

π - N 散 射 的 复 角 动 量*

刘 連 寿
(北 京 大 学)

提 要

本文用 Sawyer 的“最奇异项求和”方法来处理 π - N 散射问题。我们发现，在角动量复平面内，领先奇异性是平方根型的固定割线。这样就给出交叉道的高能行为。

由 Regge 首先提出的复角动量技术，已经被用到许多场论模型中，以便得到关于交叉道高能行为的一些知识^[1-3]。在本文中，我们用 Sawyer^[2] 所发展的“对最奇异项作和”的方法，来处理赝标量粒子(π 介子)和旋量粒子(核子)散射的问题。为了简化计算，不考虑同位旋。

Sawyer^[2] 最初处理的只是标量粒子间的散射，此时分波振幅只有一个分量，它的方程可以直接用迭代法求解。Swift 和 Lee^[3] 研究了 N - N 散射。它的分波振幅有 16 个分量，但是经过一些近似的考虑以后，发现这些分量中只有 4 个比较大，而且在略去了较小的项以后，这四个“大分量”所满足的方程相互之间不再发生关联，因此也可以分别迭代求解。

在我们所考虑的 π - N 散射情况下，分波振幅的四个分量有相同数量级。它们的积分方程相互关联，不能任意地丢掉其中任何一项。因此，我们就采用了联立地进行迭代的方法。这样，我们就能够在既定的近似程度之下，同时得到分波振幅的全部分量。

计算结果表明，分波振幅在复角动量平面上，最右方的奇异性是一个平方根型的割线。这种奇异性就决定了交叉道的高能行为。

一、分 波 方 程

我们考虑梯形图，如图1。定义散射振幅为

$$R = \bar{u}(p')\gamma_5\psi(p', p). \quad (1)$$

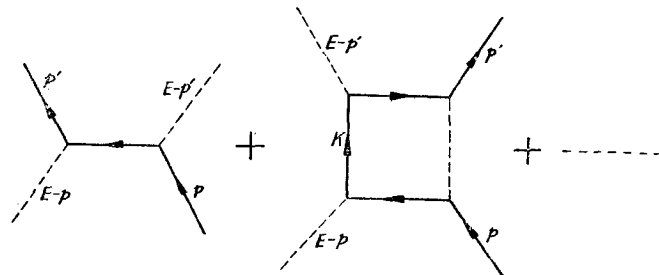


图 1

* 1964 年 4 月 17 日收到。

在一級玻恩近似中有

$$\psi_B(p', p) = g^2(2\pi)^3 S_F(p + p' - E) \gamma_5 u(p), \quad (2)$$

而对一切梯形图作和以后的 $\psi(p', p)$ 满足方程

$$\begin{aligned} \psi(p', p) = & \psi_B(p', p) + \\ & + \frac{ig^2}{(2\pi)^4} \int d^4K \frac{[i(\hat{K} + \hat{p}' - \hat{E}) - M] \gamma_5 [i\hat{K} - M] \gamma_5}{[K^2 + M^2][(E - K)^2 + m^2][(K + p' - E)^2 + M^2]} \psi(K, p). \end{aligned} \quad (3)$$

取质心系 $E = (0, E)$, 并令

$$\psi(K, p) = \begin{pmatrix} \varphi(K, p) \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} f(K, p) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

得到

$$\begin{aligned} \varphi(p', p) = & \varphi_B(p', p) - \frac{ig^2}{(2\pi)^3} \int \frac{KdKdK_0}{p'[K^2 - K_0^2 + M^2][K^2 - (E - K_0)^2 + m^2]} \times \\ & \times \sum_l Q_l(\epsilon) \{ a S_l \varphi(K, p) + b R_l \varphi(K, p) - c S_l f(K, p) - d R_l f(K, p) \}, \\ f(p', p) = & f_B(p', p) - \frac{ig^2}{(2\pi)^3} \int \frac{KdKdK_0}{p'[K^2 - K_0^2 + M^2][K^2 - (E - K_0)^2 + m^2]} \times \\ & \times \sum_l Q_l(\epsilon) \{ a' R_l f(K, p) + b S_l f(K, p) - c R_l \varphi(K, p) - d' S_l \varphi(K, p) \}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$K \equiv |\mathbf{K}|, \quad p' \equiv |\mathbf{p}'|,$$

$$\begin{aligned} a = K^2 - K_0^2 + M^2 + (E - p'_0)(K_0 - M), \quad b = p'K, \quad d = (K_0 + M)p'; \\ a' = K^2 - K_0^2 + M^2 + (E - p'_0)(K_0 + M), \quad c = (E - p'_0)K, \quad d' = (K_0 - M)p', \end{aligned} \quad (6)$$

$$\epsilon = \frac{1}{2p'K} [(K_0 + p'_0 - E)^2 - K^2 - p'^2 - M^2 + i\epsilon]. \quad (7)$$

而 S_l 和 R_l 是两个积分算符, 分别为

$$\begin{aligned} S_l \varphi(K, p) = & \frac{2l+1}{4\pi} \int P_l(\cos \omega) \varphi(K, p) d\Omega_K, \\ R_l \varphi(K, p) = & \frac{2l+1}{4\pi} \int P_l(\cos \omega) \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}'}{p'} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{K}}{K} \varphi(K, p) d\Omega_K. \end{aligned} \quad (8)$$

我們选 \mathbf{p} 的方向为 z 轴; \mathbf{p}' 的方向角为 (θ', φ') ; \mathbf{K} 的方向角为 (θ, φ) ; 而 ω 是 \mathbf{p}' 与 \mathbf{K} 的夹角.

展开 φ 和 f :

$$\begin{aligned} \varphi = & \sum_{iM} (\varphi_{iM}^+ \Omega_{ji+\frac{1}{2}M} + \varphi_{iM}^- \Omega_{ji-\frac{1}{2}M}), \\ f = & \sum_{iM} (f_{iM}^+ \Omega_{ji+\frac{1}{2}M} + f_{iM}^- \Omega_{ji-\frac{1}{2}M}), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 Ω_{iM} 是球旋量:

$$\Omega_{iM} = \sum_{\mu} C(l, \frac{1}{2}, j; M - \mu, \mu) Y_{lM-\mu} W_{\mu}, \quad (10)$$

$$W_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

算符 $\frac{\sigma \cdot \mathbf{K}}{K}$ 是转动不变量, 它作用在 Ω_{jIM} 上不改变 j, M , 只改变 $l^{[4]}$. 通过直接验算可以证明:

$$\frac{\sigma \cdot \mathbf{K}}{K} \Omega_{jj \pm \frac{1}{2}M}(\theta, \varphi) = -\Omega_{jj \mp \frac{1}{2}M}(\theta, \varphi). \quad (12)$$

这样, 立即得到

$$\begin{aligned} S_l \Omega_{jj \pm \frac{1}{2}M}(\theta, \varphi) &= \delta_{l \pm \frac{1}{2}} \Omega_{jj \pm \frac{1}{2}M}(\theta', \varphi'), \\ R_l \Omega_{jj \pm \frac{1}{2}M}(\theta, \varphi) &= \delta_{l \mp \frac{1}{2}} \Omega_{jj \pm \frac{1}{2}M}(\theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (13)$$

于是, 方程(5)化为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{jM}^+(p', p) &= \varphi_{BjM}^+(p', p) - \frac{ig^2}{(2\pi)^3} \int \frac{KdKdK_0}{p'[K^2 - K_0^2 + M^2][K^2 - (K_0 - E)^2 + m^2]} \times \\ &\quad \times [Q_{j+\frac{1}{2}}(\varepsilon)(a\varphi_{jM}^+(K, p) - c f_{jM}^+(K, p)) + Q_{j-\frac{1}{2}}(\varepsilon)(b\varphi_{jM}^+(K, p) - d f_{jM}^+(K, p))], \\ f_{jM}^+(p', p) &= f_{BjM}^+(p', p) - \frac{ig^2}{(2\pi)^3} \int \frac{KdKdK_0}{p'[K^2 - K_0^2 + M^2][K^2 - (K_0 - E)^2 + m^2]} \times \\ &\quad \times [Q_{j+\frac{1}{2}}(\varepsilon)(b f_{jM}^+(K, p) - d' \varphi_{jM}^+(K, p)) + Q_{j-\frac{1}{2}}(\varepsilon)(a' f_{jM}^+(K, p) - c \varphi_{jM}^+(K, p))], \\ \varphi_{jM}^-(p', p) &= \varphi_{BjM}^-(p', p) - \frac{ig^2}{(2\pi)^3} \int \frac{KdKdK_0}{p'[K^2 - K_0^2 + M^2][K^2 - (K_0 - E)^2 + m^2]} \times \\ &\quad \times [Q_{j+\frac{1}{2}}(\varepsilon)(b\varphi_{jM}^-(K, p) - d f_{jM}^-(K, p)) + Q_{j-\frac{1}{2}}(\varepsilon)(a\varphi_{jM}^-(K, p) - c f_{jM}^-(K, p))], \\ f_{jM}^-(p', p) &= f_{BjM}^-(p', p) - \frac{ig^2}{(2\pi)^3} \int \frac{KdKdK_0}{p'[K^2 - K_0^2 + M^2][K^2 - (K_0 - E)^2 + m^2]} \times \\ &\quad \times [Q_{j+\frac{1}{2}}(\varepsilon)(a' f_{jM}^-(K, p) - c \varphi_{jM}^-(K, p)) + Q_{j-\frac{1}{2}}(\varepsilon)(b f_{jM}^-(K, p) - d' \varphi_{jM}^-(K, p))]. \end{aligned} \right\} (14)$$

它分成两组独立的方程, 这是由于宇称守恒.

按式(2)有玻恩项

$$\psi_B^\lambda(p', p) = g^2(2\pi)^4 i \frac{i(\hat{p} + \hat{p}' - \hat{E}) - M}{(p + p' - E)^2 + M^2} \gamma_5 \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \begin{pmatrix} W_\lambda \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{p_0 + M} W_\lambda \end{pmatrix}, \quad (15)$$

令

$$\psi_B^\lambda = \begin{pmatrix} \varphi_B^\lambda \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}'}{p'} f_B^\lambda \end{pmatrix}, \quad (16)$$

利用公式

$$\frac{1}{(p + p' - E)^2 + M^2} = -\frac{1}{2pp'} \sum_{lm} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{lm}(\theta', \varphi') \delta_{m0} Q_l(y), \quad (17)$$

$$y = \frac{1}{2pp'} [(p_0 + p'_0 - E)^2 - M^2 - p^2 - p'^2 + i\varepsilon], \quad (18)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{p} W_\lambda = 2\lambda p W_\lambda, \quad (19)$$

$$\Omega_{jj \pm \frac{1}{2}M}^*(\theta', \varphi') \sigma \cdot \mathbf{p}' = -p' \Omega_{jj \mp \frac{1}{2}M}^*(\theta', \varphi'), \quad (20)$$

得到

$$\varphi_{BjM}^\lambda \equiv \int \Omega_{jj \pm \frac{1}{2}M}^*(\theta', \varphi') \varphi_B^\lambda(p', p) d\Omega_{p'} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{A}{pp'} \left[-2\lambda p(E - p'_0) Q_{i \pm \frac{1}{2}}(y) \sqrt{\frac{2(j \pm \frac{1}{2}) + 1}{4\pi}} \delta_{M\lambda} C(j \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j; M - \lambda, \lambda) + \right. \\
&\quad \left. + p'(p_0 + M) Q_{i \mp \frac{1}{2}}(y) \sqrt{\frac{2(j \mp \frac{1}{2}) + 1}{4\pi}} \delta_{M\lambda} C(j \mp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j; M - \lambda, \lambda) \right], \\
f_{\pm i M}^{\pm} &= -\frac{A}{pp'} \left[2\lambda p p' Q_{i \pm \frac{1}{2}}(y) \sqrt{\frac{2(j \pm \frac{1}{2}) + 1}{4\pi}} \delta_{M\lambda} C(j \pm \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j; M - \lambda, \lambda) + \right. \\
&\quad \left. + (M + p_0)(E - p'_0) Q_{i \mp \frac{1}{2}}(y) \sqrt{\frac{2(j \mp \frac{1}{2}) + 1}{4\pi}} \delta_{M\lambda} C(j \mp \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j; M - \lambda, \lambda) \right], \quad (21) \\
A &= \frac{g^2(2\pi)^5 i}{\sqrt{2M(p_0 + M)}}. \quad (22)
\end{aligned}$$

到此为止,我們沒有作任何近似.

二、复角动量

方程(14)可以延拓到复*j*值,但当*j*延拓到 $-1/2$ 时,含 $Q_{i-\frac{1}{2}}$ 的項有奇异性. Sawyer^[2]証明了,由这种項产生的迭代解,在 $j > -\frac{1}{2}$ 处出現支点.当考虑交叉道的高能行为时,这种“最右方支点”項会有最大的貢獻.因此,下面我們略去所有的 $Q_{i+\frac{1}{2}}$ 項,而只保留 $Q_{i-\frac{1}{2}}$ 項.

写

$$j + \frac{1}{2} \equiv l. \quad (23)$$

注意到对积分的主要貢獻来自*K*大的区域,在积分中略去*M*和*E*(相对于*K*, K_0).取 $Q_{i-\frac{1}{2}}(t) \equiv Q_{l-1}(t)$ 对 t^{-2} 展开式中的第一項,

$$Q_{l-1}(t) \approx (2t)^{-l} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(l)}{\Gamma(l + \frac{1}{2})}. \quad (24)$$

我們关心的是函数在 $l \approx 0$ 附近的奇异行为,因此在 Γ 函数中可置 $l = 0$,

$$Q_{l-1}(t) \approx t^{-1}(2t)^{-l}. \quad (25)$$

按 Wick^[5]的方法旋轉 K_0 的积分路綫,得到方程

$$\left. \begin{aligned}
\varphi_i^+(p', p) &= A_1 \left(\frac{pp'}{(p_0 + p'_0)^2 + p^2 + p'^2} \right)^l + I_{11} \varphi_i^+(K, p) + I_{12} f_i^+(K, p), \\
f_i^+(p', p) &= \left(A_2 \frac{1}{p'} + A_1 \frac{ip'_0}{p'} \right) \left(\frac{pp'}{(p_0 + p'_0)^2 + p^2 + p'^2} \right)^l + \\
&\quad + I_{21} \varphi_i^+(K, p) + I_{22} f_i^+(K, p);
\end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned}
\varphi_i^-(p', p) &= \left(A_4 \frac{1}{p'} + A_3 \frac{ip'_0}{p'} \right) \left(\frac{pp'}{(p_0 + p'_0)^2 + p^2 + p'^2} \right)^l + \\
&\quad + I_{21} f_i^-(K, p) + I_{22} \varphi_i^-(K, p), \\
f_i^-(p', p) &= A_3 \left(\frac{pp'}{(p_0 + p'_0)^2 + p^2 + p'^2} \right)^l + I_{11} f_i^-(K, p) + I_{12} \varphi_i^-(K, p).
\end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{g^2(2\pi)^5 i}{p} \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \sqrt{\frac{1}{4\pi l}}, & A_2 &= -EA_1, \\ A_3 &= 2\lambda \frac{p}{p_0 + M} A_1, & A_4 &= -EA_3. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

而 $I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}$ 是四个积分算符, 分别为

$$\left. \begin{aligned} I_{11}\varphi(K, p) &\equiv J(K\varphi(K, p)), & I_{12}f(K, p) &\equiv J(-iK_0f(K, p)), \\ I_{21}\varphi(K, p) &\equiv J\left(\frac{iKp'_0}{p'}\varphi(K, p)\right), & I_{22}f(K, p) &\equiv J\left(\frac{K^2 + K_0^2 + K_0p'_0}{p'}f(K, p)\right). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

而

$$J(\dots) \equiv \frac{g^2}{(2\pi)^3 l} \int_0^\infty dK \int_{-\infty}^\infty dK_0 \frac{K}{[K^2 + K_0^2]^2} \left(\frac{Kp'}{(K_0 + p'_0)^2 + K^2 + p'^2}\right)^l (\dots). \quad (30)$$

在实际计算“最奇异项”的时候, 可以令 $(2t)^{-1}$ 中的 $(K_0 + p'_0)^2$ 为零(见文献[2]的附录 B)。在这种近似之下, J 的积分核对 K_0 是偶的。因此, 可以将 J 中对 K_0 的积分限改为由 0 到 ∞ , 并加上因子 2, 同时略去被积函数中对 K_0 奇的项。

首先来解方程(26)。略去标符 $\binom{\lambda+}{l}$, 写玻恩项为 $\varphi^{(1)}, f^{(1)}$ 。二級近似是

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} &= I_{11}\varphi^{(1)} + I_{12}f^{(1)}, \\ f^{(2)} &= I_{21}\varphi^{(1)} + I_{22}f^{(1)}. \end{aligned}$$

三級近似中有

$$\begin{aligned} \varphi^{(3)} &= I_{11}\varphi^{(2)} + I_{12}f^{(2)} = (I_{11}I_{11} + I_{12}I_{21})\varphi^{(1)} + (I_{11}I_{12} + I_{12}I_{22})f^{(1)}, \\ f^{(3)} &= I_{21}\varphi^{(2)} + I_{22}f^{(2)} = (I_{21}I_{11} + I_{22}I_{21})\varphi^{(1)} + (I_{22}I_{22} + I_{21}I_{12})f^{(1)}. \end{aligned}$$

一般有 n 級近似

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)} &= [I_{11}^{n-1} + I_{11}^{n-3}I_{12}I_{21} + I_{11}^{n-5}(I_{12}I_{21})^2 + \dots + I_{11}^{n-4}(I_{12}I_{22}I_{21}) + \dots + \\ &\quad + I_{12}I_{22}^{n-3}I_{21}] \varphi^{(1)} + [I_{11}^{n-2}I_{12} + I_{11}^{n-4}I_{12}I_{21}I_{12} + \\ &\quad + I_{11}^{n-3}I_{12}I_{22} + \dots + I_{12}I_{22}^{n-2}] f^{(1)}, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= [I_{21}I_{11}^{n-2} + I_{21}I_{12}I_{21}I_{11}^{n-4} + \dots + I_{22}^{n-2}I_{21}] \varphi^{(1)} + \\ &\quad + [I_{22}^{n-1} + I_{22}^{n-3}I_{21}I_{12} + \dots + I_{21}I_{11}^{n-3}I_{12}] f^{(1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

利用 Sawyer^[2] 所给出的公式

$$\begin{aligned} J_x &\equiv x^l \int_0^\infty dx_1 \dots dx_{n-1} (1+x_1)^{l-1} \dots (1+x_{n-1})^{l-1} (x+x_1)^{-l} (x_1+x_2)^{-l} \dots \\ &\quad \dots (x_{n-2}+x_{n-1})^{-l} (x_{n-1}+x)^{-l} = \frac{2(2n-3)!}{n!(n-2)!} \frac{1}{l^{n-1}}, \end{aligned} \quad (33)$$

并注意到

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2 \sqrt{t}} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t} dt}{(1+t)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad (34)$$

不难发现, (31) 右边各项均相等(见附录):

$$\begin{aligned} I_{11}^{n-1}\varphi^{(1)} &= I_{11}^{n-3}I_{12}I_{21}\varphi^{(1)} = \dots = I_{12}I_{22}^{n-3}I_{21}\varphi^{(1)} = \\ &= I_{11}^{n-2}I_{12}f^{(1)} = \dots = I_{12}I_{22}^{n-2}f^{(1)} = \left(\frac{g^2}{32\pi^2}\right)^{n-1} \frac{2(2n-3)!}{n!(n-2)!} \frac{1}{l^{n-2}} A_1, \end{aligned} \quad (35)$$

而两个方括弧中显然各有 2^{n-2} 项, 总共有 2^{n-1} 项, 因此得到

$$\varphi_i^{i+(n)} = -i \frac{(2\pi)^8}{p} \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \left(\frac{l}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{g^2}{4\pi^2}\right)^n \frac{1}{l^{2n}} \frac{(2n-3)!}{n!(n-2)!2^{2n-2}}, \quad (36)$$

作和得

$$\varphi_i^{i+} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_i^{i+(n)} = -i \frac{(2\pi)^8}{p} \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \left(\frac{l}{\pi}\right)^{3/2} \left[1 - \left(1 - \frac{g^2}{4\pi^2 l^2}\right)^{1/2}\right]. \quad (37)$$

在复 l 平面 $l = \alpha$ 处出现支点

$$\alpha = \frac{g}{2\pi}. \quad (38)$$

在我们的近似中, 可以只保留最右方的支点项, 于是

$$\varphi_i^{i+} = i \frac{(2\pi)^8}{\pi^{3/2}} \frac{1}{p} \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \sqrt{l(l^2 - \alpha^2)}. \quad (39)$$

用同样方法可以得到(只保留最右方支点项)

$$f_i^{i+} = i \frac{(2\pi)^8}{\pi^{3/2}} \frac{p'_0}{p p'} \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \sqrt{l(l^2 - \alpha^2)}, \quad (40)$$

$$\varphi_i^{i-} = 2\lambda i \frac{(2\pi)^8}{\pi^{3/2}} \frac{p'_0}{p' \sqrt{2M(p_0 + M)}} \sqrt{l(l^2 - \alpha^2)}, \quad (41)$$

$$f_i^{i-} = 2\lambda i \frac{(2\pi)^8}{\pi^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2M(p_0 + M)}} \sqrt{l(l^2 - \alpha^2)}. \quad (42)$$

在这些式子中的 p_0, p'_0 都已经由 Wick 变换的变量, 换回到了原来的变量.

三、Sommerfeld-Watson 迴路

将(39)–(42)代入散射振幅的定义(1)中, 并利用式(12), 可以得到 $R_{l\lambda}(p', p)$,

$$\left. \begin{aligned} R_{1/2 \ 1/2} &= \sum_{l=1}^{\infty} G \left(\sqrt{\frac{l}{2l+1}} Y_{l \ 0} + \sqrt{\frac{l}{2l-1}} Y_{l-1 \ 0} \right) \sqrt{l(l^2 - \alpha^2)}, \\ R_{-1/2 \ -1/2} &= R_{1/2 \ 1/2}, \\ R_{-1/2 \ 1/2} &= \sum_{l=1}^{\infty} G \left(-\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_{l \ 1} + \sqrt{\frac{l-1}{2l-1}} Y_{l-1 \ 1} \right) \sqrt{l(l^2 - \alpha^2)}, \\ R_{1/2 \ -1/2} &= \sum_{l=1}^{\infty} G \left(-\sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} Y_{l \ -1} + \sqrt{\frac{l-1}{2l-1}} Y_{l-1 \ -1} \right) \sqrt{l(l^2 - \alpha^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

其中

$$G = i \frac{(2\pi)^8}{2 \cdot \pi^{3/2}} \frac{1}{p_0 + M}, \quad (44)$$

p 和 p' 已经放到质壳上.

$l-1$ 阶球函数比 l 阶球函数所含 $z = \cos\theta'$ 的方次要低一次, 在讨论大 z 极限时可以略去. 因此

$$R_{1/2 \ 1/2} = R_{-1/2 \ -1/2} = \frac{-G}{4i \sqrt{\pi}} \int_C \frac{l}{\sin \pi l} \sqrt{l^2 - \alpha^2} P_l(-z) dl, \quad (45)$$

$$R_{1/2 -1/2} e^{i\varphi} = -R_{-1/2 1/2} e^{-i\varphi} = \frac{G\sqrt{1-z^2}}{4i\sqrt{\pi}} \int_c \frac{\sqrt{l+1}}{\sin \pi l} \sqrt{l^2 - \alpha^2} P'_l(-z) dl, \quad (46)$$

积分迴路如图 2. 在 z 大时, 可以将它改为图 3 的形状. 实际有效的是繞过支点的一段 A . 于是得到 ($1 + \alpha \approx 1$)

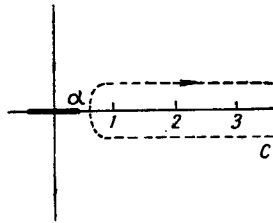


图 2

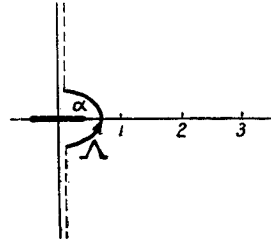


图 3

$$R_{1/2 1/2} = R_{-1/2 -1/2} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{G}{\pi} (-z)^\alpha [\log(-z)]^{-3/2},$$

$$R_{1/2 -1/2} e^{i\varphi} = -R_{-1/2 1/2} e^{-i\varphi} = \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \frac{G}{\pi} (-z)^\alpha [\log(-z)]^{-3/2}. \quad (47)$$

我們令

$$R_{\lambda\lambda}(p', p) = \bar{u}^\lambda(p') \left(A - i\gamma \frac{K + K'}{2} B \right) u^\lambda(p), \quad (48)$$

利用(47)解出 A 和 B :

$$\left. \begin{aligned} A &= -ig^{1/2} 2(2\pi)^5 \frac{M - \sqrt{s}}{t\sqrt{s}} \frac{(-z)^\alpha}{[\log(-z)]^{3/2}}, \\ B &= -ig^{1/2} 2(2\pi)^5 \frac{1}{t\sqrt{s}} \frac{(-z)^\alpha}{[\log(-z)]^{3/2}}, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

其中

$$s = -(p + K)^2 = E^2, \quad t = -(p - p')^2 = 2\mathbf{p}^2(z - 1).$$

利用上述結果, 可以研究 t 道, 即 $N\bar{N}$ 湮灭为两个 π 介子的高能行为 (当出射介子动量接近平行于入射核子时); 也可以研究 u 道, 即 π - N 散射道, 向后散射的高能行为. 微分截面具有下面的形式:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{x^{\frac{g-1}{2}}}{(\log x)^3}, \quad (50)$$

其中 x 代表所研究的道的能量平方 (即 t 或 u).

作者对胡宁教授的热情指导与具体帮助表示衷心的感谢.

附 录

我們来証明式(31)右方各項均相等. 首先計算第一項:

$$I_{11}^{n-1} \varphi^{(1)} = \left(\frac{g^2}{(2\pi)^3 l} \right)^{n-1} \int_0^\infty \frac{dK_1^2 \cdots dK_{n-1}^2 dK_{01}^2 \cdots dK_{0n-1}^2}{K_{01} \cdots K_{0n-1} [K_1^2 + K_{01}^2]^2 \cdots [K_{n-1}^2 + K_{0n-1}^2]^2} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (K_1 \cdots K_{n-1}) \left(\frac{K_1 p'}{(K_{01} + p_0')^2 + K_1^2 + p'^2} \right)^l \left(\frac{K_2 K_1}{(K_{02} + K_{01})^2 + K_2^2 + K_1^2} \right)^l \cdots \\ & \cdots \left(\frac{K_{n-1} p}{(K_{0, n-1} + p_0)^2 + K_{n-1}^2 + p^2} \right)^l A_1 \equiv S(K_1 K_2 \cdots K_{n-1} A_1). \end{aligned}$$

作变换 $K_i^2 = x_i$, $K_{i0}^2 = y_i = z_i(1 + x_i)$, 令 $p^2 = p'^2 = x$. 由于积分主要来自 x_i 大的区域, 故令 $x_i \approx 1 + x_i$, 而得到

$$\begin{aligned} I_{11}^{n-1} \varphi^{(1)} &= \left(\frac{g^2}{16\pi^3 l} \right)^{n-1} \left[\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^2 \sqrt{t}} \right]^{n-1} J_x = \\ &= \left(\frac{g^2}{32\pi^2} \right)^{n-1} \frac{2(2n-3)!}{n!(n-2)!} \frac{1}{l^{2n-2}} A_1. \end{aligned}$$

再来看第二项:

$$\begin{aligned} I_{11}^{n-3} I_{12} I_{21} \varphi^{(1)} &= S(K_1 K_2 \cdots K_{n-3}) (-i K_{0, n-2}) \times \\ &\times \left(\frac{i K_{n-1} K_{0, n-2}}{K_{n-2}} \right) A_1 = S \left(K_1 \cdots K_{n-3} \frac{K_{0, n-2}^2}{K_{n-2}} K_{n-1} A_1 \right). \end{aligned}$$

这和 $I_{11}^{n-1} \varphi^{(1)}$ 的区别只在于将第 $n-2$ 个 t 积分改为

$$\int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^2 \sqrt{t}} dt = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t} dt}{(1+t)^2}.$$

而按(34), 这不会引起任何改变.

其他各项也有完全类似情况. 例如考虑

$$\begin{aligned} I_{11}^{n-3} I_{12} I_{22} f^{(1)} &= S(K_1 \cdots K_{n-3}) (-i K_{0, n-2}) \times \\ &\times \left(\frac{K_{n-1}^2 + K_{0, n-1}^2 + K_{0, n-1} K_{0, n-2}}{K_{n-2}} \right) \left(A_2 \frac{1}{K_{n-1}} + i A_1 \frac{K_{0, n-1}}{K_{n-1}} \right), \end{aligned}$$

这里第三个括号中含 K_{n-1}^2 及 $K_{0, n-1}^2$ 的项对于 $K_{0, n-2}$ 是奇的, 在我们的近似下可以略去. 略去此项以后, 可以看到, 含 A_2 的项对于 $K_{0, n-1}$ 是奇的, 也可以略去, 因而

$$I_{11}^{n-3} I_{12} I_{22} f^{(1)} = S \left(K_1 \cdots K_{n-3} \frac{K_{0, n-2}^2}{K_{n-2}} \frac{K_{0, n-1}^2}{K_{n-1}} A_1 \right).$$

这只是将两个 t 积分换成了

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{t} dt}{(1+t)^2},$$

因此也和 $I_{11}^{n-1} \varphi^{(1)}$ 有相同数值.

参 考 文 献

- [1] Lee, B. W. and Sawyer, R. F., *Phys. Rev.*, **127** (1962), 2266.
- [2] Sawyer, R. F., *Phys. Rev.*, **131** (1963), 1384.
- [3] Swift, A. R. and Lee, B. W., *Phys. Rev.*, **131** (1963), 1857.
- [4] Dyson, F. J., Ross, M., Salpeter, E. E., Schweser, S. S., Sundaresan, M. K., Visscher, W. M. and Bethe, H. A., *Phys. Rev.*, **95** (1954), 1644.
- [5] Wick, G. C., *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1124.

COMPLEX ANGULAR MOMENTUM IN π - N SCATTERING

LIU LIAN-SOU
(*Peking University*)

ABSTRACT

Sawyer's method of "summation of most singular terms" is applied to the case of π - N scattering. It is found that the leading singularity in the complex angular momentum is a fixed cut of the square root type. The high energy behaviour in the crossed channel is obtained.