第21卷 第1期 物 理 学 报 Vol. 21, No. 1
1965 年 1 月 ACTA PHYSICA SINICA January, 1965

最大解析性原理与 Regge 軌迹的若干性質*

殷鵬程 叶尤生 張春霆
(复旦大学物理系)

提 要

根据最大解析性原理，本文研究了 Regge 軌迹的某些性質. 証明了与各粒子对应的 Regge 軌迹在閾能以下是能量的单調增加函数，当 $t\to\pm\infty$ 时，每一軌迹的漸近极限是相同的. 特别当 $-t_0<t<0$ 时，真空 Regge 軌迹具有非綫性的特点，且在零点的斜率 $\alpha'_p(0)$ 应满足不等式 $\frac{1}{t_0}<\alpha'_p(0)<\frac{1}{4}$，其中 t_0 由 $\alpha_p(t=-t_0)=0$ 决定.

一、引 言

由 Regge 建立的复角动量的理論[1]及随后在相对論情况的推广[2]給研究基本粒子的強相互作用理論提供了有力的工具. 如所熟知，各种粒子所对应的 Regge 軌迹，对决定強相互作用粒子散射的衍射峯的形式、总截面随能量变化的趋势及粒子的質量譜起着重要的作用.

本文基于 Regge 軌迹的解析性質，利用函数逼近的方法，一般地探討了 Regge 軌迹的若干性質. 結果表明：与各种粒子对应的 Regge 軌迹均以能量在負无限大时的某一极限值出发，在閾能以下是能量的单調增加函数，然后經过极大値在能量为正无穷大时又趋向同一极限值. 进一步利用实驗事实对真空 Regge 軌迹分析表明：在能量为 $-50\mu^2<t<0$ 之間，α_p 并非是严格綫型的，并且在零点的斜率 $\alpha'_p(0)$ 应满足不等式 $\frac{1}{50}<\alpha'_p(0)<\frac{1}{4}$. 最后由真空 Regge 軌迹的虛部 $\mathrm{Im}\,\alpha_p$ 与相移的联系，得到在高能时相移以对数方式衰減比較合理的結論.

二、函数逼近法

根据最大解析性原理，我們可写出 Regge 軌迹所满足的色散关系：

$$\alpha(t)=\alpha(0)+\frac{t}{\pi}\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}(t')dt'}{t'(t'-t)}, \tag{1}$$

其中 $\alpha(t)$ 为任意玻色子所对应的 Regge 軌迹；t 为总能量的平方；Λ 为該軌迹的閾能；$\bar{\alpha}(t)$ 为 α 的虛部.

引入新变量

$$xt=\Lambda, \tag{2}$$

* 1963年8月16日收到.

則(1)式可化为

$$\alpha(t)=\alpha(0)-\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{\bar{\alpha}(x')dx'}{x'-x}. \tag{3}$$

$\bar{\alpha}(x)$ 具有下列性質：

(1) 連續性，卽当 $x\in[0,1]$ 时，$\bar{\alpha}(x)$ 几乎处处連續；

(2) 正定性，卽当 $x\in[0,1]$ 时，$\bar{\alpha}(x)\geqslant 0$；

(3) 閾行为，卽当 $x\to 1$ 时，$\bar{\alpha}(x)\to(1-x)^k$，其中 $k=\alpha(\Lambda)+\frac{1}{2}$[3].

(4) 漸近行为，卽当 $x\to 0$ 时，$\bar{\alpha}(x)\to 0$ 的形式不会比 $x^\lambda(\lambda>0)$ 更快（参見下面的討論）.

于是可令

$$\bar{\alpha}(x)=(1-x)^k x^\lambda f(x)\qquad x\in[0,1]. \tag{4}$$

显然 $f(x)$ 为 $[0,1]$ 区間上恆正的連續函数. 根据古典的瓦尔斯拉斯定理，多項式在連續函数空間稠密，因此我們可以利用多項式充分好地逼近 $f(x)$.

由此可将(4)式写为

$$\bar{\alpha}(x)=(1-x)^k x^\lambda\left[\sum_{n=0}^{N}a_n x^n\right], \tag{5}$$

其中 $x\in[0,1]$，$k>0$，$\lambda>0$，$a_0>0$. 代入(3)式，經积分可得

$$\alpha(t)=\alpha(0)+\frac{t}{\pi\Lambda}\sum_{n=0}^{N}a_n B(\lambda+n+1,k+1)F\left(1,\lambda+n+1,\lambda+k+n+2,\frac{t}{\Lambda}\right), \tag{6}$$

其中 B 为通常的 β 函数；F 为超几何函数.

(6)式給出了各种粒子对应的 Regge 軌迹的一般表示式. 利用 β 函数与超几何函数的性質，可推知它們具有下列共同的性質：

(1) 漸近值

$$\alpha(-\infty)=\alpha(+\infty)=\alpha(0)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N}a_n B(\lambda+n,k+1), \tag{7}$$

卽 Regge 軌迹在能量趋向正負无穷大时均趋向某一相同的极限，且这极限与閾能 Λ 无关. 特別对眞空 Regge 軌迹，实驗及理論的初步分析表明：

$$\alpha_p(-\infty)=\alpha_p(+\infty)=-1, \tag{8}$$

这正是(7)式所要求的結果.

(2) $\alpha(t)$ 对 t 的一級微商

$$\alpha'(t)=\frac{1}{\Lambda\pi}\sum_{n=0}^{N}a_n B(\lambda+n+1,k+1)F\left(2,\lambda+n+1,\lambda+k+n+2,\frac{t}{\Lambda}\right). \tag{9}$$

事实上，由(3)直接知，上式当 $t<\Lambda$ 时，$\alpha'(t)$ 恆大于零，卽在閾能以下，$\alpha(t)$ 是 t 的单調增加函数，这与势散射的結果完全一致.

其次，

$$\alpha'(\Lambda)=\frac{1}{\Lambda\pi}\sum_{n=0}^{N}a_n B(\lambda+n+1,k+1)F(2,\lambda+n+1,\lambda+n+k+2,1). \tag{10}$$

因为 $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ 当 $\gamma > \alpha + \beta$ 时收斂;当 $\gamma < \alpha + \beta$ 时发散. 所以当 $k > 1$, 即 $\alpha(\Lambda) > \frac{1}{2}$ 时, $\alpha'(\Lambda)$ 有限;当 $k < 1$, 即 $\alpha(\Lambda) < \frac{1}{2}$ 时, $\alpha'(\Lambda) \to \infty$. 这正是我們所需要的閾行为. 对真空 Regge 軌迹, $\alpha_p(\Lambda) \approx \alpha_p(0) + \Lambda\alpha_p'(0) \approx 1 \cdot 1 > \frac{1}{2}$, 故保証了閾附近 α_p 的一級微商为有限值.

由(9)式容易証明負閾能一級微商 $\alpha'(-\Lambda)$, 当 $k > 0$ 时总收斂. 此外显然有

$$\alpha'(\pm\infty) = 0. \tag{11}$$

因此由性質(1), (2)可知, Regge 軌迹一般地从能量为負无穷大时的某一极限值出发, 在閾能以下随能量增大单調地上升, 然后經过一个或几个极值在能量为正无穷大时又平稳地趋向与負无穷大时数值相同的极限值.

(3) 高級微商 $\alpha^{(m)}(t)$, $m \geqslant 2$

利用超几何函数的性質,易得

$$\alpha^{(m)}(t) = \frac{1}{\pi}\frac{(m+1)!}{\Lambda^m}\sum_{n=0}^{N} a_n B(\lambda+n+m+1,\ k+1) \times \\ \times F\left(2+m,\ \lambda+n+m+1,\ \lambda+k+n+m+2,\ \frac{t}{\Lambda}\right). \tag{12}$$

所以

当 $k > m+1$, 即 $\alpha(\Lambda) > m + \frac{1}{2}$ 时, $\alpha^{(m)}(\Lambda)$ 有限;

当 $k < m+1$, 即 $\alpha(\Lambda) < m + \frac{1}{2}$ 时, $\alpha^{(m)}(\Lambda) \to \infty$;

当 $k < m$, 即 $\alpha(\Lambda) < m - \frac{1}{2}$ 时, $\alpha^{(m)}(-\Lambda) \to \infty$;

当 $k > m$, 即 $\alpha(\Lambda) > m - \frac{1}{2}$ 时, $\alpha^{(m)}(-\Lambda)$ 有限.

对 $\alpha_p(t)$, 因 $k \approx 1.6$, 故 $\alpha_p^{(m)}(\pm\Lambda) \to \infty$, $m \geqslant 2$. 由(12)还易知

$$\alpha^{(m)}(\pm\infty) = 0.$$

(4) 零点微商数值的限制

由(7)式有

$$\alpha(0) - \alpha(\pm\infty) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N} a_n B(\lambda+n, k+1) \approx \\ \approx \frac{1}{\pi}\int_0^{N+1} a_n B(\lambda+n, k+1) dn \equiv G(N).$$

由(9)式有

$$\Lambda\alpha'(0) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{N} a_n B(\lambda+n,\ k+1)\frac{\lambda+n}{\lambda+k+n+1} \approx \\ \approx \frac{1}{\pi}\int_0^{N+1} a_n B(\lambda+n,\ k+1) f(n) dn,$$

其中 $f(n)$ 为

$$f(n) = \frac{\lambda+n}{\lambda+k+n+1}.$$

由分部积分有

$$\Lambda\alpha'(0) = G(N+1)\frac{N+1+\lambda}{N+2+k+\lambda} - G(0)\frac{\lambda}{1+k+\lambda} - \int_0^{N+1} G(n)f'(n)dn.$$

因为 $G(n) = \sum_{i=0}^{n} a_i B(\lambda+i, k+1) > 0$，并注意到 $f'(n) > 0$，令 $N \to \infty$，则有不等式

$$\Lambda\alpha'(0) < \alpha(0) - \alpha(\pm\infty)$$

或

$$0 < \alpha'(0) < \frac{\alpha(0) - \alpha(\pm\infty)}{\Lambda}. \tag{13}$$

三、眞空 Regge 軌迹

基于以上討論，本节着重分析眞空 Regge 軌迹的若干性質．对于高能行为，它将起着最重要的作用．

(1) 非綫性特点

通常认为，在 $-50\mu^2 \leqslant t \leqslant 0$ 时，$\alpha_p(t)$ 具有綫性关系

$$\alpha_p(t) = \alpha_p(0) + \alpha_p'(0)t \qquad -50\mu^2 \leqslant t \leqslant 0. \tag{14}$$

我們証明，在該能量范围，$\alpha_p(t)$ 不可能是严格綫型的，否則将与 $\bar{\alpha}(t)(4 < t < \infty)$ 的正定性相矛盾．

实际上因 $\alpha_p(0) = 1$，如(14)式成立，則导致当 $t = -t_0 = -1/\alpha_p'(0)$ 时，$\alpha_p(-t_0) = 0$，即等式

$$\int_4^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_p(t')dt'}{t'(t'+t_0)} = \alpha_p'(0)\pi \tag{15}$$

成立．

另外由(1)式直接对 t 求微商，应有等式

$$\int_4^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_p(t')dt'}{t'^2} = \alpha_p'(0)\pi. \tag{16}$$

由(15)与(16)式則要求等式

$$\int_4^{\infty} \left[\frac{t_0}{t'^2(t'+t_0)}\right] \bar{\alpha}_p(t')dt' = 0 \tag{17}$$

成立．上式因方括号中的量恆大于零，显然与 $\bar{\alpha}_p(t')$ 在积分区間中的正定性相矛盾．因此(14)式在所考虑的范围內并不成立，否則我們必須修正 $\alpha_p(t)$ 的最大解析性原理或在能量大于閾能时 $\alpha_p(t)$ 軌迹完全处于复角动量平面的上半平面的結論．

(2) 眞空 Regge 軌迹的零点斜率 $\alpha_p'(0)$

眞空 Regge 軌迹在 $t = 0$ 时的斜率是我們感兴趣的問題，它的数值与衍射峯的形状有着密切的关系．鉴于目前实驗沒有严格地測定，在文献中曾采用 1/40, 1/50, 1/60 等不同数值．

但从已有实驗事实知[4]：

$$\alpha_p(-50) = 0, \tag{18}$$

则由性质(1)有关系

$$\int_4^\infty \frac{50\bar{\alpha}_p(t')dt'}{(t'+50)t'} = \pi.$$

考虑到(16)式,等式

$$\int_4^\infty \left[\frac{50t'}{50+t'} - \frac{1}{\alpha_p'(0)}\right]\frac{\bar{\alpha}_p(t')}{t'^2}dt' = 0 \tag{19}$$

应成立.

由 $\bar{\alpha}_p(t')$ 正定性条件,要使上式成立,应存在不等式:

$$\min\left[\frac{50t'}{50+t'}\right] < \frac{1}{\alpha_p'(0)} < \max\left[\frac{50t'}{50+t'}\right] \qquad t' \in [4, \infty],$$

因此有

$$\frac{1}{50} < \alpha_p'(0) < \frac{27}{100} \approx \frac{1}{4}. \tag{20}$$

对其他 Regge 軌迹,以 $t = -t_0$ 記其零点的位置,那么 $\alpha(t = -t_0) = 0$, Λ 为其閾能,则其零点微商应满足相似的不等式

$$\frac{\alpha(0)}{t_0} < \alpha'(0) < \alpha(0)\left(\frac{1}{t_0} + \frac{1}{\Lambda}\right). \tag{21}$$

(3) $\alpha_p(t)$ 半經驗公式

利用实验事实,可以确定(6)式給出的 Regge 軌迹表达式中所包含的参数而給出半經驗公式. 下面取 $N = 1$, 则待定的参数是 a_0, a_1, λ. k 可取

$$k = \frac{1}{2} + \alpha_p(\Lambda) \approx \frac{1}{2} + \alpha_p(0) + \alpha_p'(0)\Lambda \approx 1.6. \tag{22}$$

利用 $\alpha_p(-\infty) = -1$ 及取 $\alpha_p'(0) = \frac{1}{40}$, 可得

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\pi}{10}\frac{19\lambda - k + 18}{B(\lambda, k+2)}, \\ a_1 &= \frac{\pi}{10}\frac{\lambda + k + 2}{B(\lambda, k+2)} \cdot \frac{k + 1 - 19\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \tag{23}$$

由(6)式經簡化,则 $\alpha_p(t)$ 的明显形式可写为

$$\begin{aligned} \alpha_p(t) = 1 &- \frac{1}{10(k+1)}[(\lambda + k + 1)(19\lambda - k + 18)F(1, -\lambda - k, 1 - \lambda, z^{-1}) + \\ &+ (\lambda + k + 2)(k + 1 - 19\lambda)F(1, -\lambda - k - 1, -\lambda, z^{-1})] + \\ &+ \frac{1}{\sin\pi\lambda}(1 - z^{-1})^k(-z)^{-\lambda}\left(a_0 + \frac{a_1}{z}\right), \end{aligned} \tag{24}$$

其中 $z = \frac{t}{4}$, 由于条件 $a_0 + a_1 \geqslant 0$, 则待定参数 λ 应满足关系

$$0 < \lambda < \frac{k^2 + 3k + 2}{19(k+1)} \approx 0.19. \tag{25}$$

其具体数値可由条件

$$\alpha_p(-50) = 0 \tag{26}$$

决定.

下表給出了 $\alpha_p(-50, \lambda)$ 的数值.

λ	0.1	0.01	0.001	$\to 0$
$\alpha_p(-50, \lambda)$	0.68	0.61	0.52	< 0

由此可見，对有限的 λ 值，(26) 式是很难被满足的，要使其成立，除非 λ 的数值眞正逼近于零. λ 的数值直接关系到 $\bar{\alpha}_p(t)$ 在 $t \to \infty$ 时衰減的速度. 对于任何有限的 λ 値，有关系

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\lambda}}{\ln t} \to \infty.$$

因此上列的結果表明，$\bar{\alpha}_p(t)$ 的漸近行为可能傾向于对数衰減.

由 Lovelace 公式[5]

$$\delta_l = -\arg\,[l - \alpha(t)]$$

得

$$\tan\delta_l = \frac{\operatorname{Im}\alpha(t)}{l - \operatorname{Re}\alpha(t)} = \frac{\bar{\alpha}(t)}{l - \operatorname{Re}\alpha(t)}, \tag{27}$$

卽 $\bar{\alpha}(t)$ 的高能漸近行为将直接关系到相移的高能漸近行为. 从我們上述的分析表明：相移在高能时，可能是傾向于以对数方式衰減的.

代替(5)式，我們可用下式逼近 $\bar{\alpha}_p(t)$：

$$\bar{\alpha}_p(x) = \frac{(1-x)^k}{(b - \ln x)^m}\left[\sum_{n=0}^{N} b_n x^n\right], \tag{28}$$

其中 $m > 1$ [为的要使 $\alpha_p(-\infty) = \alpha_p(+\infty)$]，$k > 0$，$b_0 > 0$.

不幸的是虚部与(28)式对应的 $\alpha_p(t)$ 不能写出其解析的表达式，因此也不能一般地討論其有关性質.

最后可以指出，不久前 Domokos[6] 用相似的方法企图得到眞空 Regge 軌迹的表达式，其中实际使用了 $\lambda \approx \frac{1}{2}$ 的漸近行为. 因此从我們上述的分析可以断定，它是不可能得到与实驗一致的結果的.

参　考　文　献

[1] Regge, T., *Nuovo Cim.*, **14** (1959), 951; **23** (1960), 947.
[2] Chew, G. F., et al., *Phys. Rev.*, **126** (1962), 1202; Frautschi, S. C., et al., *Phys. Rev.*, **126** (1962), 2204; Грибов, В. Н., *ЖЭТФ*, **41** (1961), 1962.
[3] Barut, A., et al., *Phys. Rev.*, **127** (1962), 974.
[4] Bakev, W. F., et al., *Phys. Rev. Lett.*, **9** (1962), 222.
[5] Lovelace, C., *Nuovo Cim.*, **25** (1962), 730.
[6] Domokos, G., *Nuovo Cim.*, **26** (1962), 1301.

THE PRINCIPLE OF MAXIMUM ANALYTICITY AND SOME PROPERTIES OF THE REGGE TRAJECTORIES

YIN PONG-CHENG YEH PENG-SHENG CHANG CHUN-TING

(Fu-Tai University, Shanghai)

ABSTRACT

Some properties of the Regge trajectories are investigated on the basis of the principle of maximum analyticity. It has been shown that the Regge trajectories corresponding to the different particles are monotonic increasing functions of energy below the threshold and the asymptotic limits of every trajectory are the same for $t \to \pm\infty$. In particular, the vacuum Regge trajectory has nonlinear feature when $-t_0 < t < 0$ and the slope at zero energy $\alpha'_p(0)$ must satisfy the inequatily $\frac{1}{t_0} < \alpha'_p(0) < \frac{1}{4}$ where t_0 is the value of t when $\alpha_p(-t_0) = 0$.