第21卷 第1期
1965 年 1 月

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 21, No. 1
January, 1965

B_2羣和基本粒子强相互作用*

关 洪
(北京大学物理系)

提　　要

計算了 B_2 羣不可約表示的直接乘积 4×4, 4×5, 4×10 和 5×5 分解中的約化系数. 給出了它在基本粒子强相互作用对称性方面的应用的若干例子: 推导了散射截面关系和低維数表示的质量关系, 討論了共振态的填充和衰变情况以及 R 反演不变性等.

引　　言

近年来, 用单純李羣去研究基本粒子对称性的方法得到了巨大的发展[1]. 目前最流行的是 SU_3 羣的方案, 在 Behrends 等的工作[1]中也提出了别的可能方案: C_2 羣, B_2 羣, G_2 羣等. 要做出定量的估計, 必須知道不变羣的不可約表示的直接乘积分解的約化系数, 或者叫做广义的 Clebsch-Gordan 系数. 已經有一些工作計算了 SU_3 羣和 G_2 羣的一些約化系数[1]). 在 Edmonds 的工作[2]中, 将約化系数分解为同位旋标量因子和通常的 Clebsch-Gordan 系数的乘积; 因为后者是已知的, 所以只需要計算同位旋标量因子就够了. 新近, 孙洪洲和韓其智[3]将 SU_3 羣的八个无穷小算符組成三組同位旋空間中的不可約张量, 利用它們之間的对易关系, 提出了一种計算同位旋标量因子的簡便易行的方法.

我們用孙洪洲和韓其智的方法去处理 B_2 羣, 計算了几种低維数表示直接乘积的同位旋标量因子. 然后, 还給出了 B_2 羣在基本粒子強相互作用对称性方面应用的一些例子: 推导了散射截面关系和低維数表示的质量关系, 討論了共振态的填充和衰变情况以及 R 反演不变性等.

一、B_2 羣和它的不可約表示

假定核子 N (质子 p 和中子 n) 和 Ξ 超子 (Ξ^0 和 Ξ^-) 具有相同的质量、自旋和宇称, 并且具有相同的強相互作用性质. 即是說, 它們組成一組超多重态, 可用四分量的

$$\Psi = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

来表示. 于是, 对于 Ψ 空間內部的所有变換, 強相互作用都应該保持不变. 核子的超荷 $Y = 1$, 同位旋 $I = 1/2$; Ξ 超子的 $Y = -1$, $I = 1/2$. 故这些不变变换中 Y 的改变和同

* 1964 年 1 月 2 日收到.
1) 校后记: 最近发表了一篇关于 C_2 羣的工作[18].

位旋第三分量M的改变只能有$\Delta Y = 0$, $\Delta M = 0$, ± 1; $\Delta Y = 2$, $\Delta M = 0$, ± 1 和$\Delta Y = -2$, $\Delta M = 0$, ± 1 等九种. 我們希望, 这些不同ΔY 值的三組变换算符分别組成三組同位旋空間中的一阶不可約张量. 加上守恆量超荷,在Ψ表象中,这十个变换算符选择如下:

$$\left.\begin{aligned}
&U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};\\
&\tau_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tau_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\\
&T_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\\
&V_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

它們之間存在厄密共軛关系

$$U^+ = U, \ \tau_q^+ = (-1)^q \tau_{-q}, \ T_q^+ = (-1)^q V_{-q}, \qquad (1.3)$$

其中$q = 0$, ± 1. 它們之間所有不等于零的对易关系为

$$[U, \tau_q] = 0, [\tau_0, \tau_{\pm 1}] = \pm \tau_{\pm 1}, \ [\tau_1, \tau_{-1}] = -\tau_0; \qquad (1.4)$$

$$\left.\begin{aligned} &[U, T_q] = 2T_q, \ [\tau_0, T_q] = qT_q, \\ &[\tau_{\pm 1}, T_q] = \mp \left[\frac{1}{2}(1 \mp q)(1 \pm q + 1)\right]^{\frac{1}{2}} T_{q\pm 1}; \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

$$\left.\begin{aligned} &[U, V_q] = -2V_q, \ [\tau_0, V_q] = qV_q, \\ &[\tau_{\pm 1}, V_q] = \mp \left[\frac{1}{2}(1 \mp q)(1 \pm q + 1)\right]^{\frac{1}{2}} V_{q\pm 1}; \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

$$[T_q^+, T_q] = -\frac{1}{4}(U + 2q\tau_0), \ [T_0^+, T_{\pm 1}] = \pm \frac{1}{2}\tau_{\pm 1}; \qquad (1.7)$$

$$[V_q^+, V_q] = \frac{1}{4}(U - 2q\tau_0), \ [V_0^+, V_{\pm 1}] = \pm \frac{1}{2}\tau_{\pm 1}. \qquad (1.8)$$

不难看出: U 就是超荷算符; τ_q 是角动量型的, 它們就是同位旋轉动羣的三个无穷小算符; T_q 和 V_q 各是一組同位旋空間中的一阶不可約张量.

从(1.4)—(1.8)式可見,这十个算符的对易关系是封閉的,事实上它們就是 B_2 羣的十个无穷小算符. B_2 羣与五維轉动羣 O_5 同构, 它是四維幺模酉羣 SU_4 的一个子羣. B_2 羣反映了核子和Ξ超子的对称性,它的一些基本性質已經在 Behrends 等的工作[1]中有所討論. 为了計算 B_2 羣的約化系数,下面我們采用孙洪洲和韓其智的方法[3]去处理它.

由(1.4)式容易驗証，算符

$$\tau^2 = \tau_0\tau_0 - \tau_1\tau_{-1} - \tau_{-1}\tau_1 \tag{1.9}$$

和 U, τ_0 这三个厄密算符彼此对易. 于是我們可以取 U, τ^2 和 τ_0 的共同本征函数 $|YIM\rangle$ 为 B_2 羣表示空間的基矢，它满足方程

$$\left.\begin{aligned} U|YIM\rangle &= Y|YIM\rangle, \\ \tau^2|YIM\rangle &= I(I+1)|YIM\rangle, \\ \tau_0|YIM\rangle &= M|YIM\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

由于 τ_q 是同位旋角动量算符，所以本征值 I 和 M 就是同位旋和它的第三分量这两个量子数. 如同通常的角动量理論，我們規定

$$\langle YIM'|\tau_{\pm1}|YIM\rangle = \mp\left[\frac{1}{2}(I\mp M)(I\pm M+1)\right]^{\frac{1}{2}}\delta_{M',M\pm1}. \tag{1.11}$$

要注意，和 SU_3 羣不同，B_2 羣中 U, τ^2 和 τ_0 这三个算符并不足以組成观察量的完全集. 也就是說，态 $|YIM\rangle$ 一般是簡并的. 为了組成完全集，必須再增加一个对易的算符[4]. 但是，在本文中将具体計算到的，也是目前物理应用上重要的几个低維数表示中，并不含有簡并态(实际上，維数最低的一个含有簡并态的表示是 35 維的)，这时只用上述三个量子数就够了. 因此，为了簡单起見，我們在这里只討論了非簡并的情形.

(1.10)和(1.11)式已經給出了 $\Delta Y = 0$ 的矩陣元. 再由(1.5)和(1.6)式，对一阶不可約张量 T_q 和 V_q 运用 Wigner-Eckart 定理，可将 $\Delta Y = \pm 2$ 的矩陣元分别表示如下：

$$\langle Y'I'M'|T_q|YIM\rangle = \delta_{Y',Y+2}(2I'+1)^{-\frac{1}{2}}\langle IM1q|I'M'\rangle\langle Y+2, I'\|T\|YI\rangle, \tag{1.12}$$

$$\langle Y'I'M'|V_q|YIM\rangle = \delta_{Y',Y-2}(2I'+1)^{-\frac{1}{2}}\langle IM1q|I'M'\rangle\langle Y-2, I'\|T\|YI\rangle, \tag{1.13}$$

其中 $\langle IM1q|I'M'\rangle$ 是通常的 Clebsch-Gordan 系数. 另外，从(1.3)式可知，T 和 V 的約化矩陣元之間存在关系

$$\langle YI\|T\|Y-2,\ I'\rangle = (-1)^{I-I'}\langle Y-2,\ I'\|V\|YI\rangle. \tag{1.14}$$

我們可以再規定所有的 T 約化矩陣元都取正实数值.

由(1.7)式可导出不同 I' 值的三种約化矩陣元所满足的联立递推方程組：

$$\left.\begin{aligned}
&|\langle YI\|T\|Y-2,\ I+1\rangle|^2 = \frac{1}{4}(2I+3)(Y-2I) + \frac{1}{(I+1)(2I+1)}\times \\
&\times|\langle Y+2, I+1\|T\|YI\rangle|^2 + \frac{2I+3}{(I+1)(2I+1)}|\langle Y+2, I\|T\|YI\rangle|^2 + \\
&+\frac{2I+3}{2I+1}|\langle Y+2,\ I-1\|T\|YI\rangle|^2, \\
&|\langle YI\|T\|Y-2, I\rangle|^2 = \frac{(I+1)(2I+1)}{4I}Y + |\langle Y+2,\ I\|T\|Y,\ I\rangle|^2 + \\
&+\frac{2I+1}{I(2I+3)}\{|\langle Y+2,\ I+1\|T\|YI\rangle|^2 - |\langle YI\|T\|Y-2,\ I+1\rangle|^2\}, \\
&|\langle YI\|T\|Y-2, I-1\rangle|^2 = \frac{1}{4}(2I+1)(Y+2I) + \frac{2I+1}{2I+3}\times \\
&\times|\langle Y+2, I+1\|T\|YI\rangle|^2 - \frac{1}{(I+1)(2I+3)}|\langle YI\|T\|Y-2, I+1\rangle|^2 - \\
&-\frac{1}{I+1}|\langle YI\|T\|Y-2,\ I\rangle|^2.
\end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

对 B_2 羣的某个不可約表示，令它所含的最大的 Y 值为 Y_0，相应的基矢为 $|Y_0I_0M\rangle$. 如果知道了所有的約化矩陣元，就可以用递推公式

$$|YIM\rangle = \frac{(2I+1)^{\frac{1}{2}}}{\langle YI\|V\|Y+2,\,I'\rangle}\sum_{M'q}\langle I'M'1q|IM\rangle V_q|Y+2,\,I'M'\rangle \tag{1.16}$$

去构造这表示中的其余基矢，这个公式乃是(1.13)式的改写.

从最高的 $|Y_0I_0\rangle$ 多重态出发，利用方程組(1.15)逐步推演，便能求出这表示中全部的約化矩陣元，不等于零的矩陣元就联系着实际存在的态.

令 $n=0,1,2,\cdots$ 和 $k=0,1,2,\cdots$ 分别表示对 Y 和对 I 的迭代次数，定义

$$\left.\begin{aligned}
a_k(n) &= |\langle Y_0-2n,\,I_0+n-k\|T\|Y_0-2n-2,\,I_0+n-k+1\rangle|^2,\\
b_k(n) &= |\langle Y_0-2n,\,I_0+n-k\|T\|Y_0-2n-2,\,I_0+n-k\rangle|^2,\\
c_k(n) &= |\langle Y_0-2n,\,I_0+n-k\|T\|Y_0-2n-2,\,I_0+n-k-1\rangle|^2,
\end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

则可将所推出的最初几个約化矩陣元平方的公式表成

$$a_0(n) = \frac{1}{4}(n+1)(2I_0+2n+3)(Y_0-2I_0-2n), \tag{1.18}$$

$$b_0(n) = \frac{1}{4}\frac{I_0}{I_0+n}(2I_0+2n+1)(Y_0+2), \tag{1.19}$$

$$c_0(n) = \frac{1}{4(I_0+n)}\{[2(I_0+n)^2-I_0]Y_0+2[(2I_0+1)(I_0+n)^2-I_0]\}, \tag{1.20}$$

$$a_1(n) = \frac{n(2I_0+2n+1)}{4(I_0+n)}\{(I_0+n+1)Y_0-2(I_0+n)^2+2\}, \tag{1.21}$$

$$b_1(n) = \frac{2I_0+2n-1}{4(I_0+n)(I_0+n-1)}\{2(I_0^2+nI_0-n)(Y_0+1)+nY_0\}, \tag{1.22}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

对每个有限維数的不可約表示，要求 $a_0(n)$ 必須在某个 n 值处中断，否则会无限扩展下去. 令中断时 $n=\mu$，即

$$|Y_0-2\mu-2,\,I_0+\mu+1\rangle = 0 \qquad a_0(\mu)=0.$$

由(1.18)式可見，这条件要求

$$Y_0 = 2I_0+2\mu. \tag{1.23}$$

或者我們取 $\lambda=2I_0$，于是有 $Y_0=\lambda+2\mu$，其中 λ 和 μ 都取非負整数值，因而 Y_0 也只能取非負整数值. 考虑到 Y 的变化間隔是 2，所以量子数 Y 只能取整数值，它就是超荷量子数. 实际上，λ 和 μ 就是 Behrends 等[1]用来标記不可約表示 $D(\lambda_1\lambda_2)$ 的指标 λ_1 和 λ_2，表示 $D(\lambda\mu)$ 的維数是

$$d = (1+\lambda)(1+\mu)\left[1+\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\right]\left[1+\frac{1}{3}(\lambda+2\mu)\right]. \tag{1.24}$$

我們将用 $[\lambda\mu]$ 来标記不可約表示，有时也用它的維数 d 来代表. 分别取 $\lambda=0,1,2,\cdots$ 和 $\mu=0,1,2,\cdots$，就得出各个不同的不可約表示.

B_2 羣最低維数的七个不可約表示是[00],[10],[01],[20],[02],[11],[30]，相应的維数是 1, 4, 5, 10, 14, 16, 20. 我們求出了这些不可約表示中的 $|YI\rangle$ 多重态分量和联系着这些多重态的約化矩陣元平方，結果列在表 1 中.

表 1　B_2 羣的不可約表示及其約化矩陣元平方

$[\lambda\mu]$	d	Y	I	n	$a_0(n)$	$b_0(n)$	$c_0(n)$	$a_1(n)$	$b_1(n)$	$c_1(n)$	$a_2(n)$	$b_2(n)$	$c_2(n)$	$a_3(n)$
[00]	1	0	0	0										
[10]	4	1	1/2	0		3/2								
		−1	1/2	1										
[01]	5	2	0	0	3/2									
		0	1	1			3/2							
		−2	0	2										
[20]	10	2	1	0		3	3/2							
		0	0, 1	1					3		3/2			
		−2	1	2										
[02]	14	4	0	0	3									
		2	1	1	5		5/2							
		0	0, 2	2			5				5/2			
		−2	1	3									3	
		−4	0	4										
[11]	16	3	1/2	0	2	5/2								
		1	1/2, 3/2	1		5/3	10/3	10/3	2/3					
		−1	1/2, 3/2	2						2		5/2		
		−3	1/2	3										
[30]	20	3	3/2	0		5	4							
		1	1/2, 3/2	1					20/3	4/3	4/3	25/6		
		−1	1/2, 3/2	2								5		4
		−3	3/2	3										

二、B_2 羣不可約表示直接乘积的分解

考虑 B_2 羣的两个不可約表示 $[\lambda_1\mu_1]$ 和 $[\lambda_2\mu_2]$，其基矢分别为 $|[\lambda_1\mu_1]Y_1I_1M_1\rangle$ 和 $|[\lambda_2\mu_2]Y_2I_2M_2\rangle$。这两个表示的直接乘积一般可以分解为若干个不可約表示的直接和：

$$[\lambda_1\mu_1]\times[\lambda_2\mu_2]=\sum[\lambda\mu], \tag{2.1}$$

其中每个乘积表示 $[\lambda\mu]$ 的基矢是 $|[\lambda\mu]YIM\rangle$。

求不可約表示乘积的分解的方法是[3,4]：对所有不同的 $|Y_1I_1\rangle$ 和 $|Y_2I_2\rangle$，分别将 Y_1 和 Y_2 作代数和得 Y，将 I_1 和 I_2 作矢量耦合得 I，然后由所得的全部 $|YI\rangle$ 分量决定它們应該属于哪几个不可約表示 $[\lambda\mu]$。

两套不同的表示基矢之間有綫性組合关系

$$|[\lambda\mu]YIM\rangle=\sum_{\substack{Y_1I_1M_1\\Y_2I_2M_2}}\langle[\lambda_1\mu_1]Y_1I_1M_1,[\lambda_2\mu_2]Y_2I_2M_2|[\lambda\mu]YIM\rangle\times$$
$$\times|[\lambda_1\mu_1]Y_1I_1M_1\rangle|[\lambda_2\mu_2]Y_2I_2M_2\rangle. \tag{2.2}$$

按照 Edmonds[2]，(2.2)式中的組合系数称为 B_2 羣的約化系数，它可以分解因子为

$$\langle[\lambda_1\mu_1]Y_1I_1M_1,\ [\lambda_2\mu_2]Y_2I_2M_2|[\lambda\mu]YIM\rangle=$$
$$=\delta_{Y,Y_1+Y_2}\langle I_1M_1I_2M_2|IM\rangle\langle[\lambda_1\mu_1]Y_1I_1,\ [\lambda_2\mu_2]Y_2I_2|[\lambda\mu]Y_1+Y_2,\ I\rangle, \tag{2.3}$$

其中 $\langle[\lambda_1\mu_1]Y_1I_1,\ [\lambda_2\mu_2]Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle$ 叫做同位旋标量因子，因为它在同位旋轉动下不变，下面将它簡写为 $\langle Y_1I_1, Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle$. 同位旋标量因子满足归一化条件

$$\sum_{Y_1I_1Y_2I_2}|\langle Y_1I_1Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle|^2=1, \tag{2.4}$$

$$\sum_{[\lambda\mu]}|\langle Y_1I_1Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle|^2=1. \tag{2.5}$$

利用(2.3)式，可将(2.2)式改写为

$$|[\lambda\mu]YIM\rangle=\sum_{Y_1I_1Y_2I_2}\langle Y_1I_1Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle|Y_1I_1Y_2I_2IM\rangle, \tag{2.6}$$

其中

$$|Y_1I_1Y_2I_2IM\rangle=\sum_{M_1M_2}\langle I_1M_1I_2M_2|IM\rangle|[\lambda_1\mu_1]Y_1I_1M_1\rangle|[\lambda_2\mu_2]Y_2I_2M_2\rangle. \tag{2.7}$$

下面我們来求同位旋标量因子. 对某乘积表示 $[\lambda\mu]$，它的最高 Y 値的基矢 $|[\lambda\mu]Y_0I_0M\rangle$ 满足

$$T_q|[\lambda\mu]Y_0I_0M\rangle=0, \tag{2.8}$$

其中 $T_q=(T_1)_q+(T_2)_q$ 是使 Y 值增加的算符；T_1 和 T_2 相应于表示 $[\lambda_1\mu_1]$ 和 $[\lambda_2\mu_2]$. 由(2.8)式可得出方程

$$\sum_{Y_1I_1Y_2I_2}\langle Y_1'I_1'Y_2'I_2'I'\|T\|Y_1I_1Y_2I_2I_0\rangle\langle Y_1I_1Y_2I_2|[\lambda\mu]Y_0I_0\rangle=0. \tag{2.9}$$

上式中乘积表示的約化矩陣元可表成[5]

$$\begin{aligned}&\langle Y_1'I_1'Y_2'I_2'I'\|T\|Y_1I_1Y_2I_2I\rangle=\\&=\delta_{Y_2',Y_2}\delta_{I_2',I_2}(-1)^{I_1'+I_2+I+1}[(2I'+1)(2I+1)]^{\frac12}\begin{Bmatrix}1&I_1&I_1'\\I_2&I'&I\end{Bmatrix}\langle Y_1+2,I_1'\|T_1\|Y_1I_1\rangle+\\&+\delta_{Y_1',Y_1}\delta_{I_1',I_1}(-1)^{I_1+I_2+I'+1}[(2I'+1)(2I+1)]^{\frac12}\begin{Bmatrix}1&I_2&I_2'\\I_1&I'&I\end{Bmatrix}\langle Y_2+2,\ I_2'\|T_2\|Y_2I_2\rangle,\end{aligned} \tag{2.10}$$

其中的$\begin{Bmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot\end{Bmatrix}$是 Wigner 的 $6-j$ 符号. 解出由取不同 $|Y_1'I_1'Y_2'I_2'I'\rangle$ 态的(2.9)式和归一化条件(2.4)式所組成的方程組，便求得第一組同位旋标量因子 $\langle Y_1I_1Y_2I_2|[\lambda\mu]Y_0I_0\rangle$. 然后，其余的同位旋标量因子就可由递推公式

$$\begin{aligned}&\langle Y_1I_1Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle=[\langle Y+2,\ I'\|T\|YI\rangle]^{-1}\times\\&\times\sum_{Y_1'I_1'Y_2'I_2'}\langle Y_1'I_1'Y_2'I_2'|[\lambda\mu]Y+2,\ I'\rangle\langle Y_1'I_1'Y_2'I_2'I'\|T\|Y_1I_1Y_2I_2I\rangle\end{aligned} \tag{2.11}$$

逐步衍生. 这个公式是从(1.16)式得来的.

运用上述的方法，我們計算了下面几种不可約表示的直接乘积

$$[10]\times[10]=[00]+[01]+[20], \tag{2.12}$$

$$[10]\times[01]=[10]+[11], \tag{2.13}$$

$$[10]\times[20]=[10]+[11]+[30], \tag{2.14}$$

$$[01]\times[01]=[00]+[20]+[02] \tag{2.15}$$

的同位旋标量因子，結果分别列在表 2 到表 5 中. 这些表中只列出了 $Y\geqslant 0$ 的結果，因

为将所有 Y_1, Y_2 和 Y 都变个符号就能得到 $Y < 0$ 时的系数.

表 2 B_2 羣的同位旋标量因子 $\langle[1\ 0]Y_1I_1,[1\ 0]Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle$

列指标：Y_1I_1, Y_2I_2； 行指标：$[\lambda\mu]$

$Y=2$	$1\ 1/2,\quad 1\ 1/2$	
	$I=0$	$I=1$
[0 1]	1	0
[2 0]	0	1

$Y=0$	$1\ 1/2,\quad -1\ 1/2$		$-1\ 1/2,\quad 1\ 1/2$	
	$I=0$	$I=1$	$I=0$	$I=1$
[0 0]	$1/\sqrt{2}$	0	$1/\sqrt{2}$	0
[0 1]	0	$1/\sqrt{2}$	0	$-1/\sqrt{2}$
[2 0]	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

表 3 B_2 羣的同位旋标量因子 $\langle[1\ 0]Y_1I_1,\ [0\ 1]Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle$

列指标：Y_1I_1, Y_2I_2； 行指标：$[\lambda\mu]$

$Y=3$	$1\ 1/2,\quad 2\ 0$ $I=1/2$
[1 1]	1

$Y=1$	$1\ 1/2,\quad 0\ 1$		$-1\ 1/2,\ 2\ 0$
	$I=1/2$	$I=3/2$	$I=1/2$
[1 0]	$\sqrt{3/5}$	0	$\sqrt{2/5}$
[1 1]	$-\sqrt{2/5}$	1	$\sqrt{3/5}$

表 4 B_2 羣的同位旋标量因子 $\langle[1\ 0]Y_1I_1,\ [2\ 0]Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle$

列指标：Y_1I_1, Y_2I_2； 行指标：$[\lambda\mu]$

$Y=3$	$1\ 1/2,\quad 2\ 1$	
	$I=1/2$	$I=3/2$
[1 1]	1	0
[3 0]	0	1

$Y=1$	$1\ 1/2,\ 0\ 0$	$1\ 1/2,\quad 0\ 1$		$-1\ 1/2,\quad 2\ 1$	
	$I=1/2$	$I=1/2$	$I=3/2$	$I=1/2$	$I=3/2$
[1 0]	$1/\sqrt{10}$	$-\sqrt{3/10}$	0	$-\sqrt{3/5}$	0
[1 1]	$\sqrt{2/5}$	$2\sqrt{2/15}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{15}$	$-\sqrt{2/3}$
[3 0]	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{6}$	$\sqrt{2/3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$

表 5 B_2 羣的同位旋标量因子 $\langle[0\ 1]Y_1I_1,\ [0\ 1]Y_2I_2|[\lambda\mu]YI\rangle$

列指标：Y_1I_1,Y_2I_2； 行指标：$[\lambda\mu]$

$Y=4$	$2\ 0,\quad 2\ 0$ $I=0$
[0 2]	1

$Y=2$	$2\ 0,\quad 0\ 1$ $I=1$	$0\ 1,\quad 2\ 0$ $I=1$
[2 0]	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
[0 2]	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$

$Y=0$	$2\ 0,\quad -2\ 0$	$0\ 1,\quad 0\ 1$			$-2\ 0,\quad 2\ 0$
	$I=0$	$I=0$	$I=1$	$I=2$	$I=0$
[0 0]	$1/\sqrt{5}$	$-\sqrt{3/5}$	0	0	$1/\sqrt{5}$
[2 0]	$1/\sqrt{2}$	0	1	0	$-1/\sqrt{2}$
[0 2]	$\sqrt{3/10}$	$\sqrt{2/5}$	0	1	$\sqrt{3/10}$

三、B_2 羣在基本粒子强相互作用理論中的应用

如 Behrends 等[1]所指出的，在 B_2 羣中，除了"基本"的核子 N 和 Ξ 超子填充四維表示外，可以将 Λ 超子放在一維表示，将 Σ 超子放在五維表示，不过这时五維表示中还要求有未知的 $Y=\pm 2$, $T=0$ 的 $X^\pm$ 粒子；此外，可以把 K 介子填在四維表示，把 π 介子和額外的 $Y=\pm 2$, $T=0$ 的 $D^\pm$ 介子填在五維表示(順便提醒一下，$X^\pm$ 和 $D^\pm$ 粒子正是在早年的 Gell-Mann-西島基本粒子分类方案中可能存在的未知粒子)。在这种安排的基础上，我們应用前面两节的結果，对強相互作用的对称性作以下几点討論.

1. 质量关系

如果認为四維表示中的 N 和 Ξ 粒子具有原始的質量差，而它們的相互作用依然满足 B_2 羣不变性的話，則从 4×4 出发，使用認为两个表示耦合时形成束縛态的方法[6]，便可求出所有其他不可約表示中不同 $|YI\rangle$ 多重态的質量 $m(YI)$ 之間的关系. 这是考虑質量差所引起的对称性破坏的最低級近似. 应用表示耦合的系数表 2 到表 5，我們求出了七个低維表示的質量关系. 由于在不考虑电磁相互作用的情况下，多重态內部不同电荷分量的質量仍然是相同的，所以只用到这些表中所列的同位旋标量因子就够了.

結果发現，在 1, 4, 5, 10, 14, 20 等六个不可約表示中，粒子的質量都满足下面的簡单公式：

$$m=\alpha+\beta Y. \tag{3.1}$$

对其中的每个表示，α 和 β 都是不依賴于 Y 和 I 的常数. 即是説，这六个表示的質量值都是对 Y"等距离"分布的，并且超荷值相同的多重态（如果有不止一个的話）的質量是相同的.

在 16 維表示中，情况要复杂一些，我們得不出这样簡单的公式，而是得到下面三个質量关系：

$$\left.\begin{aligned}&m(3\ 1/2)+m(-3\ 1/2)=m(1\ 3/2)+m(-1\ 3/2)=m(1\ 1/2)+m(-1\ 1/2),\\&m(1\ 3/2)+5m(1\ 1/2)=3[m(3\ 1/2)+m(-1\ 3/2)].\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

我們知道，既然 B_2 羣方案中将 π 介子和 K 介子分别放在两个表示，就不要求它們的質量相同，这是比較令人放心的. 但是，应用(3.1)式于 π 介子所在的五維表示，并且考虑到 D^+ 是 D^- 的反粒子，則要求 $m(\pi)=m(D)$. 然而 $|Y|=2$ 的 D 介子尙未确切地观察到过. 同时，(3.1) 式还要求未知的 $X^\pm$ 粒子当中有一个的質量不大于 $m(\Sigma)$. 为了解决这些困难，看来应該求助于質量差的高級效应，使得未知粒子的質量可以变得很大而难于发現.

2. 介子共振

在 Roos 的基本粒子与共振态的表[7]（本文采用他的共振态标記）中，列出了現今观察到的，已确定同位旋量子数的 $Y=0$ 的介子共振态总共有（括号內为質量的 MeV 数）：$I=2$ 的 $\psi_1(330)$, $\psi_2(440)$, $\psi_3(580)$, $\psi_4(760)$ 和 $\psi_5(990)$；$I=1$ 的 $\zeta(550)$, $\rho(750)$ 和 $\chi_1(1050)$；$I=0$ 的 $ABC(317)$, $\varphi_1(395)$, $\varphi_2(520)$, $\eta(549)$, $\omega(781)$, $\varphi_3(885)$, $\kappa_1(1020)$, $\kappa_2(1040)$ 和 $f(1253)$ 等. 值得注意的是：一共发現了五个 $I=2$ 的二 π 介子共振 ψ_1—ψ_5，而 $I=1$ 的共振只发現了三个，并且其中 ζ 和 ρ 是二 π 介子共振. 由于全同性原理，2π

体系中 $I=1$ 的态只能有奇数自旋，$I=2$ 的态只能有偶数自旋．也就是說，ζ 或 ρ 是不可能和任何一个 ψ 共处在同一表示中的．

这种情况很难用 SU_3 羣的"八重态模型"[8]解释．按照現在流行的八重态模型，介子-介子共振的表示乘积是

$$8\times 8=1+8+8+10+10^*+27,$$

其中只有 27 維表示含 $I=2$ 的分量，而且它同时含有 $I=1$ 和 0 的分量．这就是說，为了伴随 ψ_1—ψ_5，必須同时存在五个偶数自旋的 $I=1$ 的 π 介子共振．但目前所发現的 $I=1$ 的 π 介子共振当中，只有 $\chi_1(1050)$ 是这种态的唯一的一个候选者．进一步考察可知，即使我們运用 SU_3 羣的高維数表示或者改用 C_2 羣或 G_2 羣的方案[1]，这个困难也照样存在，因为在这些羣的不可約表示中，$I=0$ 和 1 的分量总是和 $I=2$ 的分量同时出現的．

B_2 羣的方案恰巧能解释为什么 $I=2$ 的介子共振可以比 $I=1$ 的共振多．在我們的方案中，π 介子-π 介子共振的表示乘积是(2.15)式：

$$5\times 5=1+10+14.$$

由表 1 可見，$Y=0$ 时一維表示只含 $I=0$ 的态，十維表示中含 $I=1$ 和 0 的态，14 維表示中含 $I=2$ 和 0 的态而沒有 $I=1$ 的态．于是我們很容易将那些 ψ 納入 14 維表示，而将 $I=1$ 的态納入十維表示，同时我們已經拥有足够数目的 $I=0$ 的共振去陪伴它們．我們还看到：η 和 ζ，ω 和 ρ，ABC 和 ψ_1，φ_1 和 ψ_2，φ_2 和 ψ_3 这几对共振态質量相差不远，基本上符合質量关系(3.1)，因此它們有希望分别处在两个十維表示和三个 14 維表示中．至于是否眞的可以做这种安排，除了 ω 和 ρ 已肯定之外，尙待将来的实驗工作去确定它們的自旋和宇称量子数．

3. 重子共振

由于 B_2 羣的不可約表示将超荷差值为偶数的态联系在一起，按目前的情况[7]，还沒有哪一个重子共振的表示可以被填滿．实际上，唯一肯定能塡充两个已知重子共振态的表示是自旋-宇称量子数为 $3/2^+$ 的 16 維表示，它可容納 $Y=1$，$I=3/2$ 的 $N^*_{33}(1237)$ 和 $Y=-1$，$I=1/2$ 的 $\Xi^*_1(1533)$．它是由 N-Ξ 的四維表示和 π-D 的五維表示耦合得来的．由表 3 可知，16 維表示中的 N^*_{33} 只能衰变到 $N\pi$ 体系，而 Ξ^*_1 衰变到 $\Xi\pi$ 道和 ND 道的分支比是 2/3．事实上现在只观察到 Ξ^*_1 的 $\Xi\pi$ 型衰变，如果解释为 D 介子的質量很高，使得 ND 道不能实現，那么要求 $m(D)>600$ MeV 左右．前几年王淦昌[9]和 Yamanouchi[10] 根据一些可能的事例，推测 $m(D)\approx 740$ MeV，这和上面的結論并不矛盾．

利用文献[1]中的(VI. 23)式，使用表 3 的系数，我們还求出了考虑了运动学因子的 Ξ^*_1 和 N^*_{33} 衰变率的比值 r 为

$$r=\frac{\Gamma(\Xi_1^{*-}\to(\Xi\pi)^-)}{\Gamma(N_{33}^{*-}\to n\pi^-)}=\frac{2}{5}\left(\frac{q_\Xi}{q_n}\right)^3\frac{E_\Xi E_{N^*}}{E_n E_{\Xi^*}}=0.12, \tag{3.3}$$

它比观察値 $r\leqslant 0.08$[7]略大一些．而在通常的八重态模型中，(3.3)式里的因子 2/5 应該換为 1/2，因此有 $r=0.15$，距离观察値更远．

另外一个重子共振的例子是 $Y=0$，$I=0$ 的 $Y_0^{**}(1680)$[11]，实驗发現它衰变到 $\Lambda\eta$ 道，但还未看到有 $\Sigma\pi$ 道的衰变，虽然后者的 Q 值比前者大得多．当然，在 B_2 羣的方案

中，我們很容易用两种耦合常数的差异来解释这一現象．可是，进一步由表 5 可見，Σ 和 π 耦合成的 $Y=0$，$I=0$ 的态只能属于一維表示或 14 維表示；而按前面所述，假定 η 和 ζ 一起属于一个十維表示，則 $\Lambda\eta$ 体系也只能属于十維表示．于是，如果我們让 Y_0^{**} 处在十維表示的話，則它只能衰变到 $\Lambda\eta$ 道，$\Sigma\pi$ 道就成为絕对禁戒的了．

4. 散射截面关系

由于在 B_2 羣方案中，八个重子分处在三个不可約表示，七个介子分处在两个不可約表示，所以它所能預言的衰变分支比和散射截面关系都比較少．这說明 B_2 羣方案一般比别的高級对称性的方案要求松一些．

实际上，B_2 羣只能預言这样的一些基本粒子弹性散射截面 σ_e 的等式，它不外是說将 N 和 Ξ 对换，同时将 K 和 $\tilde{K}$ 对換时，所得的弹性散射截面和原来的一样(当然，用表 2 和表 3 具体計算也会得到同样的結論)．例如

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma_e(NN)=\sigma_e(\Xi\Xi), & \\ \sigma_e(N\tilde{\Xi})=\sigma_e(\Xi\tilde{N}), & \sigma_e(N\tilde{N})=\sigma_e(\Xi\tilde{\Xi}), \\ \sigma_e(\Sigma N)=\sigma_e(\Sigma\Xi), & \sigma_e(\Lambda N)=\sigma_e(\Lambda\Xi), \\ \sigma_e(N\pi)=\sigma_e(\Xi\pi), & \sigma_e(NK)=\sigma_e(\Xi\tilde{K})\end{array}\right\} \tag{3.4}$$

等等．为了得到不同电荷分量之間的关系，只要再用 Clebsch-Gordan 系数分解卽可．显然，这些关系目前都还无法用实験检験．

5. R 反演不变性

Behrends 等[1]指出，由于 B_2 羣的表示乘积 5×5 当中不包含表示 5，如果将 $Y=0$，$I=1$ 的 $Y_1^*(1385)$ 填在五維表示的話，則可以解释 Y_1^* 只衰变到 $\Lambda\pi$ 道而不衰变到 $\Sigma\pi$ 道的現象．实験上观察到 $\Sigma\pi$ 道的分支比只占 1%左右[7]．但通常的八重态模型把 Y_1^* 放在 SU_3 羣的十維表示中，要求这分支比約等于 16%[1]．另外，Sakurai[12] 也曾指出，Y_1^* 不能衰变到 $\Sigma\pi$ 体系乃是“超荷反演” $R(Y\to-Y,\ M\to-M)$下的不变性的直接結果．仔細考察可知，原来 B_2 羣方案自然要求 R 反演不变性，这是将 N 和 Ξ 看作“基本”粒子的必然結果，于是 Behrends 等的結論也就不足为奇了．

在 R 反演下，四个“基本”粒子中 p 和 Ξ^- 对换，同时 n 和 Ξ^0 对換．在(1.1)式的 Ψ 表象中，变换算符具有形式

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-T_1+T_{-1}-V_1+V_{-1}). \tag{3.5}$$

由此可見，R 算符是 B_2 羣的无穷小算符的迭加，所以 R 反演也是 B_2 羣方案中的一个不变变換．而在通常的八重态模型中，R 反演不变性只能是外加的条件，因为 R 算符并不能由 SU_3 羣的无穷小算符組合得出．

另外，不难看出，(3.4)式的散射截面关系也不外是 R 反演不变和电荷无关的結果．R 反演不变性还可以解释 ω 介子共振寬度小等現象[9]．这些結果都包含在 B_2 羣的对称性之中．

作者感謝胡宁教授的不倦教导以及韓其智老师和孙洪洲老师的热心指教．

参　考　文　献

[1] Behrends, R. E., Dreitlein, J., Fronsdal, C., and Lee, B. W., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 1.
[2] Edmonds, A. R., *Proc. Royal Soc.*, London, **A268** (1962), 567.
[3] 孙洪洲、韩其智，物理学报，**21** (1965)，56.
[4] Salam, A., Theoretical Physics (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963), p. 173.
[5] 参看 Edmonds, A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics (Princeton, 1960), p. 111.
[6] 参看 Sakurai, J. J., 文献 [4], p. 227, 其中给出了求 SU_3 羣八维表示质量关系的例子.
[7] Roos, M., *Rev. Mod. Phys.*, **35** (1963), 314, 文末列出了详细的原始文献目录.
[8] Gell-Mann, M., *Phys. Rev.*, **125** (1962), 1067; Ne'eman, Y., *Nucl. Phys.*, **26** (1961), 222.
[9] Wang Gan-chang (王淦昌), Ninth International Annual Coference on High Energy Physics (Moscow, 1960), I, p. 456.
[10] Yamanouchi, T., *Phys. Rev. Lett.*, **3** (1959), 480.
[11] Иоффе, Б. Л., *ЖЭТФ*, **43** (1962), 341.
[12] Sakurai, J. J., *Phys. Rev. Lett.*, **7** (1961), 426.
[13] 杨国桢、孙洪洲、关 洪、韩其智，北京大学学报(自然科学)，**10** (1964)，253.

THE B_2 GROUP AND THE STRONG INTERACTION OF ELEMENTARY PARTICLES

Guan Hong

(*Department of Physics, Peking University*)

Abstract

The reduction coefficients appearing in the decomposition of direct products of irreducible representations 4×4, 4×5, 4×10, 5×5 of the group B_2 are calculated. Some examples of their application to the strong interaction symmetry of elementary particles are given: the relations between various scattering cross sections and the mass relations for low-dimensional irreducible representations are derived, and the assignment and decay modes of resonant states and the R-inverse invariance are discussed.