

强磁场中 n 型锗的横向磁阻*

巢 心 芙
(中国科学院)

提 要

本文就声子散射与电离杂质散射的两种散射机构探讨了半导体 n 型锗的横向磁阻。在简并强磁场情况下, 得出声子散射机构在 $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 三个方向上锗的横向磁阻的表示式。磁阻的平均值的相对大小 $\frac{\rho_{\perp}\langle 111 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_{\perp}\langle 110 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_{\perp}\langle 100 \rangle}{\rho_0} = 1:1.7:1.1$, 并且磁阻具有振荡形式。在非简并量子极限情况下分别对声子散射和杂质散射得出锗的横向磁阻表示式。对声子散射的情况, $\frac{\rho_{\perp}}{\rho_0}$ 和 $\frac{H}{T}$ 成正比, 并与磁场方向无关; 而对杂质散射的情况, $\frac{\rho_{\perp}}{\rho_0}$ 和 $\frac{H}{T}$ 成反比, 但是在某一特殊情况下也和磁场方向无关。

对非简并量子极限, 就声子散射机构所得到的磁阻, 其结果和 Diesel, Love 的实验定性符合。

一、引 言

关于金属和半导体的电磁现象, 很多作者在这方面从事了不少的工作。通过磁场对半导体输运性质影响的研究, 可以提供这些材料的散射机构及电子结构的一些知识, 弱磁场下横向和纵向磁阻的测量可以验证这些材料的能带结构。

Abeles, Meiboom^[1] 和 Shibuya^[2] 利用输运过程的经典玻尔兹曼方程, 较详细地讨论了弱磁场下锗的电磁效应。所谓弱磁场, 意指 $\omega\tau \ll 1$, 对各向同性材料, ω 就是通常的回旋频率¹⁾, τ 是载流子两次连续碰撞间的时间-弛豫时间。在弱磁场下, 一般的玻尔兹曼方程是可以应用的, 分布函数 f 满足一个积分微分方程。由于散射, 电子由一个布洛赫态向另一个布洛赫态的跃迁几率是与磁场无关的, 即散射不受磁场的影响。另外, 电子在外磁场中运动的量子性质也被忽略了。Abeles 和 Meiboom 将他們得到的结果与 Pearson 和 Suhl^[3] 的实验进行了比较: 对 n 型锗, 理论和实验符合得很好, 对 p 型锗, 结果不符合。

在磁场很强的情况下 ($\omega\tau \gg 1$ 和 $\hbar\omega \gg kT$, k 是玻尔兹曼常数), 这时电子运动的量子性质起着重要的作用。 $\omega\tau \gg 1$ 是指朗道态可以作为电子散射的微扰计算中的基函数; $\hbar\omega \gg kT$ 是说大部分电子都处于基态, 因而在统计处理上, 磁场量子化是很重要的。在强磁场下, 由于散射机构和弛豫时间强烈地依赖于磁场, 因此一般的玻尔兹曼方程不能使用, 此时必须使用由密度矩阵算符方法得到的量子性的玻尔兹曼方程来处理输运过程。

* 1964 年 8 月 21 日收到。

1) 就 ω 的表达式来看, $\omega = \frac{eH}{mc}$, 在有些场合下(譬如回旋共振实验中), 称 ω 为回旋共振频率。在磁阻的研究中, 文献上一般称 ω 为回旋频率 (cyclotron frequency)。

式中 θ 是椭圆主軸与外磁場方向間的交角(图1), 就可以解方程(1)。但 $\mathbf{A}$ 的这种取法并不能很方便地解出方程(1), 为了便于解方程(1), 将坐标系繞 y 軸轉动 θ 角(使磁場沿新坐标系的 z 軸):

$$\left. \begin{aligned} P_z &= P'_z \cos \theta - P'_x \sin \theta, \\ P_x &= P'_z \sin \theta + P'_x \cos \theta, \\ P'_y &= P_y. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式, 去掉“,”号, 再取 $\mathbf{A} = (0, Hx, 0)$, 得到

$$\left\{ \left(\frac{\cos^2 \theta}{2m_i^*} + \frac{\sin^2 \theta}{2m_i^*} \right) P_x^2 + \frac{1}{2m_i^*} \left(P_y + \frac{e}{c} Hx \right)^2 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{2m_i^*} + \frac{\cos^2 \theta}{2m_i^*} \right) P_z^2 + \left(\frac{1}{m_i^*} - \frac{1}{m_i^*} \right) \sin \theta \cos \theta P_x P_z \right\} \Psi = e \Psi. \quad (3)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu} &= \frac{\cos^2 \theta}{m_i^*} + \frac{\sin^2 \theta}{m_i^*}, \quad \frac{1}{\zeta} = \left(\frac{1}{m_i^*} - \frac{1}{m_i^*} \right) \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{1}{m^*} &= \left(\frac{\cos^2 \theta}{m_i^{*2}} + \frac{\sin^2 \theta}{m_i^* m_i^*} \right)^{1/2}, \quad m^{**} = m_i^* \sin^2 \theta + m_i^* \cos^2 \theta, \\ \omega^* &= \frac{eH}{m^* c}, \quad \lambda^2 = \frac{c \hbar}{eH} = \frac{\hbar}{m^* \omega^*}, \quad \xi = \mu / \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

c 为光速, 則方程(3)的解为

$$\Psi(n k_y k_z) = \frac{1}{\sqrt{L_y L_z}} \phi_n \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/4} (x + \lambda^2 k_y) \right] \cdot \exp[-i \xi k_z x + i k_y y + i k_z z] \quad (5)$$

和

$$\epsilon_{nk} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega^* + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^{**}}, \quad (6)$$

式中 k_y, k_z 是波数; L_y, L_z 是归一长度; ϕ_n 是归一的振子波函数, 它滿足方程

$$\left\{ \frac{P_x^2}{2m_i^*} + \frac{m_i^* \omega^{*2}}{2} (x + \lambda^2 k_y)^2 \right\} \phi_n \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/4} (x + \lambda^2 k_y) \right] = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega^* \phi_n \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/4} (x + \lambda^2 k_y) \right] \quad (7)$$

和归一条件

$$\int \left| \phi_n \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/4} (x + \lambda^2 k_y) \right] \right|^2 dx = 1. \quad (8)$$

这里称 m^* 和 m^{**} 为横向和纵向簡化有效質量; ω^* 为有效迴旋頻率。对于不同的磁場方向可以用参量 $\gamma \equiv \frac{m_i^*}{m_i^*}$, $\alpha \equiv \frac{m_i^*}{m}$, m 和 $\omega_0 \equiv \frac{eH}{mc}$ (m 是自由电子質量) 表示出 m^* , m^{**} 和 ω^* 这三个量来, 沿三个特殊晶軸方向, 这三个量分别为

$$\left. \begin{aligned} &\text{沿 } \langle 111 \rangle \\ m^* &= \gamma \alpha m, & m^{**} &= \alpha m, & \omega^* &= \frac{1}{\gamma \alpha} \omega_0 \quad (\text{第 1 組椭圆}); \\ m^* &= \sqrt{\frac{9}{1+8\gamma}} \gamma \alpha m, & m^{**} &= \frac{1+8\gamma}{9} \alpha m, & \omega^* &= \sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} \frac{1}{\gamma \alpha} \omega_0 \quad (\text{第 2 組椭圆}); \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{沿}\langle 110 \rangle \\
 &m^* = \sqrt{\gamma} \alpha m, \quad m^{**} = \gamma \alpha m, \quad \omega^* = \frac{1}{\sqrt{\gamma \alpha}} \omega_0 (\text{第 1 組椭球}); \\
 &m^* = \sqrt{\frac{3}{2+\gamma}} \gamma \alpha m, \quad m^{**} = \frac{2+\gamma}{3} \alpha m, \quad \omega^* = \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \frac{1}{\gamma \alpha} \omega_0 (\text{第 2 組椭球}); \\
 &\text{沿}\langle 100 \rangle \\
 &m^* = \sqrt{\frac{3}{1+2\gamma}} \gamma \alpha m, \quad m^{**} = \frac{1+2\gamma}{3} \alpha m, \quad \omega^* = \sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}} \frac{1}{\gamma \alpha} \omega_0 (\text{所有椭球}).
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

观察态函数(5)的性质, 可以求得具有已知振子数 n 和波数 k_x 在 $k_x \rightarrow k_x + dk_x$ 間隔內的軌道态密度为

$$N(n, k_x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^* \omega^*}{\hbar}, \quad (10)$$

利用式(10)和(6)可以求得总能量 ϵ 在 $\epsilon \rightarrow \epsilon + d\epsilon$ 間隔內的态密度

$$N(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{m^* \sqrt{2m^{**}}}{\hbar^3} \hbar \omega^* \sum_n \left[\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega^* \right]^{-1/2}. \quad (11)$$

以(5)式作为微扰計算的基函数, 在这种表象中, 很容易求得速度算符的分量

$$\left. \begin{aligned}
 \langle n\mathbf{k} | v_x | n\mathbf{k} \rangle &= \frac{\hbar k_x}{m^{**}}, \\
 \langle n'\mathbf{k}' | v_x | n\mathbf{k} \rangle &= \frac{\hbar k_x}{m^{**}} \delta_{nn'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \\
 \langle n\mathbf{k} | v_x | n\mathbf{k} \rangle &= \langle n\mathbf{k} | v_y | n\mathbf{k} \rangle = 0, \\
 \langle n'\mathbf{k}' | v_x + i v_y | n\mathbf{k} \rangle &= 2i \left(\frac{\hbar \omega^*}{2m^*} \right)^{1/2} \left(\frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/4} \sqrt{n} \delta_{nn'+1} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由(12)式得知, 在 Ψ 表象中, v_x 只有对角矩陣元, 而 v_x 和 v_y (对于 n) 只有非对角矩陣元, 但 v_x , v_y 和 v_x 对于 $\mathbf{k}$ 它們都是对角的。在橫向磁阻的計算中, 我們只需要 v_x 和 v_y 的非对角矩陣元。再利用(5)式可以求得以后所需要的一些积分:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} \equiv \langle n'\mathbf{k}' | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | n\mathbf{k} \rangle &= J_{n'n}(q_x, q_y, k'_y, k_y) \times \\
 &\times \delta(k_y + q_y - k'_y) \delta(k_x + q_x - k'_x),
 \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$J_{n'n}(q_x, q_y, k'_y, k_y) \equiv \int \phi_n^* \phi_n \cdot \exp[i(q_x + \xi q_y)x] dx, \quad (14)$$

并且

$$\begin{aligned}
 \int J_{n'n}^*(\pm q_x, q_y, \pm q_y + k_y, k_y) J_{n'm'}(\pm q_x, q_y, \pm q_y + k_y, k_y) dq_x dq_y &= \\
 &= \frac{2\pi m^* \omega^*}{\hbar} \delta_{n'm'} \delta_{nm}.
 \end{aligned} \quad (15)$$

三、声子和电离杂质散射下的弛豫時間

在求解經典玻尔茲曼方程时, 引入了弛豫時間 τ 来作为处理輸运問題的一种方法。

在求解量子玻尔兹曼方程时, 仍与经典情况相类比引入了弛豫时间 τ , 解出 τ 以后, 电导率就可以很方便地求解。对于锗的四椭球等能面情况, 弛豫时间与磁场方向有关, 而且对于同一磁场方向, 四个椭球有两组弛豫时间。由以后的计算可知, 弛豫时间对磁场方向的依赖是来自于态密度 $N(\epsilon)$ 及 $J_{nn'}^* J_{mm'}$ 对 $\mathbf{q}$ 的积分, 与磁场方向有关。由具体计算可知, 对多椭球形结构的等能面情况(锗), 引入弛豫时间 τ (依赖于磁场方向), 求解电导率是合理的: 对某一个磁场方向分别求出四个椭球的弛豫时间, 再利用这些弛豫时间分别求出四个椭球对电导率的贡献, 然后相加, 其结果等于利用某一磁场方向时四个椭球的弛豫时间的通式求得电导率表达式, 然后再对四个椭球求和。

考虑到强磁场下载流子运动的量子化效应后, 电流密度由下式给出:

$$J = \left(\frac{e}{Q} \right) \text{Sp}(\nu f), \quad (16)$$

式中 Q 是样品体积; e 是电子电荷; ν 是电子速度算符; f 是定态密度矩阵算符。因此 f 的求解成为首要的问题。在单电子近似下, 定态密度矩阵算符满足运动方程

$$i\hbar \frac{df}{dt} = [\mathcal{H}_T, f], \quad (17)$$

$$\mathcal{H}_T = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_P, \quad (18)$$

这里

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \left(\frac{\cos^2 \theta}{2m_i^*} + \frac{\sin^2 \theta}{2m_l^*} \right) P_x^2 + \frac{1}{2m_i^*} \left(P_y + \frac{e}{c} HX \right)^2 + \left(\frac{\sin^2 \theta}{2m_i^*} + \frac{\cos^2 \theta}{2m_l^*} \right) P_z^2 + \\ & + \left(\frac{1}{m_i^*} - \frac{1}{m_l^*} \right) \sin \theta \cos \theta P_x P_z, \\ \mathcal{H}_P = & \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_s, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mathcal{H}_e = -e\mathbf{E} \cdot \mathbf{r} \quad (20)$$

就半导体材料(见下面的说明), 对于电子-声子相互作用, 其哈密顿量 $\mathcal{H}_s$ 为^[6]

$$\mathcal{H}_s = \left(\frac{c^2 kT}{s^2 \rho Q} \right) \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}, \quad (21)$$

式中 c ——耦合常数; k ——玻尔兹曼常数; s ——声速; ρ ——样品密度。对于无规则分布的电离杂质散射, 则

$$\mathcal{H}_s = \sum_j V(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) = \left(\frac{1}{Q} \right) \sum_{\mathbf{q}, j} V(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}, \quad (22)$$

取屏蔽型的库仑杂质散射势:

$$V(r) = \pm \left(\frac{e^2}{\epsilon} \right) \frac{e^{-r/r_s}}{r}, \quad (23)$$

式中 ϵ 为介电常数; r_s 为屏蔽半径, 利用立方箱子边界条件可得

$$V(q) = \int V(r) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \pm \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{r_s} \right)^2 + q^2} \right], \quad (24)$$

利用式(24), 式(22)成为

$$\mathcal{H}_s = \pm \left(\frac{1}{Q} \right) \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon} \right) \sum_{\mathbf{q}, j} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)}}{\left[\left(\frac{1}{r_s} \right)^2 + q^2 \right]}. \quad (25)$$

一般情况下, 磁場效应只影响屏蔽半径. 按简单的屏蔽理论, 在简并情况下,

$$r_s(H)^2 = r_s(0)^2 \frac{2(\epsilon_F(H)\epsilon_F(0))^{1/2}}{\hbar\omega^*},$$

式中 $\epsilon_F(H)$ 和 $\epsilon_F(0)$ 是有磁場和无磁場时的费米能级. 在非简并情况下,

$$r_s(H)^2 = r_s(0)^2 \frac{n(0)}{n(H)},$$

式中 $n(H)$ 和 $n(0)$ 是有磁場和无磁場时的电子数目.

为了求解方程(17)¹⁾, 就半导体材料的特点作一些简化假设: (i) 声子能量 $\hbar\omega_q \ll \epsilon_{nk}$, 因此散射可视为弹性的; 并且声子波矢量 q_x, q_y 是任意的, 只有 q_z 由于守恒定律受到限制. (ii) 声子处于热平衡状态, 声子数 $N_q \cong N_q + 1 \cong \frac{kT}{\hbar\omega_q}$. (iii) 对于声学振动模型, 使用色散关系 $\omega_q = s|\mathbf{q}|$. (21)式也只在这些条件下才可以写出这种形式.

若视 $\mathcal{H}_e$ 和 $\mathcal{H}_s$ 为 $\mathcal{H}_0$ 的微扰项, 那么由二级微扰理论, 散射项对 f 的影响为^[8]

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \langle n' \mathbf{k} | f | n \mathbf{k} \rangle \right]_{\text{散射}} = \sum_{n'' \mathbf{q}} \left\{ [\langle n'' + n' - n | f(\mathbf{k} + \mathbf{q}) | n'' \rangle M_{n''n}^{*}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k})] - \langle n' | f(\mathbf{k}) | n \rangle \left[\frac{1}{2} M_{n''n'''}^{*}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) + \frac{1}{2} M_{n''n'''}^{*}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \right] \right\}, \quad (26)$$

式中

$$f(\mathbf{k}) \equiv \langle \mathbf{k} | f | \mathbf{k} \rangle.$$

对于声子散射, 式中

$$M_{n''n}^{*}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) J_{n'', n''+n'-n}^{*} J_{nn''} \delta(\epsilon_{n''\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{n\mathbf{k}}); \quad (27)$$

对于杂质散射, 式中

$$M_{n''n}^{*}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) = \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{n_I}{\Omega} \right) V^2(\mathbf{q}) J_{n'', n''+n'-n}^{*} J_{nn''} \delta(\epsilon_{n''\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \epsilon_{n\mathbf{k}}), \quad (28)$$

式中 $J_{n'n}$ 由式(14)给出, n_I 是离解的杂质原子数目.

由式(17), (18)和(19)可以推得密度矩阵算符满足方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle n' \mathbf{k} | f | n \mathbf{k} \rangle &= \left(\frac{i}{\hbar} \right) \langle n' \mathbf{k} | [f, \mathcal{H}_0] | n \mathbf{k} \rangle + \left(\frac{i}{\hbar} \right) \langle n' \mathbf{k} | [f, \mathcal{H}_e] | n \mathbf{k} \rangle + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial t} \langle n' | f(\mathbf{k}) | n \rangle \right]_{\text{散射}}. \end{aligned} \quad (29)$$

当外电场等于零时,

$$\langle n' \mathbf{k} | f_0 | n \mathbf{k} \rangle = \langle n' | f_0(\mathbf{k}) | n \rangle = f_0(\epsilon_{n\mathbf{k}}) \delta_{n'n};$$

当外电场不等于零时, f 偏离 f_0 为 f_1 , 则

$$f = f_0 + f_1.$$

在定态下, f_1 不随时间而改变, 即

$$\frac{d}{dt} \langle n' \mathbf{k} | f_1 | n \mathbf{k} \rangle = 0,$$

1) 这一部分的计算, 主要是依据工作[8], 并作了推广.

此时由式(29)得到 f_1 满足方程

$$\begin{aligned} i\omega^*(n' - n)\langle n' | f_1(\mathbf{k}) | n \rangle + \left[\frac{\partial}{\partial t} \langle n' | \mathbf{k} | f_1 | n \mathbf{k} \rangle \right]_{\text{散射}} = \\ = \left(\frac{i}{\hbar} \right) \langle n' | \mathbf{k} | [\mathcal{H}_e, f_0] | n \mathbf{k} \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

利用振子坐标平均值公式,在电场横向于磁场时,可以求得

$$\begin{aligned} \langle n' | \mathbf{k} | [f_0, \mathcal{H}_e] | n \mathbf{k} \rangle = (-e) \left(\frac{\hbar m_i^*}{2m^* \omega^*} \right)^{1/2} [f_0(\epsilon_{n'\mathbf{k}}) - f_0(\epsilon_{n\mathbf{k}})] \times \\ \times (E_x + iE_y) \sqrt{n} \delta_{n'n-1} + \text{共厄項}. \end{aligned} \quad (31)$$

把式(31),(26)代入式(30),就可以得到定态玻尔兹曼方程

$$\begin{aligned} i\omega^*(n - n')\langle n' | f_1(\mathbf{k}) | n \rangle + \sum_{n''\mathbf{q}} \left\{ \langle n'' + n' - n | f_1(\mathbf{k} + \mathbf{q}) | n'' \rangle M_{n'n}^{n''}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) - \right. \\ \left. - \langle n' | f_1(\mathbf{k}) | n \rangle \left[\frac{1}{2} M_{n'n''}^n(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) + \frac{1}{2} M_{n'n''}^{n''}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \right] \right\} = \\ = ie \left(\frac{m_i^*}{2m^* \omega^* \hbar} \right)^{1/2} [f_0(\epsilon_{n'\mathbf{k}}) - f_0(\epsilon_{n\mathbf{k}})] [(E_x + iE_y) \sqrt{n} \delta_{n'n-1} + \\ + (E_x - iE_y) \sqrt{n+1} \delta_{n'n+1}]. \end{aligned} \quad (32)$$

注意到电子与电场相互作用只能在量子数为 n 与 $n \pm 1$ 的振子态間跃迁,并且注意到 $\epsilon_{n\mathbf{k}}$ 仅通过 k_x 而依赖于 $\mathbf{k}$,则(32)式的解为

$$\langle n' | f_1(\mathbf{k}) | n \rangle = \langle n-1 | f_1(k_x) | n \rangle \delta_{n'n-1} + \langle n+1 | f_1(k_x) | n \rangle \delta_{n'n+1}. \quad (33)$$

利用經典玻尔兹曼方程

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} \right]_{\text{散射}} = - \frac{f - f_0}{\tau} = - \frac{f_1}{\tau}$$

的关系,把式(33)代入式(26)可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\langle n' | f_1(k_x) | n \rangle}{\tau} \delta_{n'n \pm 1} = \sum_{n''\mathbf{q}} \left\{ [\langle n'' + n' - n | f(\mathbf{k} + \mathbf{q}) | n'' \rangle M_{n'n}^{n''}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \delta_{n'n \pm 1}] - \right. \\ \left. - \langle n' | f(\mathbf{k}) | n \rangle \left[\frac{1}{2} M_{n'n''}^n(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) + \frac{1}{2} M_{n'n''}^{n''}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \right] \delta_{n'n \pm 1} \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

注意到

$$\langle n' | f(\mathbf{k}) | n \rangle \delta_{n'n \pm 1} = \langle n' | f_0(\mathbf{k}) + f_1(\mathbf{k}) | n \rangle \delta_{n'n \pm 1} = \langle n' | f_1(\mathbf{k}) | n \rangle \delta_{n'n \pm 1},$$

以及利用关系式(27)和(15'),对于声子散射,式(34)右边第一項

$$\begin{aligned} \sum_{n''\mathbf{q}} \{ \langle n'' + n' - n | f(\mathbf{k} + \mathbf{q}) | n'' \rangle M_{n'n}^{n''}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \delta_{n'n \pm 1} \} = \\ = \sum_{n''} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle n'' + n' - n | f(\mathbf{k} + \mathbf{q}) | n'' \rangle M_{n'n}^{n''}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \delta_{n'n \pm 1} d\mathbf{q} \right\} = 0; \end{aligned}$$

而式(34)右边第二項給出弛豫時間 τ

$$\tau^{-1}(\epsilon) = \sum_{n''\mathbf{q}} \left[\frac{1}{2} M_{n'n''}^n(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) + \frac{1}{2} M_{n'n''}^{n''}(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) \right]. \quad (35)$$

注意,式(35)仅对于声子散射才成立. 对于电离杂质的散射,由于积分上的困难,弛豫時間的普遍关系式是很难計算出来的. 在量子极限 ($n = 0$) 下,由式(34)对于声子和杂质

散射弛豫时间为

$$\tau^{-1}(\epsilon_z) = \sum_{n''q} \left[\frac{1}{2} M_{n''n''}^0(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) + \frac{1}{2} M_{n''n''}^1(\mathbf{k}, \mathbf{k} + \mathbf{q}) - M_{10}^{n''}(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}) \right]. \quad (36)$$

有了式(35)和(36)后,下面具体地计算弛豫时间.

1. 声子散射

对于声子散射,利用式(35)和(27)算得

$$\tau^{-1}(\epsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) \sum_{n''q} \{ |J_{n''n}|^2 \delta(\epsilon_{n''k'} - \epsilon_{nk}) + |J_{n''n+1}|^2 \delta(\epsilon_{n''k'} - \epsilon_{nk}) \},$$

将 $\sum_q$ 化为 $\frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q}$, 再利用式(10), (11)和(15), 得到

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\epsilon) &= \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) \frac{m^* \sqrt{m^{**}}}{\sqrt{2\pi\hbar^4}} \hbar \omega^* \left\{ \frac{1}{2} \left(\epsilon + \frac{1}{2} \hbar \omega^* \right)^{-1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_n \left[\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega^* \right]^{-1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

当磁场趋于零时,

$$m^* \rightarrow m_i^*, \quad m^{**} \rightarrow m_l^*,$$

并且

$$\hbar \omega^* \sum_n \left[\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega^* \right]^{-1/2} = \int_0^\epsilon (\epsilon - x)^{-1/2} dx = 2 \sqrt{\epsilon},$$

$\hbar \omega^* \rightarrow 0$

由式(37)得到

$$\tau^{-1}(\epsilon) \rightarrow \frac{\sqrt{2} \gamma \alpha^{3/2}}{\pi \hbar^4} \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) m^{3/2} \epsilon^{1/2}. \quad (38)$$

下面可以证明, 和球形等能面情况不同, 对于椭球形等能面而言, 式(38)只相当于零场弛豫时间的横向部分. 在零场情况下, 式(5)和式(6)分别成为(自由电子近似)

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \\ \epsilon &= \frac{\hbar^2}{2m_i^*} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{\hbar^2}{2m_l^*} k_z^2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

完全类似于式(37)的计算, 得到零场时声子散射的弛豫时间

$$\tau_0^{-1}(\epsilon) = \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{q}} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}|} \delta(\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}'), \quad (40)$$

经过简单的运算, 就得到

$$\begin{aligned} \tau_0^{-1}(\epsilon) &= \frac{\sqrt{2} \gamma \alpha^{3/2}}{4\pi^2} \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) m^{3/2} \epsilon^{1/2} \left\{ \frac{1 - \cos \theta}{\gamma} \sin \theta d\theta d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int (1 - \sin \theta \cos \phi) \sin \theta d\theta d\varphi \right\} \equiv \tau_{0l}^{-1}(\epsilon) + 2\tau_{0t}^{-1}(\epsilon), \end{aligned}$$

式中 $\tau_{0l}^{-1}(\epsilon)$ 就是零场弛豫时间的横向部分式(38); 纵向部分

$$\tau_{0t}^{-1}(\epsilon) = \sqrt{2} \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) \frac{\alpha^{3/2} m^{3/2}}{\pi \hbar^4} \epsilon^{1/2}. \quad (41)$$

若 $\alpha = \gamma = 1$, 零場弛豫時間的橫向部分和縱向部分相等, 即

$$\tau_{0i}^{-1}(\epsilon) = \tau_{0r}^{-1}(\epsilon) \equiv \tau_0^{-1}(\epsilon) = \sqrt{2} \left(\frac{c^2 k T}{s^2 \rho \Omega} \right) \frac{m^{3/2}}{\pi \hbar^4} \epsilon^{1/2},$$

在上式中, 我們是設標量有效質量等于自由電子質量, 不然的話就要用標量有效質量 m_0^* 代替 m , 這是熟知的球形等能面情況的聲子散射弛豫時間。

2. 电离杂质散射

对于电离杂质散射, 我們只考虑量子极限情况, 由式(36)和(28)(取 $n'' = 0$), 得到

$$\tau^{-1}(\epsilon_s) = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{n_I}{\Omega} \right) \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon} \right)^2 \sum_{\mathbf{q}} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{r_s} \right)^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2 (|J_{00}|^2 + |J_{01}|^2 - 2J_{11}^* J_{00}). \quad (42)$$

由式(14)并利用厄米多項式母函数的性質, 得到

$$\left. \begin{aligned} |J_{00}|^2 &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/2} \lambda^4 q_y^2 + \left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{-1/2} (q_x + \xi q_s)^2 \right] \right\}, \\ |J_{01}|^2 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/2} \lambda^4 q_y^2 + \left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{-1/2} (q_x + \xi q_s)^2 \right] |J_{00}|^2, \\ J_{11}^* J_{00} &= -|J_{01}|^2. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

將式(43)代入式(42), 得到

$$\begin{aligned} \tau^{-1}(\epsilon_s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{n_I}{\Omega} \right) \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon} \right)^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{ 1 + \frac{3}{2} \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/2} \lambda^4 q_y^2 + \left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{-1/2} (q_x + \xi q_s)^2 \right] \right\}}{\left[\left(\frac{1}{r_s} \right)^2 + \mathbf{q}^2 \right]^2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/2} \lambda^4 q_y^2 + \left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{-1/2} (q_x + \xi q_s)^2 \right] \right\} d\mathbf{q}, \end{aligned}$$

上式中的积分不能精确积出, 經簡化后求得 $\tau^{-1}(\epsilon_s)$ 为如下形式:

$$\tau^{-1}(\epsilon_s) = \left(\frac{n_I(H)}{\Omega} \right) \left(\frac{e^2}{\epsilon} \right)^2 \frac{\sqrt{2m^{**}}}{2m^*} \frac{\epsilon_s^{-1/2}}{\hbar \omega^*} I \left(\frac{\epsilon_s^*}{\hbar \omega^*}; \eta \lambda \right), \quad (44)$$

式中

$$I \left(\frac{\epsilon_s^*}{\hbar \omega^*}; \eta \lambda \right) = \int_0^{\infty} \Phi(x) \left(1 + \frac{3}{2} x^2 \right) e^{-x^2} x dx, \quad (44.1)$$

而

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(G_1 + G_2 \cos^2 \theta)^2}, \\ G_1 &= \frac{\epsilon_s^*}{\hbar \omega^*} + \frac{x^2}{\eta^2 \lambda^2}, \quad G_2 = x^2 \left(\eta^2 \lambda^2 - \frac{1}{\eta^2 \lambda^2} \right), \\ \eta &= \left(\frac{1}{\lambda^4} \frac{\mu}{m_i^*} \right)^{1/4}, \quad \epsilon_s^* = \frac{\hbar^2}{2m^* r_s^2} \end{aligned} \right\} \quad (44.2)$$

可以看出, I 与电子能量无关, 在电导率的计算时可视为常量, 但其值与磁场方向有关.

在零场情况下, 由(39)式求得

$$\tau_0^{-1}(\epsilon) = \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k}|} M(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}') \delta(\epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{k}}), \quad (45)$$

式中

$$M(\mathbf{k} + \mathbf{q}, \mathbf{k}') = \left(\frac{2\pi}{\hbar} \right) \left(\frac{n_I}{Q} \right) \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{r_s} \right)^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2 \left(\frac{4\pi e^2}{\epsilon} \right)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} - \mathbf{k}'). \quad (46)$$

经运算, 由式(46)和(45)求得

$$\tau_0^{-1}(\epsilon) = \tau_{0l}^{-1}(\epsilon) + 2\tau_{0r}^{-1}(\epsilon). \quad (47)$$

这里, $\tau_{0l}(\epsilon)$ 和 $\tau_{0r}(\epsilon)$ 仍是零场弛豫时间(对于杂质散射)的纵向部分和横向部分, 其中

$$\tau_{0l}^{-1}(\epsilon) = \sqrt{2} \left(\frac{e}{\epsilon} \right)^2 \left(\frac{n_I(0)}{Q} \right) (\alpha m)^{-1/2} \epsilon^{-3/2} \Theta_1, \quad (48)$$

$$\Theta_1 = 2\pi \int_0^\pi \frac{(1 - \cos\theta) \sin\theta d\theta}{\left[\frac{\gamma \epsilon_s}{\epsilon} + (1 - \cos\theta)^2 + \gamma \sin^2\theta \right]^2} \cong \pi \left(\frac{1}{\gamma + \frac{\gamma \epsilon_s}{\epsilon}} - \frac{1}{\gamma + \frac{\gamma \epsilon_s}{\epsilon} + 4} \right), \quad (49)$$

$$\epsilon_s = \frac{\hbar^2}{2\gamma \alpha m \gamma_s^2}.$$

而

$$\tau_{0r}^{-1}(\epsilon) = \sqrt{2} \left(\frac{e}{\epsilon} \right)^2 \left(\frac{n_I(0)}{Q} \right) \gamma (\alpha m)^{-1/2} \epsilon^{-3/2} \Theta_2, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{(1 - \sin\theta \cos\phi) \sin\theta d\theta d\phi}{\left[\frac{\gamma \epsilon_s}{\epsilon} + (1 - \gamma) \cos^2\theta + 2\gamma(1 - \sin\theta \cos\phi) \right]^2} \cong \\ &\cong 3\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right) \right) \left(\frac{A}{\sqrt{2} Q^{3/2}} + \frac{B+C}{Q} \right) + \\ &+ 3\pi \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \right) \right) \left(\frac{A'}{\sqrt{2} Q^{3/2}} + \frac{B'+C'}{Q} \right) - 3\pi \left(\frac{D-D'}{2^{3/2}} \right); \quad (51) \end{aligned}$$

式中

$$Q = \frac{\gamma \epsilon_s}{\epsilon} + 1 + 2\gamma + \frac{1}{2} \gamma^2,$$

$$A = \log \frac{\left| \sqrt{Q} - \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right| \cdot \left| \sqrt{Q} + \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right|}{\left| \sqrt{Q} + \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right| \cdot \left| \sqrt{Q} - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right|},$$

$$A' = \log \frac{\left| \sqrt{Q} - \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right| \cdot \left| \sqrt{Q} + \left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right|}{\left| \sqrt{Q} + \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right| \cdot \left| \sqrt{Q} - \left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right) \right|},$$

$$\begin{aligned}
B &= \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1} - \\
&\quad - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1}, \\
B' &= \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1} - \\
&\quad - \left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1}, \\
C &= \log \frac{\left| Q - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \right|}{\left| Q - \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \right|}, \quad C' = \log \frac{\left| Q - \left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \right|}{\left| Q - \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 \right|}, \\
D &= \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1} - \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1}, \\
D' &= \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1} - \left[\left(\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \gamma \right)^2 - Q \right]^{-1}.
\end{aligned}$$

注意到 Θ_1 和 Θ_2 是 ϵ 的缓变函数, 在非简并零场电导率的计算时可以视为与 ϵ 无关, 而 Θ 中的 ϵ 可以用电子的最大平均热动能来代替也不会产生很大的误差, 此时用 Θ_1^0 和 Θ_2^0 来表示这时的 Θ_1 和 Θ_2 . 作这种近似之后, 非简并零场电导率就可以计算出来.

四、电导率张量的计算, 横向磁阻

在前一部分, 式(33)求得了定态玻尔兹曼方程的解, 利用这个解及玻尔兹曼方程可求得

$$\left. \begin{aligned}
\langle n-1 | f(k_x) | n \rangle &= ie(E_x + iE_y) \left(\frac{1}{m^*} \sqrt{\frac{m_i^*}{2\hbar\omega^*}} \frac{\sqrt{n} [f_0(\epsilon_{n-1k}) - f_0(\epsilon_{nk})]}{i\omega^* - \tau^{-1}(\epsilon_{n-1k})} \right), \\
\langle n+1 | f(k_x) | n \rangle &= ie(E_x - iE_y) \left(\frac{1}{m^*} \sqrt{\frac{m_i^*}{2\hbar\omega^*}} \frac{\sqrt{n+1} [f_0(\epsilon_{n+1k}) - f_0(\epsilon_{nk})]}{-i\omega^* - \tau^{-1}(\epsilon_{nk})} \right).
\end{aligned} \right\} \quad (52)$$

由式(16)出发, 利用式(26)–(32), 在电场横向于磁场的情况下, 最后求得电流密度表达式

$$\begin{aligned}
J_x + iJ_y &= 2 \left(\frac{e}{Q} \right) \text{Sp}[(v_x + iv_y)f] = \\
&= 2 \left(\frac{e}{Q} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mathbf{k}} \langle n\mathbf{k} | v_x + iv_y | n-1\mathbf{k} \rangle \langle n-1 | f_1(\mathbf{k}) | n \rangle = \left(-\frac{e^2}{m^*} \right) (E_x + iE_y) \times \\
&\quad \times \int_{\frac{1}{2}\hbar\omega^*}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^* \sqrt{2m^{**}}}{\hbar^3} (\hbar\omega^*)^2 \sum_n \left[(n+1) \left(\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega^* \right)^{-1/2} \right] \right\}}{\tau^{-1}(\epsilon) - i\omega^*} \times \\
&\quad \times \frac{f_0(\epsilon + \hbar\omega^*) - f_0(\epsilon)}{\hbar\omega^*} d\epsilon.
\end{aligned} \quad (53)$$

利用电导率张量, 写出电流密度分量为

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (54)$$

在 $\omega^* \tau \gg 1$ 的条件下, 由式(54)和(53)求得电导率 σ_1 和 σ_2 为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \left(-\frac{e^2}{m^*} \right) \times \\ &\times \int_{\frac{1}{2}\hbar\omega^*}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^* \sqrt{2m^{**}}}{\hbar^3} (\hbar\omega^*)^2 \sum_n \left[(n+1) \left(\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega^* \right)^{-1/2} \right] \right\}}{\omega^{*2}} \times \\ &\times \tau^{-1}(\epsilon) \frac{f_0(\epsilon + \hbar\omega^*) - f_0(\epsilon)}{\hbar\omega^*} d\epsilon, \\ \sigma_2 &= \left(-\frac{e^2}{m^*} \right) \times \\ &\times \int_{\frac{1}{2}\hbar\omega^*}^{\infty} \frac{\left\{ \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^* \sqrt{2m^{**}}}{\hbar^3} (\hbar\omega^*)^2 \sum_n \left[(n+1) \left(\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega^* \right)^{-1/2} \right] \right\}}{\omega^*} \times \\ &\times \frac{f_0(\epsilon + \hbar\omega^*) - f_0(\epsilon)}{\hbar\omega^*} d\epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

横向磁阻的定义为

$$\rho_t = \sigma_1 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2). \quad (56)$$

在计算磁阻之前, 下面先计算有磁场和零场时的费米能级以及零场电导率 $\sigma(0)$:

(i) 简并情况下外磁场中的费米能级 在简并情况下, $\epsilon_F \gg \hbar\omega^* \gg kT$ (所谓简并, $\epsilon_F \gg kT$ 这个条件是必须的, 我们再假定 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^*$, 并且 $\hbar\omega^* \gg kT$), $f = \left[\exp\left(\frac{\epsilon - \epsilon_F}{kT}\right) + 1 \right]^{-1}$, 所有对 ϵ 的积分仅在区间 $\epsilon \sim \epsilon_F \gg \hbar\omega^*$ 内有效. 就一个椭球来说, 归化条件为

$$n^{(\nu)}(H) = 2 \int_0^{\infty} f(\epsilon) N(\epsilon) d\epsilon, \quad (57)$$

式中 $n^{(\nu)}(H)$ 为磁场下处于第 ν 个椭球的电子数. 又在 $\epsilon \gg \hbar\omega^*$ 的条件下, 使用泊松求和公式^[11]得到

$$\begin{aligned} \sum_n \left[\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega^* \right]^{1/2} &= \\ &= \frac{2}{3} \frac{\epsilon^{3/2}}{\hbar\omega^*} \left[1 - \frac{3}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar\omega^*}{\epsilon} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \cos\left(\frac{2\pi n \epsilon}{\hbar\omega^*} + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (58)$$

利用式(58)及费米积分公式, 再对四个椭球求和, 最后由式(57)对 $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 三个不同的磁场方向求得

$$\begin{aligned}
 \epsilon_F \langle 111 \rangle &= \tilde{\epsilon}_F(H) \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\alpha\epsilon_F(0)} \right)^{3/2} \gamma^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \left[\cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F(0)}{\hbar\omega_0} \alpha \gamma + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{\pi}{4} \right) + \left(\sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} \right)^{3/2} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F(0)}{\hbar\omega_0} \frac{3\alpha\gamma}{\sqrt{1+8\gamma}} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}; \\
 \epsilon_F \langle 110 \rangle &= \tilde{\epsilon}_F(H) \left\{ 1 + \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\alpha\epsilon_F(0)} \right)^{3/2} \gamma^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \times \right. \\
 &\quad \times \left[\gamma^{3/4} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F(0)}{\hbar\omega_0} \alpha \sqrt{\gamma} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \right)^{3/2} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F(0)}{\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{3}{2+\gamma}} \alpha \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}; \\
 \epsilon_F \langle 100 \rangle &= \tilde{\epsilon}_F(H) \left\{ 1 + \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\alpha\epsilon_F(0)} \right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}} \right)^{3/2} \gamma^{-3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \times \right. \\
 &\quad \left. \times \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F(0)}{\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{3}{1+2\gamma}} \alpha \gamma + \frac{\pi}{4} \right) \right\};
 \end{aligned} \tag{59}$$

式中

$$\tilde{\epsilon}_F(H) = 4^{-2/3} \gamma^{-2/3} 3^{2/3} \pi^{4/3} n(H)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2\alpha m}.$$

因为 $n(H) \approx n(0)$, 所以 $\tilde{\epsilon}_F(H) \approx \epsilon_F(0)$, 而 $\epsilon_F(0)$ 由

$$n(0) = 8 \int_0^{\epsilon_F(0)} N_0(\epsilon) d\epsilon$$

給定, 求得

$$\epsilon_F(0) = 4^{-2/3} \gamma^{-2/3} 3^{2/3} \pi^{4/3} n(0)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2\alpha m}. \tag{60}$$

由式(59)看出, 費米能級具有振蕩形式, 但振蕩方式是很复杂的, 在 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^*$ 的条件下, 这些振蕩項的振幅与 1 相比是很小的, 而且振幅随 ω^* 的增加(但要保證 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^*$) 而增大. 三个方向的費米能級的平均值是一样的, 即

$$\overline{\epsilon_F \langle 111 \rangle} = \overline{\epsilon_F \langle 110 \rangle} = \overline{\epsilon_F \langle 100 \rangle} = \tilde{\epsilon}_F(H) \approx \epsilon_F(0).$$

(ii) 非簡并情况下外磁場中的費米能級 在非簡并的条件下, $f_0 = \exp[(\epsilon_F - \epsilon)/kT]$, $\frac{\epsilon - \epsilon_F}{kT} \gg 1$. 再使用归化条件(57)对于不同的磁場方向求得

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{\epsilon_F \langle 111 \rangle}{kT}} &= 8\pi^2 n(H) \left\{ \frac{m\omega_0}{\hbar} \left(\frac{2\pi\alpha m kT}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\operatorname{csch} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2\alpha\gamma kT} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} \operatorname{csch} \left(\frac{\hbar\omega_0}{6\alpha\gamma kT} \sqrt{1+8\gamma} \right) \right] \right\}^{-1}, \\
 e^{\frac{\epsilon_F \langle 110 \rangle}{kT}} &= 8\pi^2 n(H) \left\{ \frac{m\omega_0}{\hbar} \left(\frac{2\pi\alpha m kT}{\hbar^2} \right)^{1/2} \left[\sqrt{\gamma} \operatorname{csch} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2\alpha\sqrt{\gamma} kT} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(\sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \right)^{1/2} \operatorname{csch} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2\alpha\sqrt{\gamma} kT} \sqrt{\frac{3}{2+\gamma}} \right) \right] \right\}^{-1}
 \end{aligned} \tag{61}$$

$$+ \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \operatorname{csch}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2\alpha\gamma kT} \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}}\right)\}^{-1},$$

$$e^{\frac{\epsilon_F(100)}{kT}} = 16\pi^2 n(H) \left\{ \frac{m\omega_0}{\hbar} \left(\frac{2\pi\alpha m kT}{\hbar^2} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}} \operatorname{csch}\left(\frac{\hbar\omega_0}{2\alpha\gamma kT} \sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}}\right) \right\}^{-1}.$$

在零場下, 对于非簡并情况, 由归化条件

$$n(0) = 8 \int_0^\infty \exp[(\epsilon_F(0) - \epsilon)/kT] N_0(\epsilon) d\epsilon$$

求得

$$e^{\frac{\epsilon_F(0)}{kT}} = n(0) \left(\frac{\hbar^2 \pi}{2\alpha m kT} \right)^{3/2} \frac{1}{\gamma}. \quad (62)$$

(iii) 簡并情况下零場声子散射电导率 在零場下, $m^* \rightarrow m_i^*$, $m^{**} \rightarrow m_i^*$, 并且

$$\lim_{\hbar\omega^* \rightarrow 0} \frac{f_0(\epsilon + \hbar\omega^*) - f_0(\epsilon)}{\hbar\omega^*} \rightarrow \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon},$$

由方程(55)得到

$$\sigma_1(0) = \sigma_2(0) \equiv \sigma(0) = \left(-\frac{e^2}{m_i^*} \right) \int_0^\infty \left[\frac{1}{2\pi^2} \frac{m_i^* \sqrt{2m_i^*}}{\hbar^3} \frac{4}{3} \epsilon^{3/2} \right] \tau_0(\epsilon) \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} d\epsilon, \quad (63)$$

由式(63), 再利用式(41)和(38)算得(对四个椭球求和)

$$\sigma(0) = \frac{8}{9\pi} \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) \left(\frac{e^2}{\alpha m} \right) \left(\frac{s^2 \rho \Omega}{c^2 kT} \right) \hbar \epsilon_F(0), \quad (64)$$

式中 $\epsilon_F(0)$ 由式(60)给出.

(iv) 簡并情况下零場杂质散射电导率 此时利用式(63), (50) 和(48)算得(对四个椭球求和)

$$\sigma(0) = \frac{8}{9} \left(\frac{\epsilon}{e} \right)^2 \left(\frac{\Omega}{n_I(0)} \right) \frac{\alpha m}{\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{1}{\Theta_1(\epsilon_F(0))} + \frac{2}{\gamma \Theta_2(\epsilon_F(0))} \right) \epsilon_F^3(0). \quad (65)$$

(v) 非簡并情况下零場声子散射电导率 此时利用式(63), (62), (41) 和(38)算得(对四个椭球求和)

$$\sigma(0) = \frac{4}{9} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha^{5/2} \gamma} \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) \left(\frac{s^2 \rho \Omega}{c^2 kT} \right) n(0) e^2 \frac{\hbar^4}{\sqrt{2kT}} m^{-5/2}. \quad (66)$$

(vi) 非簡并情况下零場杂质散射电导率 此时利用式(63), (62), (50) 和(48)算得(对四个椭球求和)

$$\sigma(0) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi \alpha \gamma}} \left(\frac{n(0)}{n_I(0)} \right) \left(\frac{\Omega \epsilon^2}{e^2} \right) (kT)^{3/2} m^{-1/2} \left(\frac{1}{\Theta_1^0} + \frac{2}{\gamma \Theta_2^0} \right). \quad (67)$$

作了上面的一些計算后, 下面就計算簡并时, 一般情况下(非量子极限情况)声子散射的橫向磁阻. 在 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^* \gg kT$ 的条件下, 公式(55)中的积分仅在 $\epsilon \cong \epsilon_F \gg \hbar\omega^*$ 的区間内有效, 并且

$$\frac{f_0(\epsilon + \hbar\omega^*) - f_0(\epsilon)}{\hbar\omega^*} \rightarrow \begin{cases} -\delta(\epsilon - \epsilon_F) & \epsilon_F - \hbar\omega^* < \epsilon < \epsilon_F; \\ 0 & \epsilon_F < \epsilon < \epsilon_F - \hbar\omega^*. \end{cases} \quad (68)$$

在簡并非量子极限情况下, 电子可以占据着各种振子态, 在計算式(55)中的积分时, 必須

在 $\frac{\hbar\omega^*}{\epsilon} \ll 1$ 的条件下, 利用泊松求和公式^[11]将下式展开

$$\sum_n \left[(n+1) \left(\epsilon - \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega^* \right)^{-1/2} \right] \cong \frac{4}{3} (\hbar\omega^*)^{-1/2} \left(\frac{\epsilon}{\hbar\omega^*} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{3}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\hbar\omega^*}{\epsilon} \right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon}{\hbar\omega^*} - \frac{\pi}{4} \right) \right\}. \quad (69)$$

由式(69), (68), (64), (56)和(55)对于 $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 三个不同的磁场方向求得简并时非量子极限声子散射的横向磁阻比为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_t \langle 111 \rangle}{\rho_0} &= \frac{2+\gamma}{6} \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{9}{1+8\gamma}} \right) - \frac{5\sqrt{2}}{8\pi} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F \langle 111 \rangle} \right)^{3/2} (\alpha\gamma)^{-3/2} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \left[\cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F \langle 111 \rangle}{\hbar\omega_0} \alpha\gamma + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1+8\gamma}{9} \right)^{1/4} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F \langle 111 \rangle}{\hbar\omega_0} \frac{3\alpha\gamma}{\sqrt{1+8\gamma}} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\rho_t \langle 110 \rangle}{\rho_0} &= \frac{2+\gamma}{6\sqrt{\gamma}} \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{3\gamma}{2+\gamma}} \right) - \frac{5\sqrt{2}}{8\pi} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F \langle 110 \rangle} \right)^{3/2} (\alpha\gamma)^{-3/2} \times \right. \\ &\quad \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \left[\gamma^{3/4} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F \langle 110 \rangle}{\hbar\omega_0} \alpha\sqrt{\gamma} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\gamma} \left(\frac{2+\gamma}{3} \right) \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F \langle 110 \rangle}{\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{3}{2+\gamma}} \alpha\gamma + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}, \\ \frac{\rho_t \langle 100 \rangle}{\rho_0} &= \frac{2+\gamma}{3} \sqrt{\frac{3}{1+2\gamma}} \left\{ 1 - \frac{5\sqrt{2}}{8\pi} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F \langle 100 \rangle} \right)^{3/2} \left(\frac{1+2\gamma}{3\alpha\gamma} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F \langle 100 \rangle}{\hbar\omega_0} \sqrt{\frac{3}{1+2\gamma}} \alpha\gamma + \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

式中 $\rho_0 = \frac{1}{\sigma(0)}$. 若 $\alpha = \gamma = 1$ (令标量有效质量等于自由电子质量), 那么就变为球形等能面情况, 式(70)就成为

$$\begin{aligned} \frac{\rho_t \langle 111 \rangle}{\rho_0} &= \frac{\rho_t \langle 110 \rangle}{\rho_0} = \frac{\rho_t \langle 100 \rangle}{\rho_0} \equiv \frac{\rho_t}{\rho_0} = \\ &= 1 - \frac{5\sqrt{2}}{8\pi} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F}{\hbar\omega_0} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned} \quad (70.1)$$

式(70.1)中的 ϵ_F 应以球形等能面情况算得的结果 ϵ_F^s 来代替:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_F^s &= \tilde{\epsilon}_F^s(H) \left\{ 1 + \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F^s(0)} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} \cos \left(\frac{2\pi n \epsilon_F^s(0)}{\hbar\omega_0} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \\ \text{式中} \quad \tilde{\epsilon}_F^s(H) &= 3^{2/3} \pi^{4/3} n(H)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}, \\ \epsilon_F^s(0) &= 3^{2/3} \pi^{4/3} n(0)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m}. \end{aligned} \right\} \quad (70.2)$$

但对于某种具体材料而言,式(70.1)和(70.2)中的 m 应以相应于这种材料的标量有效质量 m_0^* 来代替, ω_0 应以 ω_0^* ($\omega_0^* = \frac{eH}{m_0^* c}$)来代替。(70.1)式正是 Argyres^[8]所得到的结果¹⁾。

由式(70)看出, $\frac{\rho_i}{\rho_0}$ 具有振荡形式,但这种振荡形式是极其复杂的。在式(70)中, ω^* 是用 α , γ 和 ω_0 表示出来的,实际上在 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^* \gg kT$ 条件下,这些振荡项的振幅是很小的,而且随着磁场的增强(但要保证 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^*$)而增大。由式(70)得

$$\frac{\overline{\rho_i \langle 111 \rangle}}{\rho_0} = 1.2, \quad \frac{\overline{\rho_i \langle 110 \rangle}}{\rho_0} = 2.0, \quad \frac{\overline{\rho_i \langle 100 \rangle}}{\rho_0} = 1.3,$$

因此

$$\frac{\overline{\rho_i \langle 111 \rangle}}{\rho_0} : \frac{\overline{\rho_i \langle 110 \rangle}}{\rho_0} : \frac{\overline{\rho_i \langle 100 \rangle}}{\rho_0} = 1:1.7:1.1, \quad (70.3)$$

即 $\langle 110 \rangle$ 方向的磁阻最大。在图2中给出了由式(70)算得的 $\frac{\rho_i \langle 100 \rangle}{\rho_0}$ 与 $\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F(0)}$ 的关系曲线,在这里近似地用 $\epsilon_F(0)$ 代替 $\epsilon_F(H)$,只取 n 从1到4,并且只对 $\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F(0)}$ 在0.004到0.04间的19个值进行了计算。当 $\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F(0)} \cong 0.028$ 时, $(1.12 + 0.01) \lesssim \frac{\rho_i \langle 100 \rangle}{\rho_0} \lesssim (1.12 - 0.01)$,则振荡行为差不多很明显。这时若 $T = 10^\circ\text{K}$,取 $\epsilon_F = 15kT$,则 $H = 33\text{ kG}$;若 $T = 15^\circ\text{K}$,取 $\epsilon_F = 15kT$,则 $H = 50\text{ kG}$;若 $T = 20^\circ\text{K}$,取 $\epsilon_F = 15kT$,则 $H = 66\text{ kG}$ 。若 $T = 10^\circ\text{K}$,取 $\epsilon_F = 20kT$,则 $H = 44\text{ kG}$;若 $T = 15^\circ\text{K}$,取 $\epsilon_F = 20kT$,则 $H = 66\text{ kG}$;若 $T = 20^\circ\text{K}$,取 $\epsilon_F = 20kT$,则 $H = 88\text{ kG}$ 。但并不是随着磁场的无限增强振荡振幅无限地增加,因为我们的公式仅在 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^*$ 的条件下才有效。

对于 In Sb,具有球形等能面,有效质量是标量,有效质量 $m_0^* = 0.013m$ (m 是自由电子质量),相应的回旋频率 $\omega_0^* = 9.6\omega^* \langle 100 \rangle$ ($\omega_0^* = 77\omega_0$),这说明在相同的磁场强度下,

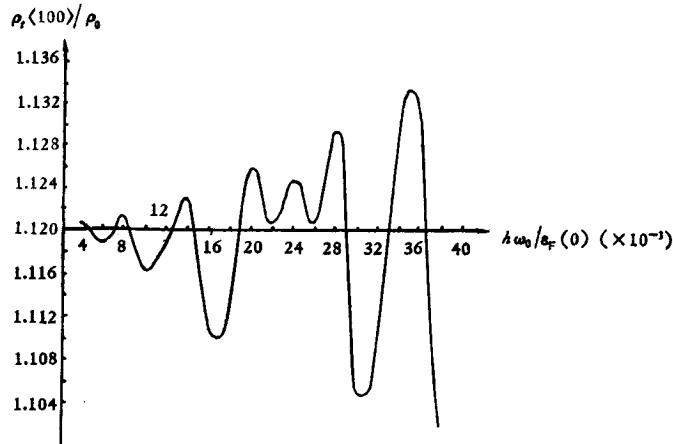


图 2

1) 公式(70.1)中 $\left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F(0)}\right)^{3/2}$ 前面的数字系数, Argyres 得到为 $\frac{7\sqrt{2}}{16\pi}$,但就这里所使用的近似应为 $\frac{5\sqrt{2}}{8\pi}$ 。

In Sb 的迴旋频率远大于锗 $\langle 100 \rangle$ 方向的迴旋频率, 所以在较弱的磁场下对 In Sb 就可以观察到磁阻振荡, 其振荡行为由式(70.1)描述(其中的 ω_0 换为 ω_0^*), 在图 3 中给出了 In Sb 按式(70.1)所描述的振荡行为。为了和锗

的 $\frac{\rho_{\langle 100 \rangle}}{\rho_0}$ 的振荡行为相比, 我们取

两者的费米能级相等, 并且取所加的磁场大小相等。但在图 3 中对于 In Sb 我们只在相应于锗 $\frac{\rho_{\langle 100 \rangle}}{\rho_0}$ 的开始一段

磁场内(为了保证 $\epsilon_F \gg \hbar\omega_0^*$)画出了 $\frac{\rho_{\langle 100 \rangle}}{\rho_0}$,

在这里仍然近似地用 $\epsilon_F'(0)$ 代替 ϵ_F' 。由于 $\omega_0^* \gg \omega^*\langle 100 \rangle$, 所以在相同的费米能

级和相同的磁场强度下, In Sb 的 $\frac{\rho_{\langle 100 \rangle}}{\rho_0}$ 的振荡项与锗的 $\frac{\rho_{\langle 100 \rangle}}{\rho_0}$ 的振荡项前面的系数比

$$\left(\frac{77\omega_0}{\omega_0}\right)^{3/2} \frac{3}{2+\gamma} \sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}} \cong 570.$$

五、量子极限下的横向磁阻

当磁场十分强时, 使得条件 $\hbar\omega^* \gg kT$ 充分满足, 所有导带电子都处于基振子态, 称为量子极限情况, 也就是强场低温极限。在量子极限下, 在能态密度及费米能级等的表达式中取振子数 $n=0$ 。若 $\hbar\omega^* \gg \epsilon - \epsilon_F \gg kT$, 称为非简并量子极限, 若 $\hbar\omega^* \gg \epsilon_F \gg kT$, 称为简并量子极限。在量子极限下,

$$\frac{f_0(\epsilon + \hbar\omega^*) - f_0(\epsilon)}{\hbar\omega^*} \rightarrow -\frac{f_0(\epsilon_F)}{\hbar\omega^*},$$

并且方程(55)成为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \left(\frac{e^2}{m^*}\right) \int_0^{\hbar\omega^*} \frac{\left\{ \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^* \sqrt{2m^{**}}}{\hbar^3} (\hbar\omega^*)^2 \epsilon_x^{-1/2} \right\}}{\omega^{*2}} \tau^{-1}(\epsilon_x) \frac{f_0(\epsilon_x)}{\hbar\omega^*} d\epsilon_x, \\ \sigma_2 &= \left(\frac{e^2}{m^*}\right) \int_0^{\hbar\omega^*} \frac{\left\{ \frac{1}{2\pi^2} \frac{m^* \sqrt{2m^{**}}}{\hbar^3} (\hbar\omega^*)^2 \epsilon_x^{-1/2} \right\}}{\omega^*} \frac{f_0(\epsilon_x)}{\hbar\omega^*} d\epsilon_x. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

在量子极限下, 由式(57)得到简并时费米能级

$$\epsilon_F \langle \mathbf{l} \rangle = \left(\frac{n(H)}{n(0)}\right)^{2/3} \frac{16}{9} \gamma^2 \alpha^3 \epsilon_F(0) \left[\sum_v \frac{m_v^* \langle \mathbf{l} \rangle \sqrt{2m_v^{**} \langle \mathbf{l} \rangle}}{(2m)^{3/2}} \frac{\hbar\omega_v^* \langle \mathbf{l} \rangle}{\epsilon_F(0)} \right]^{-2}, \quad (72)$$

式中 $\langle \mathbf{l} \rangle$ 表 $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 三个特殊的磁场方向, v 是对四个椭圆求和, $\epsilon_F(0)$ 由式(60)给出。在非简并时, 由式(57)算得量子极限下费米能级为

$$e^{\frac{\epsilon_F \langle \mathbf{l} \rangle}{kT}} = 2\pi^2 n(H) \left[\sum_v \frac{m_v^* \langle \mathbf{l} \rangle \omega_v^* \langle \mathbf{l} \rangle}{\hbar} \left(\frac{2\pi m_v^{**} \langle \mathbf{l} \rangle kT}{\hbar^2} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (73)$$

由式(72)和(73)可以算得简并和非简并时量子极限的判据的具体表示式。譬如由式(72)可以得到简并时当磁场沿 $\langle 111 \rangle$ 方向这个判据的具体表示式为

$$\hbar\omega_0 \gg \left(\frac{n(H)}{n(0)}\right)^{2/3} \left(\frac{16}{9}\right)^{1/3} (\alpha\gamma)^{2/3} \left(\frac{9}{10+8\gamma}\right)^{2/3} \epsilon_F(0),$$

若 $\alpha = \gamma = 1$, 由式(72)就可以得到球形等能面时简并量子极限判据为

$$\hbar\omega_0 \gg \left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} \epsilon_F^*(0),$$

但这里的 $\epsilon_F^*(0)$ 由式(70.2)给出。

下面计算量子极限下的横向磁阻。

(i) 量子极限下非简并时杂质散射的横向磁阻 由式(72), (67) 和(44)对于 $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 这三个不同的磁场方向算得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_i \langle 111 \rangle}{\rho_0} &= \frac{4\alpha}{3\pi} \left\{ -E_i \left(-\frac{\hbar\tau_{0l}^{-1}(\epsilon_F(0))}{kT} \right) \right\} \left(\frac{n_l(H)}{n_l(0)} \frac{n(0)}{n(H)} \right) \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0} \right) \times \\ &\quad \times \left(I^1 \langle 111 \rangle + \sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} I^2 \langle 111 \rangle \right) \left(1 + \sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\Theta_1^0} + \frac{2}{\gamma\Theta_2^0} \right), \\ \frac{\rho_i \langle 110 \rangle}{\rho_0} &= \frac{4\alpha}{3\pi} \left\{ -E_i \left(-\frac{\hbar\tau_{0l}^{-1}(\epsilon_F(0))}{kT} \right) \right\} \left(\frac{n_l(H)}{n_l(0)} \frac{n(0)}{n(H)} \right) \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0} \right) \times \\ &\quad \times \left(\sqrt{\gamma} I^1 \langle 110 \rangle + \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} I^2 \langle 110 \rangle \right) \left(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\Theta_1^0} + \frac{2}{\gamma\Theta_2^0} \right), \\ \frac{\rho_i \langle 100 \rangle}{\rho_0} &= \frac{4\alpha}{3\pi} \left\{ -E_i \left(-\frac{\hbar\tau_{0l}^{-1}(\epsilon_F(0))}{kT} \right) \right\} \left(\frac{n_l(H)}{n_l(0)} \frac{n(0)}{n(H)} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{kT}{\hbar\omega_0} \right) I \langle 100 \rangle \left(\frac{1}{\Theta_1^0} + \frac{2}{\gamma\Theta_2^0} \right), \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

式中 $\rho_0 = \frac{1}{\sigma(0)}$, $\sigma(0)$ 由式(67)给出, 而

$$\{-E_i(-x_0)\} = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-x} dx = e^{-x_0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{x+x_0} dx \quad (75)$$

是一个特殊的指数积分函数; x_0 中的 $\tau_{0l}^{-1}(\epsilon_F(0))$ 由式(48)给出, 只将其中的 ϵ 换为 $\epsilon_F(0)$, $\epsilon_F(0)$ 由式(62)给出。注意到 $\tau_{0l}^{-1} \sim kT$, 所以在低温并且杂质全部离解的情况(若掺杂较低, 这种情况是可以实现的)下, $\{-E_i(-x_0)\}$ 与温度无关, 则量子极限下非简并时对于杂质散射 $\frac{\rho_i}{\rho_0}$ 严格地与 kT 成正比, 与 $\hbar\omega_0$ 成反比。在低温并且较小的温度范围内, $\frac{\rho_i}{\rho_0}$ 也几乎与 kT 成正比, 与 $\hbar\omega_0$ 成反比。式(74)中的 $I^1 \langle 111 \rangle$ 和 $I^2 \langle 111 \rangle$ 是相应于两组椭圆积分 $I \left(\frac{\epsilon_i^*}{\hbar\omega^*}; n\lambda \right)$ 中的参量代为 $\langle 111 \rangle$ 方向的值, $I^1 \langle 110 \rangle$, $I^2 \langle 110 \rangle$ 和 $I \langle 100 \rangle$ 有相同的意义。

在这里简单地说明一下积分 $\{-E_i(-x_0)\}$ 的来源。在非量子极限情况下, 电子可以占据着各种振子态, 因此计算电导率对 ϵ 的积分是以零点能 $\frac{1}{2} \hbar\omega^*$ 为积分下限。在

量子极限情况下, 这个积分下限移到零, 这时遇到积分 $\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x} dx$ 发散. 但考虑到問題的具体物理意义, 积分下限应从 x_0 开始, x_0 由测不准关系 $\epsilon_x \tau_{0l} \geq \hbar$ 得到为 $x_0 = \frac{\hbar \tau_{0l}^{-1}(\epsilon_F(0))}{kT}$, 这样发散的困难就克服了.

(ii) 量子极限下非簡并时声子散射的橫向磁阻 首先, 量子极限下声子散射的弛豫時間由式(43)和(36)算得:

$$\tau^{-1}(\epsilon_x) \cong \left(\frac{c^2 kT}{s^2 \rho \Omega} \right) \frac{\hbar \omega^*}{\pi \hbar^4} \frac{m^* \sqrt{m^{**}}}{\sqrt{2}} \epsilon_x^{-1/2}. \quad (76)$$

由式(76), (72), (71)和(66)算得

$$\begin{aligned} \frac{\rho_i \langle 111 \rangle}{\rho_0} = \frac{\rho_i \langle 110 \rangle}{\rho_0} = \frac{\rho_i \langle 100 \rangle}{\rho_0} &= \frac{2}{9\pi\alpha} \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) \left\{ -E_i \left(\frac{\hbar \tau_{0l}^{-1}(\epsilon_F(0))}{kT} \right) \right\} \times \\ &\times \left(\frac{n(0)}{n(H)} \right) \left(\frac{\hbar \omega_0}{kT} \right), \end{aligned} \quad (77)$$

式中 τ_{0l}^{-1} 由式(41)給出, $\epsilon_F(0)$ 由式(62)給出. 在低温并且杂质全部离解的情况下, 这时 $\frac{\rho_i}{\rho_0}$ 严格地与 $\hbar \omega_0$ 成正比, 与 kT 成反比.

这里, 得到一个結論, 在非簡并量子极限情况下, 对于声子散射橫向磁阻与磁場方向无关, 即磁阻有各向同性的性質. 实际上由式(71)可知, 在非簡并量子极限下, 对于声子散射, 电导率 σ_1 和 σ_2 也与磁場方向无关:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \langle 111 \rangle &= \sigma_1 \langle 110 \rangle = \sigma_1 \langle 100 \rangle, \\ \sigma_2 \langle 111 \rangle &= \sigma_2 \langle 110 \rangle = \sigma_2 \langle 100 \rangle. \end{aligned}$$

(iii) 量子极限下簡并时声子散射的橫向磁阻 由(i), (ii)的計算可知, 由于积分 I 的方向性, 因此在量子极限下, 对于杂质散射, 不論簡并或非簡并情况, 橫向磁阻与磁場方向是有关的. 对于声子散射, 在非簡并量子极限下, 橫向磁阻与磁場方向是无关的, 但下面的計算指出, 对于声子散射, 在簡并量子极限下, 橫向磁阻与磁場方向有关.

在簡并量子极限下, 由式(72)得到

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_F \langle 111 \rangle &= \left(\frac{n(H)}{n(0)} \right)^2 \frac{16}{9} \gamma^2 \alpha^3 \epsilon_F(0) \left[\frac{\sqrt{\alpha} \hbar \omega_0}{\epsilon_F(0)} \left(1 + \sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} \right) \right]^{-2}, \\ \epsilon_F \langle 110 \rangle &= \left(\frac{n(H)}{n(0)} \right)^2 \frac{16}{9} \gamma^2 \alpha^3 \epsilon_F(0) \left[\frac{\sqrt{\alpha} \hbar \omega_0}{\epsilon_F(0)} \left(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \right) \right]^{-2}, \\ \epsilon_F \langle 100 \rangle &= \left(\frac{n(H)}{n(0)} \right)^2 \frac{16}{9} \gamma^2 \alpha^3 \epsilon_F(0) \left[\frac{2\sqrt{\alpha} \hbar \omega_0}{\epsilon_F(0)} \sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}} \right]^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

对于声子散射, 由式(71)算得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \langle 111 \rangle &= \frac{e^2}{\pi^3} \frac{\alpha^2 m^2}{\hbar^5} \gamma \left(1 + \sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} \right) \left(\frac{c^2 kT}{s^2 \rho \Omega} \right) E_\Delta \langle 111 \rangle, \\ \sigma_1 \langle 110 \rangle &= \frac{e^2}{\pi^3} \frac{\alpha^2 m^2}{\hbar^5} \gamma \left(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \right) \left(\frac{c^2 kT}{s^2 \rho \Omega} \right) E_\Delta \langle 110 \rangle, \\ \sigma_1 \langle 100 \rangle &= \frac{2e^2}{\pi^3} \frac{\alpha^2 m^2}{\hbar^5} \gamma \sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}} \left(\frac{c^2 kT}{s^2 \rho \Omega} \right) E_\Delta \langle 100 \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

其中

$$E_{\Delta}\langle 1 \rangle = \exp(x_0\langle 1 \rangle - \Delta) \int_0^{\infty} (x + \Delta)^{-1} \{ \exp x + \exp(x_0\langle 1 \rangle - \Delta) \}^{-1} dx,$$

$$x_0\langle 1 \rangle = \frac{\epsilon_F\langle 1 \rangle}{kT}, \quad \Delta = \frac{\hbar\tau_0^{-1}(\epsilon_F(0))}{kT}.$$

这里 τ_0^{-1} 由式(41)给出, $\epsilon_F\langle 1 \rangle$ 由式(78)给出, $\epsilon_F(0)$ 由式(60)给出. 利用式(71)和(78)算得

$$\sigma_2\langle 111 \rangle = \sigma_2\langle 110 \rangle = \sigma_2\langle 100 \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{e^2 m}{\pi^2 \hbar^2} \left(\frac{n(H)}{n(0)} \right) \gamma \alpha^{3/2} \frac{\epsilon_F(0)^{3/2}}{\hbar\omega_0}, \quad (80)$$

式中 $\epsilon_F(0)$ 仍由式(60)给出.

由式(78)和(80)可知, 在简并量子极限下, 电导率 σ_1 是各向异性的, 而 σ_2 是各向同性的. 由式(64), (79)和(80)算得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_i\langle 111 \rangle}{\rho_0} &= \frac{1}{\gamma\alpha^2} \left(1 + \sqrt{\frac{1+8\gamma}{9}} \right) \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) \left(\frac{n(0)}{n(H)} \right)^2 E_{\Delta}\langle 111 \rangle \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F(0)} \right)^2, \\ \frac{\rho_i\langle 110 \rangle}{\rho_0} &= \frac{1}{\gamma\alpha^2} \left(\sqrt{\gamma} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{3}} \right) \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) \left(\frac{n(0)}{n(H)} \right)^2 E_{\Delta}\langle 110 \rangle \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F(0)} \right)^2, \\ \frac{\rho_i\langle 100 \rangle}{\rho_0} &= \frac{2}{\gamma\alpha^2} \sqrt{\frac{1+2\gamma}{3}} \left(1 + \frac{2}{\gamma} \right) \left(\frac{n(0)}{n(H)} \right)^2 E_{\Delta}\langle 100 \rangle \left(\frac{\hbar\omega_0}{\epsilon_F(0)} \right)^2, \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

式中 $\rho_0 = \frac{1}{\sigma(0)}$, 若忽略掉积分 $E_{\Delta}\langle 1 \rangle$ 的方向性¹⁾, 那么由式(81)得到

$$\frac{\rho_i\langle 111 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_i\langle 110 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_i\langle 100 \rangle}{\rho_0} = 1.27:1.00:1.09. \quad (81.1)$$

在简并量子极限情况下, 对于杂质散射磁阻的计算方法完全类似于式(81), 电导率 σ_1 是各向异性的, σ_2 是各向同性的. 若忽略掉积分 E_{Δ} 和 I 的方向性, 则 $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 三个方向磁阻比值和式(81.1)有完全相同的数值.

由四、五两部分的计算可知, 随着磁场的增加由非量子极限向量子极限的过渡, $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 三个方向磁阻的各向异性效应减弱, 而各向同性效应加强. 这由式(70.3), (74), (77)和(81.1)可以看出, 在简并非量子极限下, 对于声子散射, $\frac{\rho_i\langle 111 \rangle}{\rho_0}$:

$$\frac{\rho_i\langle 110 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_i\langle 100 \rangle}{\rho_0} = 1.0:1.7:1.1; \quad \text{而在简并量子极限下, 对于声子散射, } \frac{\rho_i\langle 111 \rangle}{\rho_0} :$$

$$\frac{\rho_i\langle 110 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_i\langle 100 \rangle}{\rho_0} = 1.27:1.00:1.09. \quad \text{在非简并量子极限下, 对于声子散射磁阻与磁场}$$

方向无关; 对于杂质散射, 若忽略掉积分 I 的方向性, 则磁阻也与磁场方向无关.

六、讨 论

本文所使用的方法仅限于导带自由电子导电情况, 并不能用来处理杂质导电情况下

1) 由于 $X_0\langle 1 \rangle \gg \Delta$, 使用费米积分公式, 粗略地有 $E_{\Delta}\langle 1 \rangle \approx \lg \left(\frac{\epsilon_F\langle 1 \rangle}{kT} + \Delta \right)$, 再由式(78)可知, $E_{\Delta}\langle 111 \rangle$, $E_{\Delta}\langle 110 \rangle$ 和 $E_{\Delta}\langle 100 \rangle$ 的值相差不大.

的磁阻效应。文中虽采用了鍺的四椭球形等能面结构的特点来进行计算, 但所得结果也适应于硅, 两者仅在一些常数上有差别。对 Ge, Si 型材料, 其迴旋频率为 $\omega^* = \frac{eH}{m^*c}$, ω^* 和磁場方向有关; 但对 InSb 型材料, 迴旋频率为 $\omega_0^* = \frac{eH}{m_0^*c}$, m_0^* 是标量有效质量, 而 ω_0^* 和磁場方向无关。因此对于 Ge, Si, 其弛豫时间、电导率和费米能级不仅与磁場大小, 散射机构有关, 而且还与磁場方向有密切关系。和金属相比, $\hbar\omega^* \gg kT$ 这个条件对半导体而言更容易满足。以鍺为例, 当所使用的磁場强度和金属相同时, 对于 $\langle 111 \rangle$ 方向, $\omega^* = 13\omega_0$, $5\omega_0$ (两组椭球); 对于 $\langle 110 \rangle$ 方向, $\omega^* = 3\omega_0$, $11\omega_0$ (两组椭球); 对于 $\langle 100 \rangle$ 方向, $\omega^* = 8\omega_0$ 。因此对于半导体材料, 量子化效应显得更重要。

在简并非量子极限情况下, 对声子散射所得的磁阻比[公式(70)]为一常数项与一振荡项之和。实际上, 在 $\epsilon_F \gg \hbar\omega^* \gg kT$ 的条件下, 这个振荡项的振幅是很小的, 而且随着磁場的增强而增大。对于 $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 这三个不同的磁場方向, 这些振荡项的振荡行为也互不相同, $\frac{\rho_{\perp}\langle 111 \rangle}{\rho_0}$, $\frac{\rho_{\perp}\langle 110 \rangle}{\rho_0}$ 和 $\frac{\rho_{\perp}\langle 100 \rangle}{\rho_0}$ 的平均值分别为 1.2, 2.0 和 1.3, 因此 $\frac{\rho_{\perp}\langle 111 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_{\perp}\langle 110 \rangle}{\rho_0} : \frac{\rho_{\perp}\langle 100 \rangle}{\rho_0} = 1.0:1.7:1.1$, 即 $\langle 110 \rangle$ 方向的磁阻最大, $\langle 111 \rangle$ 和 $\langle 100 \rangle$ 方向的磁阻差不多相等。显然当 $\alpha = \gamma = 1$ 时, 则结果变为球形等能面情况(令标量有效质量等于自由电子质量), 这时磁阻比的常数项等于 1。在量子极限情况下, 文中计算了非简并(声子和杂质散射)和简并(声子散射)时的横向磁阻。在非简并情况下, 对于声子散射磁阻与磁場方向无关, 并且 $\frac{\rho_{\perp}}{\rho_0} \sim \frac{H}{T}$; 对于杂质散射, 若忽略掉积分 I 的方向性, 则磁阻也与磁場方向无关, 并且 $\frac{\rho_{\perp}}{\rho_0} \sim \frac{T}{H}$ 。在简并情况下, 对于声子散射磁阻与磁場方向有关。

给出鍺半导体材料的量子极限的判据是很有意义的。所谓量子极限就是强场低温极限。以鍺在 $\langle 111 \rangle$ 方向的磁場来估计一下这个判据: 取 $m_t^* = 0.082m$, $m_l^* = 1.582m$, 则 $m^* = 0.082m$, $0.210m$ (两组椭球)。若取 $H = 140 \text{ kG}$, 则当 $T \ll 90^\circ\text{K}$ 时, 就进入量子极限情况; 若取 $H = 100 \text{ kG}$, 就要求 $T \ll 60^\circ\text{K}$; 若取 $H = 50 \text{ kG}$, 要求 $T \ll 30^\circ\text{K}$ 才进入量子极限。

在强磁場磁阻的实验研究中, 由于各作者所使用的样品纯度、样品形状及样品的安装方式各不相同, 因此其实验结果总有些差别, 特别是低温下的非欧姆特性(磁阻依赖于电流密度)、热电子效应等强烈地影响了实验的精确性。在 Diesel 和 Love 的鍺的横向磁阻实验中, 所使用的样品杂质浓度为 $8 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, 实验是在 $19-78^\circ\text{K}$

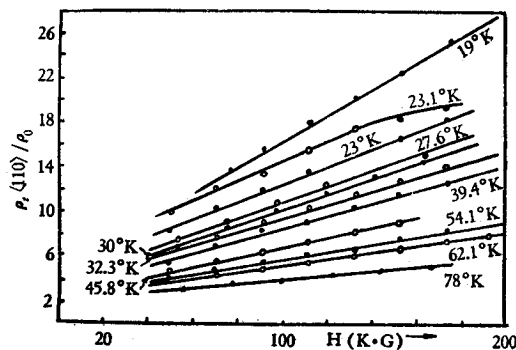


图 4

范围内进行的, 所加的磁場最大到 194 kG , 但实验只对 $\langle 110 \rangle$ 方向的磁場进行了测量, 结果

$\frac{\rho_i \langle 110 \rangle}{\rho_0} \sim \frac{H}{T}$, 图 4 给出了他們的实验結果(因为这个实验是有代表性的,而且也是比較重要的)。Diesel 和 Love 所使用的样品是属于低掺杂的,若在 3—5°K 的范围内,这时杂质导电起作用,則磁阻效应不能使用本文的方法来处理¹⁾。但在 19—78°K 的温度范围内,本文的方法仍可使用。Diesel 和 Love 的实验条件是接近非简并量子极限的情况,由于样品的純度較高,故可期待在这样的杂质浓度范围内,再加上 $\frac{kT}{\hbar\omega^*} \ll 1$ 这个条件后,杂质散射对磁阻的影响是很小的。因此,磁阻主要由晶格散射部分决定,所以这时的磁阻由式(77)给出。显然式(77)可以定性地解释 Diesel 和 Love 的实验結果²⁾。

本工作曾得到沈光銘教授的指导,陈繼义同志的帮助以及霍裕平同志有益的討論,作者在此深表感謝。

参 考 文 献

- [1] Abeles, B. and Meiboom, S., *Phys. Rev.*, **95** (1954), 31.
- [2] Shibuya, M., *Phys. Rev.*, **95** (1954), 1385.
- [3] Pearson, G. L. and Suhl, H., *Phys. Rev.*, **83** (1951), 768.
- [4] Titeica, V. S., *Ann. Physik*, **22** (1935), 22.
- [5] Davydov, B. and Pomeranchuk, I., *J. Phys. (USSR)*, **2** (1940), 147.
- [6] Argyres, P. N. and Adams, E. N., *Phys. Rev.*, **104** (1956), 900.
- [7] Adams, E. N. and Holstein, T. D., *J. Phys. Chem. Solids*, **10** (1959), 254.
- [8] Argyres, P. N., *Phys. Rev.*, **109** (1958), 1115.
- [9] Diesel, T. J. and Love, W. F., *Phys. Rev.*, **124** (1961), 666.
- [10] Kohn, W., *Solids Physics*, **5**, 1957.
- [11] Courant, R. and Hilbert, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, p. 76, New York, 1953 (有中译本).
- [12] Keyes, R. W., *Phys. Rev.*, **109** (1958), 43.
- [13] Drabble, J. R. and Wolfe, R., *Proc. Phys. Soc.*, **B69** (1956), 1101.

1) 关于极低掺杂的杂质导电范围内的磁阻处理可参看: D. shuld, *J. Phys. Chem. Solids*, **24** (1963), 341 和 N. Mikoshiba, *Phys. Rev.*, **127** (1962), 1962.

2) Diesel 和 Love 在他们的文章结尾简单地提到了 Herring 对他们实验結果的尝试解释,认为载流子浓度起伏及杂质的随机分布导致 $\frac{\rho_i}{\rho_0} \sim \frac{H}{T_0}$. 假若是这样的话,就要使用注 1) 中提到的作者的处理方法,但他们的处理結果没有得到 $\frac{\rho_i}{\rho_0} \sim \frac{H}{T}$, 而且其結果和这个結果相差很远。

THE TRANSVERSE MAGNETORESISTANCE FOR n -TYPE GERMANIUM IN A STRONG MAGNETIC FIELD

LAN SIN-FU

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

The transverse magnetoresistance of n -type germanium materials for both the acoustic and the ionized impurity scattering mechanisms has been investigated. In a degenerative case under a strong magnetic field, the expressions of the magnetoresistance of germanium in the three directions of $\langle 111 \rangle$, $\langle 110 \rangle$, and $\langle 100 \rangle$ are obtained with respect to the acoustic scattering. The relative magnitude of the average values of these results are $\frac{\overline{\rho_t \langle 111 \rangle}}{\rho_0} : \frac{\overline{\rho_t \langle 110 \rangle}}{\rho_0} : \frac{\overline{\rho_t \langle 100 \rangle}}{\rho_0} = 1:1.7:1.1$. In the nondegenerative quantum-limited case, the expressions of the transverse magnetoresistance of germanium for both acoustic and impurity scattering are obtained respectively. For acoustic scattering $\frac{\rho_t}{\rho_0} \sim \frac{H}{T}$ and, furthermore, $\frac{\rho_t}{\rho_0}$ is independent of the direction of the magnetic field; for impurity scattering $\frac{\rho_t}{\rho_0} \sim \frac{T}{H}$ and $\frac{\rho_t}{\rho_0}$ is dependent on the direction of the magnetic field except for certain specific case.

Among the results, the magnetoresistance for the acoustic scattering in a non-degenerative quantum-limited case is qualitatively in accordance with the experimental results given by Diesel and Love.