量轉为增长, 振幅才开始增大。但是这

种过程在这里未能全部实现, 因为振荡的频率是变化的。当它们的振幅减小到一定的程度时, 粒子已经走出了共振区。

最大(或最小)振幅出现的位置并不在 $n = 0.41$, 而在稍后一些, 并且对不同的点子亦有所差别。这是因为振幅的增长(或减小)是净得(或净失)能量的“累积效应”, 而不是“瞬时效应”, 并且能量的累积过程是与初始振幅和初始相位有关的。

四、基本結論

綜合上述計算結果, 我們得到下面的基本結論: 对 $N = 6$, $R_{\infty}/\lambda \cong 47$, $Q_s \cong 0.24$ ^[4] 的螺旋綫迴旋加速器, 若采用 140KV 的加速电压, 則自由振荡的平均振幅在 $0.0118R_{\infty}$ 以內的粒子流通过 $Q_p = 6/5$ 非綫性共振綫时, 其損失率为 16%。若将加速电压降低至 70 KV, 則此損失率增长到 22% 左右。欲使通过此共振綫时粒子流不損失, 則应当設法把粒子自由振荡的起始振幅限制到大約 $0.009 R_{\infty}$ 以下。

本文中电子計算机的具体計算工作是由宋威、张文婷、高中昌等同志完成的。我們对上述同志的密切协作和热情帮助表示深切感謝。我們也对王传英同志經常的討論和帮助表示謝意。

参 考 文 献

- [1] Боголюбов, Н. Н., Митропольский, Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва ГИФМЛ (1958), 156.
- [2] Hing, N. M., Walkinshaw, W., *Nuclear Instr.* **2**, No. 4 (1958), 287.
- [3] Laslett, L. J., MURA 452, 461, 463 (1959).
- [4] 方守賢、魏开煜, 物理学报, **20** (1964), 305.
- [5] Дмитриевский, В. П., Кольга, В. В. и.т.п., *Атомная энергия*, **8**, вып. 3 (1960), 198.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОХОЖДЕНИЯ ЧАСТИЦ ЧЕРЕЗ НЕЛИНЕЙНУЮ РЕЗОНАНСНУЮ ЛИНИЮ ($Q_p = 6/5$) В ЦИКЛОТРОНЕ С ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Фан Шоу-сянь, Уай Кай-юе

Резюме

В данной работе с помощью электронной счётной машины произведены количественное исследование и анализ процесса прохождения частиц через резонансную линию ($Q_p = 6/5$) в циклотроне с пространственной вариацией при $N = 6$ с учётом ускорения. Сделана оценка процентов потери в потоках частиц при прохождении через резонансную линию при определенном ускоряющем напряжении.