

# 希土离子对高功率铁磁共振的影响\*

鄭慶祺 賴武彥

## 提 要

本文利用关联函数方法(久保理论)来讨论高功率下铁磁共振中的非线性过程。对通常的铁磁晶体,目前的理论包含了由 H. Suhl 所发展起来的半经典理论的结果。对含希土离子的石榴石型铁氧体,给出了希土离子引起的自旋波的频率移动,附加的损耗,以及所谓纵向注入和横向注入的一级二级的非线性过程的临阈场。希土离子的存在使临阈场增大。一般而言,这一关系是很复杂的,但当希土离子含量很少的情形下,对临阈场的影响可归结为自旋波的损耗的增加,临阈场随温度的改变及各向异性完全与低功率下铁磁共振线宽的情况相似。对于现有的一些实验结果,理论作了定性的解释。

## 一、

1953 年 Damon<sup>[1]</sup> 及 Bloembergen 和 Wang<sup>[2]</sup> 在实验上观察到,当用大功率微波场作铁磁共振时,出现所谓次吸收峰和主共振峰的过早饱和等的铁磁共振非线性效应。其后 Suhl<sup>[3]</sup> 用自旋波的不稳定激发对这些现象作了解释。在这以后,高功率下的非线性效应在实验和理论上都得到了很大的发展(例如微波磁场与恒定磁场平行的所谓纵向注入的讨论,这一技术对研究弛豫机构有很重要的意义)。但大部分理论分析都采用半经典理论,这种方法是具有局限性的,有些工作企图利用求准粒子数目随时间的变化率的方法建立起非线性铁磁共振的量子理论<sup>[4]</sup>。但这些方法用来讨论必须考虑个别离子的特性的对象时,就有一定的困难。

最近,霍裕平和孟宪振<sup>[5]</sup> 利用久保的关联函数方法,给出了讨论希土离子对石榴石铁氧体线性铁磁共振的影响的量子理论。同样的方法可以利用来讨论非线性铁磁共振的量子理论。在最简单的情形下(只有一种磁性离子的简单铁磁体),理论退化为与半经典理论等价的形式。但是当涉及的弛豫机构不能简单地引用复数频率的办法来讨论时,半经典理论就必须用量子理论来代替。作为一个例子,我们考虑含少量希土杂质的钇石榴石铁氧体中希土离子对高功率铁磁共振特性的影响。我们讨论了希土离子引起的自旋波的频移及损耗,当微波场与恒定磁场平行时的一级过程及微波场与恒定磁场垂直时的次吸收峰现象(一级过程)和主峰过早饱和现象(二级过程)的临阈场。对所得的结果作了讨论,并与现有的实验资料作了比较。

## 二、

在希土石榴石铁氧体中,铁离子间的交换作用远大于希土离子与铁离子之间,或希土

\* 1964 年 6 月 22 日收到。

离子之间的作用, 因此可以认为, 希土离子是独立地与铁点阵发生耦合, 为简单起见, 我们将铁离子看成是分布在  $N$  个晶格上的铁磁性点阵,  $n$  个希土离子和钇离子无序地分布在另一个次点阵上并引入函数  $\epsilon_g$ , 当  $g$  位置上为希土离子时,  $\epsilon_g = 1$ , 否则为零. 今后限于讨论含少量希土离子的情形, 此时  $n \ll N$ . 设样品为对称轴沿  $z$  方向的旋转椭球体, 外加恒定场也在  $z$  轴方向. 不考虑铁点阵的磁晶各向异性作用, 因此  $z$  轴也是铁点阵自旋的量子化轴方向. 系统的哈密顿量可写成

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & - \sum_{ff'} \lambda_{ff'} \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{S}_{f'} + \sum_{ff'} D_{ff'} \left[ \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{S}_{f'} - \frac{3}{r_{ff'}^2} (\mathbf{S}_f \cdot \mathbf{r}_{ff'}) (\mathbf{S}_{f'} \cdot \mathbf{r}_{ff'}) \right] + \\ & + \sum_{fg} \lambda'_{fg} \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{J}_g \epsilon_g + \sum_f \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{S}_f) + \sum_g [V(\mathbf{J}_g) + \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{J}_g)] \epsilon_g + \\ & + \mathcal{H}(\mathbf{Q}) + H \left( \gamma \sum_f S_f^z + \gamma' \sum_g \mathbf{J}_g^z \epsilon_g \right) + h(t) \cos \theta \left( \gamma \sum_f S_f^z + \right. \\ & \left. + \gamma' \sum_g \mathbf{J}_g^z \epsilon_g \right) + h(t) \sin \theta \left( \gamma \sum_f S_f^x + \gamma' \sum_g \mathbf{J}_g^x \epsilon_g \right), \quad (1) \end{aligned}$$

其中右边分别为: 铁离子间的交换作用、偶极矩作用, 希土和铁离子间的交换作用、引起铁离子自旋弛豫的作用 (如不均匀性及和声子的作用)、晶场和声子对希土离子的作用, 声子能量及外磁场中能量. 当微波场与恒定磁场平行时  $\theta = 0$ , 垂直时  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $h(t) = h_0 \cos \omega t$ . 这里, 为简单起见, 我们没有考虑可能存在的各向异性交换作用, 也略去了较小的希土离子间的交换作用及偶极矩作用、晶场对铁离子的作用<sup>1)</sup>. 今后我们采用  $\hbar = 1$  的单位制.

限于温度不太高的情形. 此时可以用自旋波来表征铁点阵的状态, 为此作下列 Holstein-Primakoff 变换及富氏变换:

$$\left. \begin{aligned} S_f^+ & \simeq S \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{f}\cdot\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ - \frac{S}{8} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{f}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'}^+ a_{\mathbf{k}''}^+, \\ S_f^- & \simeq S \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{f}\cdot\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \frac{S}{8} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'\mathbf{k}''} e^{i(\mathbf{k}'+\mathbf{k}''-\mathbf{k})\cdot\mathbf{f}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}''}, \\ S_f^z & \simeq -S \left( 1 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{f}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^+] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ ;  $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = 0$ .  $\mathbf{k}$  取倒格子空间第一 Brillouin 区中的  $N$  个矢量. 由于  $a_{\mathbf{k}}$  很小, 只保留到四次方项. 经变换后的哈密顿量可写成<sup>2)</sup>

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2(t), \quad (3)$$

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_{01} + \mathcal{H}_{02} + \sum_g \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{J}_g) \epsilon_g + \sum_f \mathcal{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{S}_f), \quad (4)$$

- 1) 正如文献[5]中所表明的, 各向异性交换作用的考虑原则上没有什么困难, 主要定性结论也不改变.
- 2) 经变换(2)后, 对偶极作用能的计算采用了与 Holstein-Primakoff<sup>[6]</sup>所用的同样近似. 应该指出, 按此近似导出的哈密顿量(3)–(6)只适用于  $1/k$  远比样品线度小的情形. 反之就须考虑到边界影响. 但严格计算此影响是非常困难的课题. 在自旋波的空间变化非常缓慢 (相当  $k \approx 0$ ) 的情形, 对椭球体 Walker<sup>[7]</sup>作过分析. 此时的自旋状态应用所谓 Walker 模来描述. 因此我们的频谱在  $k \approx 0$  的情形不正确, 应代之以 Walker 模.

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{01} &= \gamma[H - M(N_x - N_t)]a_0^+ a_0 + \sum_{\mathbf{k}}' \left\{ [\gamma H + 2S(\lambda(0) - \lambda(\mathbf{k})) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \gamma M (N_x - N_t) - \frac{4\pi}{3} \gamma M + 2\pi\gamma M \sin^2 \theta_k] a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \right. \\ &\quad \left. + \pi\gamma M \sin^2 \theta_k (e^{i2\varphi_k} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + e^{-i2\varphi_k} a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^+) \right\} + \frac{n}{N} \langle J_x \rangle_0 \lambda'(0) \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}, \\ \mathcal{H}_{02} &= \sum_{\mathbf{g}} V(\mathbf{J}_{\mathbf{g}}) \epsilon_{\mathbf{g}} + \gamma' H \sum_{\mathbf{g}} \mathbf{J}_{\mathbf{g}}^z \epsilon_{\mathbf{g}} - \frac{\lambda'(0)}{N} \left( S - \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \rangle_0 \right) \sum_{\mathbf{g}} \mathbf{J}_{\mathbf{g}}^z \epsilon_{\mathbf{g}} + \\ &\quad + \mathcal{H}(Q), \\ \mathcal{H}_1 &= \mathcal{H}_{11} + \mathcal{H}_{12}. \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{11} &= \sqrt{\frac{2S}{N}} \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'}' \frac{2\pi\gamma M}{S} \cos \theta_k \sin \theta_{k'} \{ e^{i\varphi_k} a_{\mathbf{k}'}^+ a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} + e^{-i\varphi_k} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'} \} - \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \left[ \lambda(0) - \frac{\gamma M}{3S} (N_x - N_t) \right] a_{\mathbf{k}'}^+ a_{\mathbf{k}''}^+ a_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}''} - \\ &\quad - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \left[ \lambda(\mathbf{k}) - \frac{4\pi}{3S} \gamma M + \frac{2\pi}{S} \gamma M \sin^2 \theta_k \right] a_{\mathbf{k}'}^+ a_{\mathbf{k}''}^+ a_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}} + \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left[ \lambda(0) - \frac{\gamma M}{6S} (N_x - N_t) \right] (a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'} a_0 + a_0^+ a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}) + \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \left[ \lambda(\mathbf{k}) + \frac{2\pi\gamma M}{3S} - \frac{\pi\gamma M}{S} \sin^2 \theta_k \right] (a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^+ a_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}^+ a_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}} + \\ &\quad + a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}''}^+ a_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} - \\ &\quad - \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}}' \sum_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''} \frac{\pi\gamma M}{S} \sin^2 \theta_k \{ e^{i2\varphi_k} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''}^+ a_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}} + \\ &\quad + e^{-i2\varphi_k} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}''}^+ a_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}''} a_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''} \}, \\ \mathcal{H}_{12} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2S}{N}} \sum_{\mathbf{g}\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \epsilon_{\mathbf{g}} (a_{-\mathbf{k}}^+ J_{\mathbf{g}}^- + a_{\mathbf{k}} J_{\mathbf{g}}^+) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} + \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}'} J_{\mathbf{g}}^z e^{i(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\cdot\mathbf{g}} - \\ &\quad - \frac{n}{N} \langle J_x \rangle_0 \lambda(0) \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} - \frac{\lambda'(0)}{N} \sum_{\mathbf{k}} \langle a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} \rangle_0 \sum_{\mathbf{g}} \mathbf{J}_{\mathbf{g}}^z \epsilon_{\mathbf{g}}, \\ \mathcal{H}_2(t) &= \frac{\gamma \sin \theta}{2} \sqrt{2SN} (a_0 + a_0^+) h(t) + \gamma \cos \theta h(t) \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}} + \\ &\quad + \gamma' h(t) \sum_{\mathbf{g}} \left[ \cos \theta J_{\mathbf{g}}^z + \frac{\sin \theta}{2} (J_{\mathbf{g}}^+ + J_{\mathbf{g}}^-) \right] \epsilon_{\mathbf{g}}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $M = \gamma NS$  为总磁化强度;  $N_x$  为  $z$  方向退磁因子;  $N_t$  为横向退磁因子.  $\lambda(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{f}-\mathbf{f}'} \lambda_{\mathbf{f}-\mathbf{f}'} e^{i(\mathbf{f}-\mathbf{f}')\cdot\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{k} \equiv (k, \theta_k, \varphi_k)$ ,  $\sum_{\mathbf{k}}'$  表示对  $\mathbf{k}$  求和时  $\mathbf{k}=\mathbf{0}$  应除外,  $\langle A \rangle_0 = \text{Sp}(A\rho_0)$ ,  $\rho_0 = \frac{1}{\text{Sp}(e^{-\beta\mathcal{H}_0})} e^{-\beta\mathcal{H}_0}$ ,  $\beta = \frac{1}{kT}$ . 我们将  $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2(t)$  看成是微扰. 作下列变换, 使

$\mathcal{H}_a$  对角綫化:

$$\left. \begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= \sqrt{\frac{NS}{2}} (u_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger}), \\ a_{-\mathbf{k}}^{\dagger} &= \sqrt{\frac{NS}{2}} (u_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger} - v_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中算符  $b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger}$  满足  $[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \frac{2}{NS} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  及  $[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = 0$ , 并有

$$\left. \begin{aligned} u_{\mathbf{k}} &= u_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}^* = \cosh \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2}, \quad v_{\mathbf{k}} = v_{-\mathbf{k}} = \sinh \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2} e^{-i2\varphi_{\mathbf{k}}} \quad \mathbf{k} \neq 0, \\ u_0 &= 1, \quad v_0 = 0, \\ \sinh \xi_{\mathbf{k}} &= \frac{2\pi\nu M \sin^2 \theta_{\mathbf{k}}}{\omega(\mathbf{k})} = L_1(\mathbf{k})/\omega(\mathbf{k}), \\ \cosh \xi_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{\omega(\mathbf{k})} \left\{ \gamma H + \frac{n}{N} \langle J_x \rangle_0 \lambda'(0) + 2S[\lambda(0) - \lambda(\mathbf{k})] - \right. \\ &\quad \left. - \gamma M N_x + 2\pi\gamma M \sin^2 \theta_{\mathbf{k}} \right\} = \frac{L(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k})}, \\ \omega(\mathbf{k}) &= \{L(\mathbf{k})^2 + L_1(\mathbf{k})^2\}^{1/2}, \\ \omega_0 &= \gamma \left[ H + \frac{n}{N\gamma} \langle J_x \rangle_0 \lambda'(0) - M(N_x - N_t) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

变换后

$$\mathcal{H}_a = \frac{NS}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}}. \quad (9)$$

我們用引入弛豫频率  $\eta_{\mathbf{k}}$  的办法来近似地代表  $\mathcal{H}_0$  中  $\sum_{\mathbf{f}} \mathcal{H}(QS_{\mathbf{f}})$  这一部分作用能所給的弛豫效应. 在这样的近似下, 今后在  $\mathcal{H}_0$  中可以略去  $\sum_{\mathbf{f}} \mathcal{H}(QS_{\mathbf{f}})$  的項, 而将自旋波的频率  $\omega_{\mathbf{k}}$  改成复数频率  $\omega_{\mathbf{k}} + i\eta_{\mathbf{k}}$ . 这种处理方法和以后我們对关联函数所采用的近似(与文献[5]相同)是等价的. 而且正如实验材料所表明的, 这些弛豫效应与希土离子所引起的相比是小一到二个数量級, 在今后我們的討論中实际上是不重要的. 在这样的近似下就有

$$\left. \begin{aligned} \tilde{b}_{\mathbf{k}}(t) &= e^{i\varphi_0 t} b_{\mathbf{k}} e^{-i\varphi_0 t} \simeq e^{-i(\omega_{\mathbf{k}} - i\eta_{\mathbf{k}})t} b_{\mathbf{k}}, \\ \tilde{b}_{-\mathbf{k}}^{\dagger}(t) &= e^{i\varphi_0 t} b_{-\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-i\varphi_0 t} \simeq b_{-\mathbf{k}}^{\dagger} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + i\eta_{\mathbf{k}})t}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

经过前面所作变换后,  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2(t)$  的形式是很复杂的, 但对于纵向注入的一級过程, 由于自旋波直接被場所激发, 因此我們可以略去  $\mathcal{H}_1$  中含两个以上的  $a_{\mathbf{k}}$  (或  $a_{-\mathbf{k}}^{\dagger}$ ) 算符的項; 对于横向注入的一二級过程, 由于自旋波是通过一致进动激发, 我們和 Suhl 一样, 只考虑  $0-\mathbf{k}$  作用, 同时还略去含高频場的高次效应[含  $h(t)$  与二个以上的  $a_{\mathbf{k}}$  的乘积的項]. 在这样的近似下,  $\mathcal{H}_1$  和  $\mathcal{H}_2$  的形式可以大为簡化. 但以后我們的計算中要用到的是  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  与算符  $b_{\mathbf{k}}, b_{-\mathbf{k}}^{\dagger}, J_+, J_-, J_x$  的对易关系式. 经过直接的, 但是較繁的計算后, 在上述近似下, 这些对易关系为

$$\begin{aligned}
[b_{\mathbf{k}}, \mathcal{H}_1] = & - \left\{ \left[ \frac{\omega_M}{2} \frac{k_x}{k^2} (k_- b_0^+ + k_+ b_0) + L_2(k) b_0^+ b_0 - \right. \right. \\
& - \frac{\omega_M}{16} (k_-^2 b_0^+ b_0^+ + k_+^2 b_0 b_0) \left. \right] (u_k^2 + |v_k|^2) - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_+}{k^2} b_0^+ - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_+^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0^+ b_0^+ \right) u_k v_k - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_-}{k^2} b_0 - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_-^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0 b_0 \right) u_k v_k^* \left. \right\} b_{\mathbf{k}}^+ + \\
& + \left\{ \left[ \frac{\omega_M}{2} \frac{k_x}{k^2} (k_+ b_0 + k_- b_0^+) + L_2(k) b_0^+ b_0 - \right. \right. \\
& - \frac{\omega_M}{16 k^2} (k_-^2 b_0^+ b_0^+ + k_+^2 b_0 b_0) \left. \right] 2 u_k v_k^* - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_+}{k^2} b_0^+ - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_+^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0^+ b_0^+ \right) u_k^2 - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_-}{k^2} b_0 - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_-^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0 b_0 \right) v_k^{*2} \left. \right\} b_{\mathbf{k}} - \\
& - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} (u_k J_{\mathbf{g}}^+ - v_k^* J_{\mathbf{g}}^-) - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{g}\mathbf{k}'} \lambda'(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) J_{\mathbf{g}}^z [(u_k u_{\mathbf{k}'} + \\
& + v_k^* v_{\mathbf{k}'}) b_{\mathbf{k}'}^+ - (u_k v_{\mathbf{k}'}^* + u_{\mathbf{k}'} v_k^*) b_{\mathbf{k}'}] e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\cdot\mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} + \\
& + \frac{n \langle J_z \rangle_0}{N} \lambda'(0) [(u_k^2 + |v_k|^2) b_{\mathbf{k}}^+ - 2 u_k v_k^* b_{\mathbf{k}}], \tag{11.1}
\end{aligned}$$

$$[b_{\mathbf{k}}, \mathcal{H}_2] = -\omega_s \cos \theta (u_k^2 + |v_k|^2) b_{\mathbf{k}}^+ + 2\omega_s \cos \theta u_k v_k^* b_{\mathbf{k}}, \tag{11.2}$$

$$\begin{aligned}
[b_{\mathbf{k}}, \mathcal{H}_1] = & \left\{ \left[ \frac{\omega_M}{2} \frac{k_x}{k^2} (k_- b_0^+ + k_+ b_0) + L_2(k) b_0^+ b_0 - \right. \right. \\
& - \frac{\omega_M}{16} (k_-^2 b_0^+ b_0^+ + k_+^2 b_0 b_0) \left. \right] (u_k^2 + |v_k|^2) - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_-}{k^2} b_0 - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_-^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0 b_0 \right) u_k v_k^* - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_+}{k^2} b_0^+ - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_+^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0^+ b_0^+ \right) u_k v_k \left. \right\} b_{\mathbf{k}} - \\
& - \left\{ \frac{\omega_M}{2} \frac{k_x}{k^2} (k_- b_0^+ + k_+ b_0) + L_2(k) b_0^+ b_0 - \right. \\
& - \frac{\omega_M}{16 k^2} (k_-^2 b_0^+ b_0^+ + k_+^2 b_0 b_0) \left. \right] 2 u_k v_k - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_-}{k^2} b_0 - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_-^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0 b_0 \right) u_k^2 - \\
& - \left( \omega_M \frac{k_x k_+}{k^2} b_0^+ - \frac{\omega_M}{4} \frac{k_+^2}{k^2} b_0^+ b_0 + L_4(k) b_0^+ b_0^+ \right) v_k^2 \left. \right\} b_{\mathbf{k}}^+ + \\
& + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} (u_k J_{\mathbf{g}}^- - v_k J_{\mathbf{g}}^+) \epsilon_{\mathbf{g}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}'} \lambda'(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{g}} J_{\mathbf{g}}^z [(u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}^*) b_{\mathbf{k}'} - \\
& - (u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} + u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^+] \epsilon_{\mathbf{g}} - \\
& - \frac{n \langle J_x \rangle_0}{N} \lambda'(0) [(u_{\mathbf{k}}^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) b_{\mathbf{k}} - 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+], \quad (11.3)
\end{aligned}$$

$$[b_{\mathbf{k}}, \mathcal{H}_2] = \omega_s \cos \theta (u_{\mathbf{k}}^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) b_{\mathbf{k}} - 2\omega_s \cos \theta u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^+. \quad (11.4)$$

一致进动的运动方程中的对易关系式并不是上式在  $\mathbf{k} = 0$  的特殊情形。它们稍有不同，这是由于我们所用的近似所引起的。

$$\begin{aligned}
[b_0^+, \mathcal{H}_1] &= -\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(0) J_{\mathbf{g}}^+ - \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}' \mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}') J_{\mathbf{g}}^z (u_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}'}^+ - v_{\mathbf{k}'}^* b_{\mathbf{k}'}) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} + \\
& + \frac{n \langle J_x \rangle_0}{N} \lambda'(0) b_0^+ - \frac{\omega_M}{2S} \sqrt{\frac{2S}{N}} \sum_{\mathbf{k}}' \frac{k_x}{k^2} (k_- a_{\mathbf{k}}^+ a_{-\mathbf{k}}^+ + k_+ a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}) + \dots, \quad (11.5)
\end{aligned}$$

$$[b_0^+, \mathcal{H}_2] = -(\omega_s \sin \theta + \omega_s \sin \theta b_0^+), \quad (11.6)$$

$$\begin{aligned}
[b_0, \mathcal{H}_1] &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(0) J_{\mathbf{g}}^- + \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}' \mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}') J_{\mathbf{g}}^z (u_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'} - v_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}'}^+) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} - \\
& - \frac{n \langle J_x \rangle_0}{N} \lambda'(0) b_0 + \frac{\omega_M}{2S} \sqrt{\frac{2S}{N}} \sum_{\mathbf{k}}' \frac{k_x}{k^2} (k_+ a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + k_- a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}}) + \dots, \quad (11.7)
\end{aligned}$$

$$[b_0, \mathcal{H}_2] = \omega_s \sin \theta + \omega_s \cos \theta b_0. \quad (11.8)$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{J}_+(\tau), \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2] &= \omega_s' \{ \cos \theta [\tilde{J}_+(\tau), J_x] + \\
& + \frac{\sin \theta}{2} ([\tilde{J}_+(\tau), J_+] + [\tilde{J}_+(\tau), J_-]) \} + \\
& + \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ ([\tilde{J}_+(\tau), J_-] u_{\mathbf{k}} - [\tilde{J}_+(\tau), J_+] v_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^+ + \\
& + ([\tilde{J}_+(\tau), J_+] u_{\mathbf{k}} - [\tilde{J}_+(\tau), J_-] v_{\mathbf{k}}^*) b_{\mathbf{k}} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} + \\
& + \frac{S}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k} \mathbf{k}' \\ \mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq 0}} \lambda'(\mathbf{k} + \mathbf{k}') [\tilde{J}_+(\tau), J_x] [u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}'}^+ - \\
& - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}'}^+ - v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}] e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}}, \quad (11.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{J}_-(\tau), \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2] &= \omega_s' \{ \cos \theta [\tilde{J}_-(\tau), J_x] + \\
& + \frac{\sin \theta}{2} ([\tilde{J}_-(\tau), J_-] + [\tilde{J}_-(\tau), J_+]) \} + \\
& + \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ (u_{\mathbf{k}} [\tilde{J}_-(\tau), J_+] - [\tilde{J}_-(\tau), J_-] v_{\mathbf{k}}^*) b_{\mathbf{k}} + \\
& + ([\tilde{J}_-(\tau), J_-] u_{\mathbf{k}} - [\tilde{J}_-(\tau), J_+] v_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^+ \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} + \\
& + \frac{S}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k} \mathbf{k}' \\ \mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq 0}} \lambda'(\mathbf{k} + \mathbf{k}') [\tilde{J}_-(\tau), J_x] [u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}}^+ b_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}} b_{-\mathbf{k}'}^+ - \\
& - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'} b_{-\mathbf{k}}^+ b_{-\mathbf{k}'}^+ - v_{\mathbf{k}}^* u_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}] e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}} \quad (11.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\tilde{J}_x(\tau), \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2] &= \omega_s' \{ \cos \theta [\tilde{J}_x(\tau), J_x] + \\
& + \frac{\sin \theta}{2} ([\tilde{J}_x(\tau), J_+] + [\tilde{J}_x(\tau), J_-]) \} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{([\tilde{J}_x(\tau), J_+]u_{\mathbf{k}} - [\tilde{J}_x(\tau), J_-]v_{\mathbf{k}}^*)b_{\mathbf{k}} + \\
& + ([\tilde{J}_x(\tau), J_-]u_{\mathbf{k}} - [\tilde{J}_x(\tau), J_+]v_{\mathbf{k}})b_{\mathbf{k}}^{\pm}\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} + \\
& + \frac{S}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \\ \mathbf{k}+\mathbf{k}'\neq 0}} \lambda'(\mathbf{k}+\mathbf{k}') [\tilde{J}_x(\tau), J_x] [u_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}'}b_{-\mathbf{k}}^{\pm}b_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}}^*v_{\mathbf{k}'}b_{\mathbf{k}}b_{-\mathbf{k}'}^{\pm} - \\
& - v_{\mathbf{k}}^*u_{\mathbf{k}'}b_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}'} - u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}'}b_{-\mathbf{k}}^{\pm}b_{-\mathbf{k}'}^{\pm}] e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{g}}, \tag{11.11}
\end{aligned}$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
\omega_s &= \frac{\gamma h_0}{2}, \quad \omega_s' = \frac{\gamma' h_0}{2}, \quad \omega_M = 4\pi\gamma M, \quad k_{\pm} = k_x \pm ik_y, \\
L_2(k) &= \frac{1}{2} \left[ \gamma M (N_x - N_t) + \omega_M \left( \cos^2 \theta_k - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_k \right) \right], \\
L_4(k) &= \frac{1}{2} \left[ S(\lambda(0) - \lambda(\mathbf{k})) - \frac{\gamma M}{2} N_t + \omega_M \left( \cos^2 \theta_k - \frac{1}{4} \sin^2 \theta_k \right) \right].
\end{aligned} \right\} \tag{12}$$

### 三、

由久保理論得到任一力学量算符  $A$  在  $t$  时刻的統計平均值为<sup>[5,9]</sup>

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle_t &\equiv \text{Sp}(A\rho(t)) = \text{Sp}(A\rho(0)) - i \int_0^t \text{Sp} \{ [\tilde{A}(\tau), \mathcal{H}_1 + \\
& + \mathcal{H}_2(t-\tau)] \rho(t-\tau) \} d\tau, \tag{13}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= e^{-\beta\mathcal{H}(t)} / \text{Sp} \{ e^{-\beta\mathcal{H}(t)} \}, \quad \rho_0 = e^{-\beta\mathcal{H}_0} / \text{Sp} \{ e^{-\beta\mathcal{H}_0} \}, \\
\tilde{A}(t) &= e^{i\mathcal{H}_0 t} A e^{-i\mathcal{H}_0 t}, \quad \mathcal{H}_2(t-\tau) = \mathcal{H}_2 \times (e^{i\omega(t-\tau)} + e^{-i\omega(t-\tau)}).
\end{aligned}$$

对于横向注入的情形, 式(13)的右边出现有几个算符的乘积的統計平均值  $\text{Sp} \{ ABC \cdots \rho(t) \}$ , 我們引用下列截断近似<sup>1)</sup>:

$$\text{Sp}(b_{\mathbf{k}} A \rho(t)) \simeq \text{Sp}(b_{\mathbf{k}} \rho(t)) \text{Sp}(A \rho(t)), \tag{14.1}$$

其中  $A$  代表  $b$  或  $J$  算符:

$$\begin{aligned}
\text{Sp}([\tilde{J}_x(\tau), J_x^{\beta}] b_{\mathbf{k}} \rho(t)) &\simeq \text{Sp}([\tilde{J}_x(\tau), J_x^{\beta}] \rho(t)) \text{Sp}(b_{\mathbf{k}} \rho(t)) \simeq \\
&\simeq \text{Sp}([\tilde{J}_x(\tau), J_x^{\beta}] \rho_0) \text{Sp}(b_{\mathbf{k}} \rho(t)). \tag{14.2}
\end{aligned}$$

由(13)式可以求得  $b_{-\mathbf{k}}^{\pm}, b_{\mathbf{k}}, \cdots$  等算符的平均值所满足的方程, 引入富氏变换

$$\langle A \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} \langle A \rangle_{\Omega} e^{i\Omega t} d\Omega, \quad \langle A \rangle_{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle A \rangle_t e^{-i\Omega t} dt,$$

就可以得到富氏分量所满足的方程組。例如对算符  $b_{-\mathbf{k}}^{\pm}$ , 利用式(10), (13)及上述富氏变换, 我們有

1) 我們所用的近似和通常双时格林函数中所作的截断近似<sup>[10]</sup>很相似, 但通常格林函数方法讨论共振时, 只考虑了对高频場的一级响应[相当于(13)式右边的  $\rho(t)$  变成了  $\rho_0$ ], 但目前所讨论的非线性效应不是有限级响应所能表征的, 因而用通常的办法无法讨论。对于(14.2)形式的截断近似, 在文献[5]中已有估计; 由于项太多, 对近似(14.1)的估计较困难, 但在简单情形下退化为经典理论的结果来看, 这样的近似可能不会带来很严重的误差。

$$\begin{aligned}
\langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_{\Omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega t} \langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_t dt = \langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_0 \delta(\Omega) - \\
&- \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \{ \langle [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_1] \rangle_{\Omega'} + \langle [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_2] \rangle_{\Omega'} (e^{i\omega(t-\tau)} + \\
&+ e^{-i\omega(t-\tau)}) \} \times e^{-i\Omega t} e^{-i\Omega'(t-\tau)} e^{i(\omega_{\mathbf{k}} + i\eta_{\mathbf{k}})\tau} = \\
&= \langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_0 \delta(\Omega) - \frac{1}{\Omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\eta_{\mathbf{k}}} \{ \langle [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_1] \rangle_{\Omega} + \langle [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_2] \rangle_{\Omega-\omega} + \\
&+ \langle [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_2] \rangle_{\Omega+\omega} \},
\end{aligned}$$

其中  $\langle [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_{1,2}] \rangle_{\Omega}$  为  $\langle [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_{1,2}] \rangle_t \equiv \text{Sp} \{ [b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_{1,2}] \rho(t) \}$  的富氏分量. 在  $[b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm}, \mathcal{H}_{1,2}]$  中出现有二个或三个算符的乘积项, 按切斯近似(14.1), 这种乘积项的  $t$  时刻平均值变成诸算符的平均值的乘积. 众所周知, 若函数  $A(t) = A_1(t)A_2(t)$ , 则它们的富氏分量间有关系

$$A(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\Omega') A_2(\Omega - \Omega') d\Omega'.$$

同样, 若  $A(t) = A_1(t)A_2(t)A_3(t)$ , 则有

$$A(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega'' A_1(\Omega') A_2(\Omega'') A_3(\Omega - \Omega' - \Omega'').$$

利用这些关系及(11.1), (11.2)式, 就得到

$$\begin{aligned}
-(\Omega - \omega_{\mathbf{k}} - i\eta_{\mathbf{k}}) \langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_{\Omega} &= \omega_s \cos \theta 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\omega} - \\
&- \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} (u_{\mathbf{k}} \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega} - v_{\mathbf{k}}^* \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega}) \epsilon_{\mathbf{g}} + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \omega_M \frac{k_{\mathbf{g}}}{k^2} u_{\mathbf{k}} (k_- v_{\mathbf{k}}^* - k_+ u_{\mathbf{k}}) \langle b_0^+ \rangle_{\Omega'} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\Omega'} d\Omega' - \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega'' \{ L_2(k) (u_{\mathbf{k}}^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) + \frac{\omega_M}{4k^2} u_{\mathbf{k}} (k_-^2 v_{\mathbf{k}}^* + \\
&+ k_+^2 v_{\mathbf{k}}) \langle b_0^+ \rangle_{\Omega'} \langle b_0 \rangle_{\Omega''} \langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_{\Omega-\Omega'-\Omega''} \} - \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega'' \left( \frac{\omega_M}{8k^2} k_-^2 u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* + L_4(k) u_{\mathbf{k}} \right) \langle b_0^+ \rangle_{\Omega'} \langle b_0^+ \rangle_{\Omega''} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\Omega'-\Omega''} - \\
&- \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{k}'=\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \{ (u_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}'} + v_{\mathbf{k}}^* v_{\mathbf{k}'}) \langle b_{\pm \mathbf{k}'}^{\pm} \rangle_{\Omega-\Omega'} - \\
&- (u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}'}^* + u_{\mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}^*) \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\Omega'} \} (\langle J_{\mathbf{g}}^z \rangle_{\Omega'} - \langle J_{\mathbf{g}} \rangle_0 \delta(\Omega')).
\end{aligned} \tag{15.1}$$

同样可以得到

$$\begin{aligned}
-(\Omega + \omega_{\mathbf{k}} - i\eta_{\mathbf{k}}) \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} &= -\omega_s \cos \theta 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_{\Omega+\omega} + \\
&+ \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} (u_{\mathbf{k}} \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega} - v_{\mathbf{k}} \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega}) - \\
&- \int_{-\infty}^{\infty} \omega_M \frac{k_{\mathbf{g}}}{k^2} u_{\mathbf{k}} (k_+ v_{\mathbf{k}} - k_- u_{\mathbf{k}}) \langle b_0 \rangle_{\Omega'} \langle b_{\pm \mathbf{k}}^{\pm} \rangle_{\Omega-\Omega'} d\Omega' + \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega'' \{ L_2(k) (u_{\mathbf{k}}^2 + |v_{\mathbf{k}}|^2) + \frac{\omega_M}{4k^2} (k_-^2 u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^* + \\
&+ k_+^2 u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}) \} \langle b_0^+ \rangle_{\Omega'} \langle b_0 \rangle_{\Omega''} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\Omega'-\Omega''} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega'' \left( \frac{\omega_M}{8k^2} k^2 u_k v_k + L_4(k) u_k^2 \right) \langle b_0 \rangle_{\Omega'} \langle b_0 \rangle_{\Omega''} \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega' - \Omega''} + \\
& + \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega' \{ (u_k u_{k'} + v_k v_{k'}^*) \langle b_{\mathbf{k}'} \rangle_{\Omega - \Omega'} - \\
& - (u_k v_{k'} + u_{k'} v_k) \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega'} \} (\langle J_{\mathbf{g}}^{\pm} \rangle_{\Omega'} - \langle J_{\mathbf{g}} \rangle_0 \delta(\Omega')), \quad (15.2)
\end{aligned}$$

$$- (\Omega - \omega_0 - i\eta_0) \langle b_0^{\pm} \rangle_{\Omega} = -\omega_s \sin \theta \delta(\Omega - \omega) - \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(0) \langle J_{\mathbf{g}}^{\pm} \rangle_{\Omega}, \quad (15.3)$$

$$- (\Omega + \omega_0 - i\eta_0) \langle b_0 \rangle_{\Omega} = \omega_s \sin \theta \delta(\Omega + \omega) + \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(0) \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega}, \quad (15.4)$$

$$\begin{aligned}
\langle J_{\mathbf{g}}^{\pm} \rangle_{\Omega} = & -\omega_s' \left\{ \cos \theta u_{13}(\Omega) + \frac{\sin \theta}{2} (u_{12}(\Omega) + u_{11}(\Omega)) \right\} (\delta(\omega + \Omega) + \delta(\omega - \Omega)) - \\
& - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_{11}(\Omega) u_k - u_{12}(\Omega) v_k] \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega} + \\
& + [u_{12}(\Omega) u_k - u_{11}(\Omega) v_k^*] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} - \\
& - \frac{S}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq 0 \\ \mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq 0}} \lambda'(\mathbf{k} + \mathbf{k}') u_{13}(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \{ u_k u_{k'} \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{\mathbf{k}'} \rangle_{\Omega'} + \\
& + v_k^* v_{k'} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{-k'}^{\pm} \rangle_{\Omega'} - u_k v_{k'} \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{-k'}^{\pm} \rangle_{\Omega'} - \\
& - v_k^* u_{k'} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{\mathbf{k}'} \rangle_{\Omega'} \} d\Omega' \times e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}}, \quad (15.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega} = & -\omega_s' \left\{ \cos \theta u_{23}(\Omega) + \frac{\sin \theta}{2} (u_{22}(\Omega) + u_{21}(\Omega)) \right\} (\delta(\omega + \Omega) + \\
& + \delta(\omega - \Omega)) - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_{22}(\Omega) u_k - u_{21}(\Omega) v_k^*] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} + \\
& + [u_{21}(\Omega) u_k - u_{22}(\Omega) v_k] \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} - \\
& - \frac{S}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq 0 \\ \mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq 0}} \lambda'(\mathbf{k} + \mathbf{k}') u_{23}(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \{ u_k u_{k'} \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{\mathbf{k}'} \rangle_{\Omega'} + \\
& + v_k^* v_{k'} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{-k'}^{\pm} \rangle_{\Omega'} - v_k^* u_{k'} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{\mathbf{k}'} \rangle_{\Omega'} - \\
& - u_k v_{k'} \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{-k'}^{\pm} \rangle_{\Omega'} \} d\Omega' \cdot e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}}, \quad (15.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle J_{\mathbf{g}}^{\pm} \rangle_{\Omega} = & -\omega_s' \left\{ \cos \theta u_{33}(\Omega) + \frac{\sin \theta}{2} (u_{32}(\Omega) + u_{31}(\Omega)) \right\} (\delta(\omega - \Omega) + \\
& + \delta(\omega + \Omega)) - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_{32}(\Omega) u_k - u_{31}(\Omega) v_k^*] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} + \\
& + [u_{31}(\Omega) u_k - u_{32}(\Omega) v_k] \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} - \\
& - \frac{S}{2} \sum_{\substack{\mathbf{k} + \mathbf{k}' \neq 0 \\ \mathbf{k}, \mathbf{k}' \neq 0}} \lambda'(\mathbf{k} + \mathbf{k}') u_{33}(\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} \{ u_k u_{k'} \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{\mathbf{k}'} \rangle_{\Omega'} + \\
& + v_k^* v_{k'} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{-k'}^{\pm} \rangle_{\Omega'} - v_k^* u_{k'} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{\mathbf{k}'} \rangle_{\Omega'} - \\
& - u_k v_{k'} \langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega - \Omega'} \langle b_{-k'}^{\pm} \rangle_{\Omega'} \} d\Omega' \times e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{g}}. \quad (15.7)
\end{aligned}$$

在(15.1)–(15.7)式中,我們近似地認為  $\langle J_{\mathbf{g}}^{\pm} \rangle_0 = \langle J^{\pm} \rangle_0$  与位置  $\mathbf{g}$  无关. 此外尚略去了一些分量很小的項,例如在  $\langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega}$  的方程中同时有含  $\langle b_{-k}^{\pm} \rangle_{\Omega \pm \omega}$  的項,但由因子  $\frac{1}{\Omega - \omega_k - i\eta_k}$  知道,当  $\Omega$  的分量較大时 ( $\Omega \approx \omega_k$ ), 則  $\Omega \pm \omega$  的分量一定是很小的項(代表一种高頻調

制作用)。同样,例如也出现含  $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega \pm \omega}$  的项,但由  $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}$  的因子  $\frac{1}{\Omega + \omega_{\mathbf{k}} - i\eta_{\mathbf{k}}}$  知道,只有  $\Omega \approx -\omega_{\mathbf{k}}$  的  $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}$  才是比较大的。因此在  $\langle b_{\mathbf{k}}^{\pm} \rangle_{\Omega}$  方程中的  $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega + \omega}$  一定是小的,而  $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega - \omega}$  的项则当  $\Omega \approx \frac{\omega}{2}$  时有可能较大,应予以保留。其他的项也作类似的考虑,在最终的表达式中,将这类代表高频调制作用的小项都略去了。因为正如 Suhl<sup>[3]</sup> 所指出过的,这类高频小项起着与热扰动同样的作用,因而迭加在热扰动的背景上。而对于确定临阈场值的问题这是不重要的,因此我们可以将它们略去不计。在(15.5)–(15.7)中的  $u_{ij}(\Omega)$  与文献[5]相同,由于希土离子间相互作用很弱,我们近似地认为不同离子间不存在关联效应,而对诸离子,其关联函数则相同,亦即

$$S_P([J_{\mathbf{g}}^{\alpha}(\tau), J_{\mathbf{g}'}^{\beta}] \rho_0) \simeq S_P([\tilde{J}(\tau), J^{\beta}] \rho_0) \delta_{\mathbf{g}\mathbf{g}'}$$

一般说来,晶场等的作用不一定能简单地用量子化轴方向有一小偏角来代表,但为简单起见,我们象文献[5]中那样来处理关联函数<sup>1)</sup>,于是有

$$\left. \begin{aligned} u_{11}(\Omega) &\equiv i \int_0^{\infty} S_P\{[\tilde{J}_+(\tau), J_-] \rho_0\} e^{-i\Omega\tau} d\tau \equiv (J_+, J_-) \simeq \phi^2 \chi_{11}(\Omega) + \\ &\quad + \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \chi_+(\Omega), \\ u_{12}(\Omega) &\equiv (J_+, J_+) = u_{21}(\Omega) \equiv (J_-, J_-) \simeq \phi^2 \chi_{11}(\Omega) - \\ &\quad - \frac{\phi^2}{4} (\chi_+(\Omega) + \chi_-(\Omega)), \\ u_{13}(\Omega) &\equiv (J_+, J_x) = u_{31}(\Omega) \equiv (J_x, J_-) \simeq \phi \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \chi_{11}(\Omega) - \\ &\quad - \frac{\phi}{2} \left\{ \chi_+(\Omega) - \frac{\phi^2}{2} (\chi_+(\Omega) + \chi_-(\Omega)) \right\}, \\ u_{22}(\Omega) &\equiv (J_-, J_+) \simeq \phi^2 \chi_{11}(\Omega) + \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \chi_-(\Omega), \\ u_{23}(\Omega) &\equiv (J_-, J_x) = u_{32}(\Omega) \equiv (J_x, J_+) \simeq \phi \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \chi_{11} - \\ &\quad - \frac{\phi}{2} \left\{ \chi_-(\Omega) - \frac{\phi^2}{2} (\chi_+(\Omega) + \chi_-(\Omega)) \right\}, \\ u_{33}(\Omega) &\equiv (J_x, J_x) \simeq \chi_{11}(\Omega) (1 - \phi^2) + \frac{\phi^2}{2} (\chi_+(\Omega) + \chi_-(\Omega)), \\ \chi_{11}(\Omega) &= \chi_{11}^*(-\Omega) = -\beta \sum_n |\langle n | J_z | n \rangle|^2 \rho_n \frac{i\omega_{rn}}{\Omega - i\omega_{rn}}, \\ \chi_{\pm}(\Omega) &= \chi_{\pm}^*(-\Omega) = \sum_{nm}' |\langle n | J_{\pm} | m \rangle|^2 \frac{\rho_m - \rho_n}{\omega_{nm}} \frac{\mp \omega_{nm} - i\omega_{rnm}}{\Omega \mp \omega_{nm} - i\omega_{rnm}}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中  $\phi$  为希土离子量子化轴  $z'$  与  $z$  轴间的夹角,今后我们将认为  $\phi$  是不大的;  $J'_+$ ,  $J'_x$  表示在以量子化轴为  $z'$  轴的坐标系  $x'y'z'$  中的算符;  $|n\rangle$ ,  $|m\rangle$  为  $\mathcal{H}_{02}$  的本征态,相应的

1) 在一般情形下,我们仍能在诸关联函数中分出对角矩阵元(纵分支)和非对角矩阵元(横分支)两个性质不同的部份,只是此时诸  $u_{ij}(\Omega)$  间不存在象(16)式那样的简单关系,但这只是改变了  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{\pm}$  的系数,增加了数学形式的复杂性,而对弛豫现象的重要的性质不会有定性上的改变。

能级为  $E_n, E_m$ ;  $\rho_n = e^{-\beta E_n} / \sum_m e^{-\beta E_m}$ ;  $\omega_{nm} = E_n - E_m$ ;  $\omega_{r_n}$  是纵向弛豫频率;  $\omega_{r_{nm}}$  为跃迁弛豫频率。对于这些量的性质文献[5]中已有讨论。

由(15.1)–(15.7)式就可以求出有关算符平均值的富氏分量,从而求出平均值本身。在只有一种离子的简单铁磁性点阵,这样的方程就退化为和 Suhl<sup>[3]</sup> 或 Schlömann<sup>[11]</sup> 的半经典方程等价,所得结果也是相同的。

(15.1)–(15.7)式中所列各项也不是同时都是重要的。对不同的过程,方程还可以进一步地简化。为此,我们按高频磁场与恒定磁场平行时的一级过程,高频场与恒定磁场互相垂直时的一级、二级过程等三个情况分别加以讨论。

#### 四、

我们首先考虑微波场与恒定磁场平行时的情形( $\theta = 0$ )。因为这时自旋波是直接由高频场激发,因此除了被强烈地激发得产生不稳定的增长的自旋波外,所有其他自旋波都是处于很小的水平上,在考虑一级过程的临阈问题,我们可以在(15.1)–(15.7)中忽略高次非线性项,这样得到的方程就变得特别简单。

$$(\Omega - \omega_k - i\eta_k) \langle b_{-k}^+ \rangle_\Omega = -\omega_s 2u_k v_k^* \langle b_k \rangle_{\Omega-\omega} + \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} (u_k \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_\Omega - v_k^* \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_\Omega), \quad (17.1)$$

$$(\Omega + \omega_k - i\eta_k) \langle b_k \rangle_\Omega = \omega_s 2u_k v_k \langle b_{-k}^+ \rangle_{\Omega+\omega} - \frac{n}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} \epsilon_{\mathbf{g}} (u_k \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_\Omega - v_k \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_\Omega), \quad (17.2)$$

$$\langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_\Omega = -\frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} \{ (u_k u_{11}(\Omega) - v_k u_{12}(\Omega)) \langle b_{-k}^+ \rangle_\Omega + (u_k u_{12}(\Omega) - v_k^* u_{11}(\Omega)) \langle b_k \rangle_\Omega \}, \quad (17.3)$$

$$\langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_\Omega = -\frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{g}} \{ (u_k u_{22}(\Omega) - v_k^* u_{21}(\Omega)) \langle b_k \rangle_\Omega + (u_k u_{21}(\Omega) - v_k u_{22}(\Omega)) \langle b_{-k}^+ \rangle_\Omega \}. \quad (17.4)$$

将(17.3), (17.4)代入(17.1), (17.2)内,消去  $\langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_\Omega$  及  $\langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_\Omega$ , 并且忽略希土离子无序分布所引起的自旋波的散射效应,这样得到的方程中只含  $\langle b_k \rangle$  和  $\langle b_{-k}^+ \rangle$ 。根据上节中曾讨论过的理由,将所得的方程中略去贡献很小的项,就得到  $\langle b_{-k}^+ \rangle_\Omega, \langle b_k \rangle_{\Omega-\omega}$  的联立齐次方程。由存在非零解的条件得到不为零的富氏分量的  $\Omega$  应满足的方程为

$$\left[ \Omega - \frac{\omega}{2} - i(\eta_k + \Gamma_k) \right]^2 = - \left[ (2u_k |v_k| \omega_s)^2 - \left( \frac{\omega}{2} - \tilde{\omega}_k(\Omega) \right)^2 \right]$$

或

$$\Omega = \frac{\omega}{2} - i \left\{ \eta_k + \Gamma_k(\Omega) \pm \left[ (2u_k |v_k| \omega_s)^2 - \left( \frac{\omega}{2} - \tilde{\omega}_k(\Omega) \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\omega}_k(\Omega) &= \omega_k - \frac{Sn}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \{ u_k^2 u'_{11}(\Omega) + |v_k|^2 u'_{22}(\Omega) - u_k (v_k + v_k^*) u'_{12}(\Omega) \}, \\ \Gamma_k(\Omega) &= \frac{Sn}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \{ u_k^2 u''_{11}(\Omega) + |v_k|^2 u''_{22}(\Omega) - u_k (v_k + v_k^*) u''_{12}(\Omega) \}, \\ u_{ij}(\Omega) &= u'_{ij}(\Omega) - i u''_{ij}(\Omega). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

由(18)式解出  $\Omega$ , 一般的情形下要求解是非常困难的, 但幸而我們所感兴趣的是最低的臨閾場, 正如以后要看到的, 此时有  $\frac{\omega}{2} = \tilde{\omega}_k$ . (18) 式的右边第二項就很小,  $\Omega \simeq \frac{\omega}{2}$ , 将这零級近似的  $\Omega$  代入(18)式的右边, 得近似值

$$\Omega = \frac{\omega}{2} - i \left\{ \eta_k + \Gamma_k \left( \frac{\omega}{2} \right) \pm \left[ (2u_k |v_k| \omega_s)^2 - \left( \frac{\omega}{2} - \tilde{\omega}_k \left( \frac{\omega}{2} \right) \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (18')$$

(18') 式表明希土离子引起了自旋波的頻移  $\delta\omega_k$  及損耗  $\Gamma_k$

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_k = \tilde{\omega}_k - \omega_k &= -\frac{Sn}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left\{ u_k^2 u'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) + |v_k|^2 u'_{22} \left( \frac{\omega}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - u_k (v_k + v_k^*) u'_{12} \left( \frac{\omega}{2} \right) \right\}, \\ \Gamma_k &= \frac{Sn}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left\{ u_k^2 u''_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) + |v_k|^2 u''_{22} \left( \frac{\omega}{2} \right) - u_k (v_k + v_k^*) u''_{12} \left( \frac{\omega}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (19')$$

(18') 式中“+”号的解相当于自旋波随時間衰减的状态, 高频場对自旋波的作用是附加了一阻尼<sup>1)</sup>, 在足够长的時間以后, 这种状态小得可略而不計, (18') 中的負号的解表明高频場激励自旋波, 但当这种激发不足以克服自旋波的衰减(由  $\eta_k + \Gamma_k$  所代表)时, (18') 式右边虚部仍为負, 自旋波仍是衰减的. 但当虚部变成正时, 就得到一随時間指数式上升的解, 这表示外場的光量子激发一对能量相同、动量数值相等、方向相反的自旋波的过程是进行得如此強烈, 以至于完全克服了希土及其他机构造成的自旋波的衰减, 于是这样的一对对的自旋波就不断在样品中产生(吸取高频場能量). 其数目随時間有一指数式增长. 这也就是通常纵向注入的一級非綫性过程<sup>[10,11]</sup>. 因此, 臨閾条件由  $\Omega$  的虚部为零所給出. 实验上所激发的是臨閾值最低的自旋波, 由  $\Omega$  的表示式(18') 可看到, 此时所激发的自旋波頻率应滿足  $\tilde{\omega}_k = \frac{\omega}{2}$ , 考虑到  $\omega_s = \gamma h_0$ , 因而最小臨閾場为

$$\min h_{\text{crit.}} = \frac{1}{\gamma} \min \frac{\omega_k (\eta_k + \Gamma_k)}{\frac{\omega_M}{2} \sin^2 \theta_k}, \quad (20)$$

上式表示应在  $\tilde{\omega}_k = \frac{\omega}{2}$  的条件下求  $h_{\text{crit.}}$  的最小值. 現有的文献上往往由实验所測得的  $h_{\text{crit.}}$  的数值, 利用 Schlömann 的公式<sup>[10,11]</sup>.

$$h_{\text{crit.}} = \frac{\omega}{\omega_M} \min \frac{\Delta H_k}{\sin^2 \theta_k}$$

来求得  $\Delta H_k$ , 同时认为  $\gamma \Delta H_k$  即为  $\mathbf{k}$  自旋波的弛豫頻率  $\eta_k$  (且与  $\theta_k$  无关). 和 (20) 相比, 相当于

$$\Delta H_k = \frac{2\omega_k}{\omega} \left( \frac{\eta_k + \Gamma_k}{\gamma} \right) = \frac{\omega_k}{\tilde{\omega}_k} \left( \frac{\eta_k + \Gamma_k}{\gamma} \right). \quad (21)$$

由于希土离子不但引起自旋波附加的損耗  $\Gamma_k$ , 而且还引起自旋波頻移使  $\tilde{\omega}_k < \omega_k$ . 因此, 由(21)式可知, 按上述方法所給出的表观  $\Delta H_k$  并不单纯地代表自旋波的損耗. 例如在低

1) Schlömann<sup>[11]</sup> 曾对沿片面磁化的圓片状样品的情形, 用经典磁矩受外場作用力与运动間位相的关系, 形象地描述了位相合适 [相当于 (18') 式中取“-”号] 及不合适 (相当于取“+”号) 的情形下的运动状态.

功率下,含希土离子的钇铁氧体的铁磁共振的研究中,我們已看到,在低温下,在一些特殊的晶体方向上,共振频率会发生很大的移动<sup>[12,13]</sup>,这时临阈场的增加不仅是因为  $\Gamma_k$  的增大,而且由于  $\tilde{\omega}_k$  的减小所造成. 只有当弛豫机构引起的频率移动非常小,以致于可忽略不计时,将  $\gamma\Delta H_k$  看成是弛豫频率才是正确的,因此我們应该谨慎对待.

实验表明,少量希土杂质即可使  $\Delta H_k$  增加一个到二个数量级<sup>[13,15]</sup>. 因此我們在(20)式中可以略去其他机构(例如三磁子过程<sup>[14]</sup>等)造成的、小得多的自旋波弛豫  $\eta_k$ . 这样,就近似有

$$\min h_{crit.} = \frac{2}{\gamma\omega_M} \min \frac{\Gamma_k \omega_k}{\sin^2 \theta_k}. \quad (22)$$

如文献[5]中讨论过的,  $\Gamma_k$  中所含的关联函数有纵分支和横分支两部分,它們在不同温度范围起的作用不同.

当纵分支起主要作用时(相当于温度不太低,亦不太高,能级裂距  $\omega_{nm} \gg \omega$  的情形),

$$\left. \begin{aligned} h_{crit.} &\cong \frac{2}{\gamma\omega_M} \min \frac{\Gamma_k \omega_k}{\sin^2 \theta_k} \\ &= \min \left\{ \frac{\frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 [\omega'_H + \omega_{ex} k^2 + \omega_M \sin^2 \theta_k \sin^2 \varphi_k]}{\sin^2 \theta_k} \right\} \frac{2\phi^2}{\gamma\omega_M} \chi''_{||} \left( \frac{\omega}{2} \right), \\ \chi''_{||} \left( \frac{\omega}{2} \right) &= \beta \sum_n |\langle n | J'_z | n \rangle|^2 \rho_n \frac{\frac{\omega}{2} \omega_{rn}}{\left( \frac{\omega}{2} \right)^2 + (\omega_{rn})^2}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中

$$\omega'_H = \gamma H + \frac{n}{N} \langle J_x \rangle_0 \lambda'(0) - \gamma M N_x, \quad \omega_{ex} k^2 = 2S(\lambda(0) - \lambda(k)).$$

由(23)可知,临阈场最小的自旋波为  $\varphi_k = 0, \pi$ , 而且  $\sin^2 \theta_k$  应尽可能的大. 由  $\frac{\omega}{2} = \tilde{\omega}_k$  可以求出相应于  $k = 0, \sin^2 \theta_k = 1$  的外磁场  $H = H_c$  为

$$H_c = \frac{1}{\gamma} \left\{ \gamma M N_x - \frac{n}{N} \langle J_x \rangle_0 \lambda'(0) - \frac{\omega_M}{2} + \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 \phi^2 \chi'_{||} \left( \frac{\omega}{2} \right) + \sqrt{\left( \frac{\omega_M}{2} \right)^2 + \left( \frac{\omega}{2} \right)^2 - \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 \phi^2 \chi'_{||} \left( \frac{\omega}{2} \right)} \right\}.$$

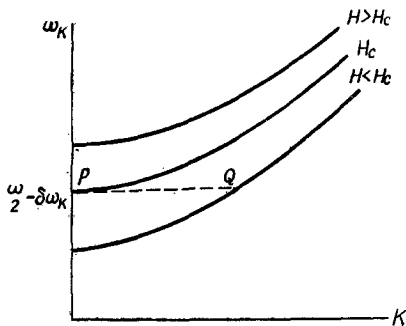


图1 不同  $H$  值下自旋波频潜的上限 ( $\theta = \pi/2$ ) 及所激发的 (临阈场最小的) 自旋波.  $H_c - H$  越大,  $Q$  点距  $P$  点越远;  $H - H_c$  越大,  $P$  点的  $\theta_k$  亦就越小

当  $H \leq H_c$  时, 满足条件  $\frac{\omega}{2} = \tilde{\omega}_k$  的临阈场最小的

自旋波为  $k \geq 0, \theta_k = \frac{\pi}{2}$  (图1中的  $Q$  点), 而且

$H_c - H$  与所激发的自旋波波矢  $k$  的平方成正比(只适用于  $k \ll 1$  的情形). 因此我們可以利用改变外场  $H$  的数值来激发不同  $k$  值的自旋波. 当  $H > H_c$  时,

就再也不可能有  $k \geq 0, \theta_k = \frac{\pi}{2}$ , 同时又满足  $\tilde{\omega}_k = \frac{\omega}{2}$

的解存在. 因而激发的自旋波为  $k \simeq 0, \theta_k < \frac{\pi}{2}$

( $\theta_k$  尽可能的大, 相当于图 1 中的  $P$  点)。随着  $H$  的增大,  $\theta_k$  就越小 (从而  $h_{\text{crit.}}$  就增大)。应该强调的是以上讨论并不适用于  $k \approx 0$  的情形。因为这时我们所用的频谱已不再正确, 应代之以 Walker 模<sup>[7,11]</sup>。因而严格地讲,  $H > H_c$  以及  $H < H_c$  但很靠近时 ( $k$  很小), 都应该采用 Walker 模来讨论。由于数学上太复杂, 我们不在这里讨论。对于  $k = 0$  的情形 (一致进动),  $\nu_0 = 0$ , 因而不发生上述不稳定性。显然对于一致进动, 高频场不会起象对  $k \approx 0$  的自旋波所产生的那种激励作用。

$\chi''_{11}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  是温度及频率  $\omega$  的函数<sup>[5]</sup>, 当  $\omega \approx 2\omega_{rn}$  时有极大值。与一致共振相应的极大值条件  $\omega = \omega_{rn}$  相比, 可以看到,  $\omega$  相同时,  $h_{\text{crit.}}$  极大值出现的温度应低于一致共振线宽极大值的温度。

当温度很低时 ( $T \rightarrow 0$ ),  $\omega_{rn} \rightarrow 0$ ,  $\omega_{rnm}$  很小, 这时起主要作用的是横分支, 考虑到  $\phi^2 \ll 1$ , (22) 式可写成

$$\left. \begin{aligned} \min h_{\text{crit.}} &= \min \left\{ \frac{\frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left[ \omega'_H + \omega_{cx} k^2 + \frac{\omega_M}{2} \sin^2 \theta_k + \omega_k \right]}{\gamma \omega_M \sin^2 \theta_k} \chi''_+ \left( \frac{\omega}{2} \right), \right. \\ \chi''_+ \left( \frac{\omega}{2} \right) &= \sum'_{nm} |\langle n | J'_+ | m \rangle|^2 \frac{\rho_m - \rho_n}{\omega_{nm}} \frac{\frac{\omega}{2} \omega_{rnm}}{\left( \frac{\omega}{2} - \omega_{nm} \right)^2 + \omega_{rnm}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

其中  $\omega_k$  应满足

$$\left. \begin{aligned} \omega_k &= \frac{\omega}{2} + \frac{nS}{4N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left( \omega'_M + \omega_{cx} k^2 + \frac{\omega_M}{2} \sin^2 \theta_k + \omega_k \right) \chi'_+ \left( \frac{\omega}{2} \right), \\ \chi'_+ \left( \frac{\omega}{2} \right) &= \sum_{nm} |\langle n | J'_+ | m \rangle|^2 \frac{\rho_m - \rho_n}{\omega_{nm}} \frac{\omega_{nm} \left( \omega_{nm} - \frac{\omega}{2} \right) + \omega_{rnm}^2}{\left( \frac{\omega}{2} - \omega_{nm} \right)^2 + \omega_{rnm}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

同前面讨论的一样, 存在一临界场  $H_c$ 。当  $H < H_c$  时, 临界场最小的自旋波为  $k \neq 0$ ,  $\theta_k = \frac{\pi}{2}$ 。  $H > H_c$  时为  $k \approx 0$ ,  $\theta_k < \frac{\pi}{2}$ 。一般的条件下, 当  $\left(\frac{\omega}{2} - \omega_{nm}\right) \approx \omega_{rnm}$  时,  $h_{\text{crit.}}$  是很低的, 但当能级在某些方向上非常靠近时,  $\frac{\omega}{2} - \omega_{nm}$  可以变得很小, 而有可能在某一温度下满足  $\frac{\omega}{2} - \omega_{nm} = \omega_{rnm}$  时  $h_{\text{crit.}}$  就剧烈增加。因此在这样的方向上作  $h_{\text{crit.}}$  与温度的关系, 将在某一温度出现一峰值, 而在较低温度对不同方向作测量, 将会出现各向异性。这一情况和文献[5]中讨论一致共振的峰宽的情形相似, 但这里  $h_{\text{crit.}}$  的增加, 不能完全归结为自旋波损耗的增加。因为在  $\chi'_+\left(\frac{\omega}{2}\right)$  出现极大值时的方向和温度上,  $\chi'_+\left(\frac{\omega}{2}\right)$  也非常大。在一致共振情形, 此即所谓发生能级偶然简并, 而造成的共振场反常增加。对于某些希土离子, 即使含量甚少的情形, 也可以引起成倍的增长, 如 0.2%  $\text{Tb}^{++}$  可使某些方向增加将近一倍<sup>[12]</sup>。因此由(24)知, 临界场将比纵分支起作用的情形增长得更显著。这表明, 将  $\gamma \Delta H_k$  看成自旋波损耗是有条件的。和一致共振相比, 目前  $h_{\text{crit.}}$  出现峰值的温度

与一致共振峰不同,但如果  $\omega_{nm} > \omega$ , 各向异性的情况则是差不多的. 关于  $h_{\text{crit.}}$  的各向异性变化已在实验上观察到了<sup>[13]</sup>.

当温度较高,  $\omega_{rn}, \omega_{rnm} \gg \omega$  时, 纵分支的作用也是很小的, 横分支所起的作用较大, 这时

$$h_{\text{crit.}} \cong \min \left\{ \frac{\frac{mS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left( \omega'_H + \omega_{cz} \mathbf{k}^2 + \frac{\omega_M}{2} \sin^2 \theta_k \right)}{\frac{1}{2} \gamma \omega_M \sin^2 \theta_k} \right\} \sum_{nm} |\langle n | J'_+ | m \rangle|^2 \cdot \\ \cdot \frac{\rho_m - \rho_n}{\omega_{nm}} \cdot \frac{\frac{\omega}{2} \omega_{rnm}}{\omega_{nm}^2 + \omega_{rnm}^2}.$$

所激发的自旋波情况和前面相似,  $h_{\text{crit.}}$  所表现的温度效应与一致共振相同.

在这三种情形, 我们都可以用改变外场  $H$  的办法来激发不同波矢的自旋波 ( $H_c - H$  与  $k^2$  成正比). 对于固定的频率  $\omega$ , 由于  $\frac{\omega}{2} = \tilde{\omega}_k \approx \omega_k$ , 因此  $h_{\text{crit.}}$  主要通过  $\lambda'(k)^2$  与  $k$  有关. 只考虑最近邻间交换作用的情形, 有  $\lambda'(k) \sim \lambda' \cos ka$  的形式 [例如对简单立方结构  $\lambda'(k) = 2\lambda'(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a) \simeq \lambda'(6 - 2ka^2)$ ]. 因此随  $k$  值的增加,  $\lambda'(k)$  有所减小. 由于通常激发的  $k$  是不大的 ( $ka \ll 1$ ), 因此这种变化是很不显著的. 文献[13]中报导了对含 0.03% Ho 的 YIG 的实验, 表明这种随  $k$  的变化是很小的. 有意思的是, 对  $k$  的依赖关系与所谓三磁子过程<sup>[14]</sup>所预言的结果 ( $\eta_k$  与  $k$  成正比地增加) 也不同. 对于固定的  $\omega$  及  $H$ , 不同形状的样品, 由于退磁因子  $N_x$  不同, 所激发的自旋波波矢  $\mathbf{k}$  也不同.  $N_x$  越大,  $k$  就越大, 从而  $h_{\text{crit.}}$  就减小. 这样,  $h_{\text{crit.}}$  [或由(21)式求得的表观  $\Delta H_k$ ] 将与形状有关. 同理, 当磁化强度  $M$  增加时,  $\Delta H_k$  也减小. 对于纵向注入, 这样的实验似乎还未做过. 在  $M$  不太小的样品中改变形状将使  $k$  有较大变化, 应该在  $h_{\text{crit.}}$  的数值上观察到较大的变化.

在横分支起作用的情况下, 某些晶体方向上能级很接近, 发生频率的很大移动和损耗的增加, 从而使  $h_{\text{crit.}}$  急剧地增加. 频移将使所激发的自旋波 (满足  $\frac{\omega}{2} = \tilde{\omega}_k$  的条件) 的  $k$  值增加, 不过在希土离子含量不是太多时, 频率移动所引起的  $k$  值变化比起 1 来还是不大的. 因此由于  $k$  的增加而使  $\lambda'(k)^2$  的减少的效果为  $\delta\omega_k$  及  $\Gamma_k$  很大的增加所掩盖. 实际上, 还是使  $h_{\text{crit.}}$  增加很多.

## 五、

现在考虑微波磁场与恒定磁场垂直的情形. 此时  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , 因为不稳定性是高频场所激起的一致进动激发了  $k \neq 0$  的自旋波, 使之不稳定增长的过程, 因此在达到临阈场以前, 所有的  $k$  自旋波的平均值都是很小的. 因此在求临阈场时, 我们可以利用线性近似来求  $\langle b_0 \rangle_0$ . 在此近似下, 按 (15.1) — (15.7), 有

$$\left. \begin{aligned}
 (\Omega + \omega_0 - i\eta_0)\langle b_0 \rangle_\Omega &= -\frac{n}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(0) \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_\Omega \epsilon_{\mathbf{g}} - \omega_s \delta(\omega + \Omega), \\
 (\Omega - \omega_0 - i\eta_0)\langle b_0^+ \rangle_\Omega &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{g}} \lambda'(0) \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_\Omega \epsilon_{\mathbf{g}} + \omega_s \delta(\omega - \Omega), \\
 \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_\Omega &= -\frac{\omega_s'}{2} (u_{12}(\Omega) + u_{11}(\Omega)) (\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)) - \\
 &\quad - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} \{ [u_{\mathbf{k}} u_{11}(\Omega) - v_{\mathbf{k}} u_{12}(\Omega)] \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_\Omega + \\
 &\quad + [u_{\mathbf{k}} u_{12}(\Omega) - v_{\mathbf{k}}^* u_{11}(\Omega)] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_\Omega \}, \\
 \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_\Omega &= -\frac{\omega_s'}{2} (u_{22}(\Omega) + u_{21}(\Omega)) (\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)) - \\
 &\quad - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{g}} \{ [u_{\mathbf{k}} u_{21}(\Omega) - v_{\mathbf{k}} u_{22}(\Omega)] \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_\Omega + \\
 &\quad + [u_{\mathbf{k}} u_{22}(\Omega) - v_{\mathbf{k}}^* u_{21}(\Omega)] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_\Omega \}.
 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

和纵向注入中情形一样,由此解得

$$\left. \begin{aligned}
 \langle b_0^+ \rangle_\Omega &= \frac{1}{D} \left\{ \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 u_{12}(\Omega) \left[ \omega_s - \frac{n}{N} \lambda'(0)^2 \frac{\omega_s'}{2} (u_{22}(\Omega) + u_{21}(\Omega)) \right] - \right. \\
 &\quad - \left[ \Omega + \omega_0 + \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 u_{22}(\Omega) \right] \left[ \omega_s - \frac{n}{N} \lambda'(0)^2 \cdot \right. \\
 &\quad \left. \left. \cdot \frac{\omega_s'}{2} (u_{12}(\Omega) + u_{11}(\Omega)) \right] \right\} \delta(\Omega - \omega), \\
 D &= \Omega^2 - \omega_0^2 + \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 [(u_{11}(\Omega) - u_{22}(\Omega))\Omega + (u_{11}(\Omega) + u_{22}(\Omega))\omega_0] - \\
 &\quad - \left[ \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 \right]^2 [u_{11}(\Omega)u_{22}(\Omega) - u_{12}(\Omega)u_{21}(\Omega)] = \\
 &= (\Omega - \omega_{01})(\Omega - \omega_{02}).
 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

在希土离子含量很少及  $\phi$  很小时, 将  $\left[ \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 \right]^2 \phi^4$  量级的项略去, 则近似地有

$$\omega_{01} = \omega_0 - \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 u_{11}(\omega) = \tilde{\omega}_0 - i\Gamma_0, \quad \omega_{02} = -\omega_0 + \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 u_{22}(\omega). \quad (28)$$

(28)式给出希土离子造成的一致共振频移及线宽

$$\left. \begin{aligned}
 \delta\omega_0 &= \tilde{\omega}_0 - \omega_0 = -\frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 \left\{ \phi^2 \chi_{11}'(\omega) + \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \chi_+'(\omega) \right\}, \\
 \Gamma_0 &= \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 \left\{ \phi^2 \chi_{11}''(\omega) + \left(1 - \frac{\phi^2}{2}\right) \chi_+''(\omega) \right\}.
 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

这个结果和文献[5]在同样近似下所得的结果相同(参看文献[5]中(43)式)。这样,在线性近似下有

$$\left. \begin{aligned}
 \langle b_0^+ \rangle_\Omega &\cong \frac{\omega_s - \frac{n}{2N} \lambda'(0)^2 \omega_s' [u_{12}(\omega) + u_{11}(\omega)]}{\omega_{01} - \omega} \delta(\Omega - \omega) = \alpha(\omega) \delta(\Omega - \omega), \\
 \langle b_0 \rangle_\Omega &\cong \alpha^*(\omega) \delta(\Omega + \omega).
 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

## 1. 一級非綫性过程 (次吸收峯現象)

一級非綫性过程是一个能量为  $\hbar\omega$  的  $k=0$  铁磁子激发了一对  $\mathbf{k}$  的数值相同、方向相反、频率为  $\omega_k \simeq \frac{\omega}{2}$  的自旋波。在(15.1)–(15.7)諸方程中,只保留  $b_0, b_0^+$  与  $b_{\mathbf{k}}, b_{-\mathbf{k}}^+$  乘积的二次項,根据前面討論纵向注入时所述理由,我們仍略去随時間迅速变化的高頻小項,就得到下列联立方程:

$$\begin{aligned}
 & -(\Omega + \omega_k - i\eta_k) \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} = \sum_{\mathbf{g}} \frac{n}{N} \lambda'(\mathbf{k}) \{ u_{\mathbf{k}} \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega} - v_{\mathbf{k}} \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega} + \\
 & \quad + u_{\mathbf{k}} \alpha_{\omega}^* \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega+\omega} \} e^{-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{g}} - \\
 & \quad - \omega_M \frac{k_x}{k^2} (k_+ v_{\mathbf{k}} - k_- u_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}} \alpha_{\omega}^* \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+\omega}, \\
 & -(\Omega - \omega_k - i\eta_k) \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} = - \sum_{\mathbf{g}} \frac{n}{N} \lambda'(\mathbf{k}) \{ u_{\mathbf{k}} \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega} - v_{\mathbf{k}}^* \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega} + \\
 & \quad + u_{\mathbf{k}} \alpha_{\omega} \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega-\omega} \} e^{-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{g}} + \\
 & \quad + \omega_M \frac{k_x}{k^2} (k_- v_{\mathbf{k}}^* - k_+ u_{\mathbf{k}}) u_{\mathbf{k}} \alpha_{\omega} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\omega}. \\
 & \langle J_+ \rangle_{\Omega} = - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_{\mathbf{k}} u_{11}(\Omega) - v_{\mathbf{k}} u_{12}(\Omega)] \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} + [u_{\mathbf{k}} u_{12}(\Omega) - \\
 & \quad - v_{\mathbf{k}}^* u_{11}(\Omega)] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} - \\
 & \quad - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}} u_{13}(\Omega) [ \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+\omega} \alpha_{\omega}^* + \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\omega} \alpha_{\omega} ] e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}}, \\
 & \langle J_- \rangle_{\Omega} = - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_{\mathbf{k}} u_{21}(\Omega) - v_{\mathbf{k}} u_{22}(\Omega)] \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} + \\
 & \quad + [u_{\mathbf{k}} u_{22}(\Omega) - v_{\mathbf{k}}^* u_{21}(\Omega)] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} - \\
 & \quad - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) u_{\mathbf{k}} u_{23}(\Omega) [ \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+\omega} \alpha_{\omega}^* + \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\omega} \alpha_{\omega} ] e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}}, \\
 & \langle J_{\mathbf{x}} \rangle_{\Omega} = - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_{\mathbf{k}} u_{31}(\Omega) - v_{\mathbf{k}} u_{32}(\Omega)] \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} + \\
 & \quad + [u_{\mathbf{k}} u_{32}(\Omega) - v_{\mathbf{k}}^* u_{31}(\Omega)] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

在这个方程組中,消去  $\langle J_+ \rangle_{\Omega}, \langle J_- \rangle_{\Omega}, \langle J_{\mathbf{x}} \rangle_{\Omega \pm \omega}$ , 得到  $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}$  与  $\langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+\omega}$  的二元齐次方程。由非零解存在条件,得到不为零的富氏分量的  $\Omega$  满足的方程为

$$\begin{aligned}
 & \left[ \Omega + \frac{\omega}{2} - i(\eta_k + \Gamma_k) \right]^2 - \left( \frac{\omega}{2} - \tilde{\omega}_k \right)^2 = - \left| \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \{ u_{\mathbf{k}}^2 [u_{23}(\Omega) + \right. \\
 & \quad \left. + u_{13}^*(\Omega)] - u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} [u_{13}(\Omega) + u_{23}^*(\Omega)] \} + \frac{\omega_M}{k^2} k_x u_{\mathbf{k}} (v_{\mathbf{k}} k_+ - u_{\mathbf{k}} k_-) \right|^2 |\alpha_{\omega}|^2, \tag{32}
 \end{aligned}$$

其中  $\tilde{\omega}_k, \Gamma_k$  由(19)給出。由此可见,对于横向注入一級非綫性过程,希土离子所引起的頻移及損耗和纵向注入情况是相同的。从(32)解出  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \Omega = & -\frac{\omega}{2} + i(\eta_k + \Gamma_k) \pm \\ & \pm i \left\{ \left[ \frac{nS}{2N} \lambda'(k)^2 \{u_k^2 [u_{23}(\Omega) + u_{13}^*(\Omega)] - u_k v_k [u_{13}(\Omega) + u_{23}^*(\Omega)]\} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\omega_M}{k^2} k_x u_k (v_k k_+ - u_k k_-) \right]^2 - \left( \frac{\omega}{2} - \tilde{\omega}_k \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (33)$$

和纵向注入情形一样, 当  $\Omega$  的虚数部分为负时, 给出随时间指数式地增长的状态. 因此其虚部为零就给出了出现自旋波不稳定的临界场值的条件. 由(33)得临界场值为

$$\begin{aligned} h_{\text{crit.}} = & \left[ \left( \frac{\omega}{2} - \tilde{\omega}_k \right)^2 + (\eta_k + \Gamma_k)^2 \right]^{1/2} [(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma_0^2]^{1/2} / \text{分母} \\ \text{分母} = & |\bar{\gamma}| \left| \omega_M \frac{k_x}{k^2} (u_k k_- - v_k k_+) u_k + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left[ v_k u_{13} \left( -\frac{\omega}{2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - u_k u_{23} \left( -\frac{\omega}{2} \right) + u_{32}^* \left( -\frac{\omega}{2} \right) v_k - u_k u_{31}^* \left( -\frac{\omega}{2} \right) \right] u_k \right|, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{其中 } |\bar{\gamma}| = \left| \gamma - \frac{n}{2N} \gamma' \lambda'(0)^2 (u_{12}(\omega) + u_{11}(\omega)) \right|.$$

当  $n$  为零时,  $\tilde{\omega}_k = \omega_k$ ,  $\tilde{\omega}_0 = \omega_0$ ,  $\Gamma_k = \Gamma_0 = 0$ , (34) 式就退化为 Suhl<sup>[3]</sup> 用半经典自旋波方法所求得的结果. 因此希土离子不仅改变了所激发的自旋波频率, 而且由于引起了自旋波的新耗损而提高了临界场.

在实验上所激发的应该是临界场值最小的自旋波. 当  $\frac{\omega}{2} = \tilde{\omega}_k$  时, (34) 较小, 若  $\omega = \tilde{\omega}_0$ , 则临界场就更低. 在考虑希土离子影响时, 我们将  $\eta_k$ ,  $\eta_0$  等小量略去.

和纵向注入情形相同, 在  $\omega_{nm} \gg \omega$ , 中等温度时, 纵分支起主要作用, 按条件  $\omega = 2\tilde{\omega}_k$  确定临界场最小<sup>1)</sup> 的自旋波为  $k \approx 0$ ,  $\varphi_k \approx 0$ ,  $\pi$ ,  $\theta_k$  由下式决定:

$$\sin^2 \theta_k = \frac{\frac{1}{4} \left[ \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 + \frac{\omega}{2} \right]^2 - \left[ \omega'_H + \frac{1}{2} \left( \frac{nS}{2N} \lambda'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 + \frac{\omega}{2} \right) \right]^2}{\omega_M \left( \omega'_H - \frac{\omega}{4} \right)}, \quad (35)$$

相应的临界场值为

$$h_{\text{crit.}} = \frac{2[(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma_0^2]^{1/2} \frac{nS}{N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \phi^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) y}{|\bar{\gamma}| \left\{ \omega_M \sin \theta_k \cos \theta_k - \phi \frac{nS}{N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \right\} (\omega + 2y)}, \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned} y \equiv & \omega'_H + \omega_{ex} k^2 = \\ = & -\omega_M \sin^2 \theta_k + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 + \frac{\omega}{2} + \\ & + \sqrt{\omega_M^2 \sin^4 \theta_k + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 + \frac{\omega}{2} - 2\omega_M \sin^2 \theta_k \frac{nS}{2N} \lambda'(k)^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2}. \end{aligned}$$

1) 求最小值的方法同 Suhl<sup>[3]</sup> 的一样, 见附录 A.

当希土离子含量很少时, (36)式中分母内的第二项很小, 因此希土离子对临阈场的影响主要由分子的改变所决定。当  $\omega \approx \tilde{\omega}_0$  时, 即次吸收峰与主峰不重合, 临阈场增加主要由于  $k$  自旋波损耗的增加, 由于这时一致进动未处于共振状态, 因此临阈场还是较高。临阈场的温度关系, 各向异性等的情况与纵向注入的情形相似。当  $\omega \approx \tilde{\omega}_0$  时, 即次吸收峰与主共振峰重合, 临阈场的增加和  $\Gamma_0 \cdot \Gamma_k$  成正比。此时由于希土离子导致的一致进动及  $k$  自旋波损耗同时影响着临阈场, 因此, 其改变要显著得多。但对于临阈场的温度特性, 由于  $\Gamma_0, \Gamma_k$  的峰值是出现在不同的温度上, 因此, 迭加的结果, 峰的形状将反而显得不明显。

当横分支起主要作用时, 同样的步骤得到相应临阈值最小的自旋波仍然是  $k \approx 0$  的自旋波, 决定  $\theta_k$  的方程亦只要在(30)式中将  $\chi'_{\parallel} \phi^2$  换成  $\chi'_+$  即可。在温度很低时,  $\omega_{nm} \gg \omega_{rnm}$ ,

$$h_{\text{crit.}} = \frac{[(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma_0^2]^{1/2} \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 (\omega + 2y + \omega_M \sin^2 \theta_k) \chi'_+ \left(\frac{\omega}{2}\right)}{|\bar{\gamma}| \left\{ \omega_M \sin \theta_k \cos \theta_k + \phi \frac{nS}{4N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_+ \left(\frac{\omega}{2}\right) \right\} (\omega + 2y)} \quad (37)$$

其中

$$2y = -\omega_M \sin^2 \theta_k + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_+ \left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{2} + \sqrt{\omega_M^2 \sin^4 \theta_k + \left[ \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_+ \left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\omega}{2} \right]^2}$$

和纵向注入的情形一样, 一般情况下  $\omega_{nm} \gg \omega$ , 这时希土离子的影响是很小的。但若在某些方向上能级比较接近,  $|\omega - 2\omega_{nm}|$  不大时, 就出现一峰值, 这种情况和纵向注入情况相似, 此时,  $h_{\text{crit.}}$  的增加不仅是由于希土使  $\Gamma_k$  增加, 而且还因为使自旋波频率减少的缘故。我们再次看到利用半经典理论的公式求  $\Delta H_k$ , 并将它看作是表征了自旋波损耗的局限性。

在温度较高时,  $\omega_{rnm} \gg \omega$ , 在  $\omega_{nm} \sim \omega_{rnm}$  时, 临阈场为

$$h_{\text{crit.}} = \frac{[(\omega - \tilde{\omega}_0)^2 + \Gamma_0^2]^{1/2} \frac{nS}{N} \lambda'(\mathbf{k})^2 (2y + \omega_M \sin^2 \theta_k) \chi'_+ \left(\frac{\omega}{2}\right)}{|\bar{\gamma}| \left\{ \omega_M \sin \theta_k \cos \theta_k + \phi \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_+ \left(\frac{\omega}{2}\right) \right\} (\omega + 2y)} \quad (38)$$

同样道理, 分子部分引起的改变相对较大, 所以此时临阈场的特点主要由分子标志。和纵向注入一样, 在  $\omega_{nm} \approx \omega_{rnm}$  的温度,  $h_{\text{crit.}}$  有一极大值, 这些情况和一致共振的峰宽所表现的相似<sup>[5]</sup>。

## 2. 二级非线性过程 (主峰过早饱和现象)

此时发生的是一对  $k = 0$  铁磁子激发了一对其  $\mathbf{k}$  数值相同、方向相反、频率为  $\omega_k \approx \omega$  的自旋波。因而我们在 (15.1)–(15.7) 诸方程中只保留  $b_0^0, b_0^{+2}, |b_0|^2$  和  $b_{\mathbf{k}}$  或  $b_{\pm \mathbf{k}}$  的乘积的项。和过去一样, 略去随时间迅速变化的高频小项, 得下列联立方程组:

$$\begin{aligned}
& -(\Omega + \omega_k - i\eta_k) \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} = \sum_{\mathbf{g}} \frac{n}{N} \lambda'(\mathbf{k}) (u_k \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega} - v_k \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega}) e^{-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{g}} + \\
& + \sum_{\mathbf{g}} \frac{n}{N} \lambda'(\mathbf{k}) (\alpha_{\omega} u_k \langle J_{\mathbf{g}}^z \rangle_{\Omega+\omega} - \alpha_{\omega}^* v_k \langle J_{\mathbf{g}}^z \rangle_{\Omega-\omega}) e^{-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{g}} + \\
& + \left\{ L_2(k) (u_k^2 + |v_k|^2) + \frac{\omega_M}{4k^2} (k_-^2 u_k v_k^* + k_+^2 u_k v_k) \right\} |\alpha_{10}|^2 \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} + \\
& + \left\{ \frac{\omega_M}{8k^2} k_+^2 u_k v_k + L_4(k) u_k^2 \right\} \alpha_{\omega}^2 \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+2\omega}, \\
& -(\Omega - \omega_k - i\eta_k) \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} = - \sum_{\mathbf{g}} \frac{n}{N} \lambda'(\mathbf{k}) (u_k \langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega} - v_k^* \langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega}) e^{-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{g}} - \\
& - \sum_{\mathbf{g}} \frac{n}{N} \lambda'(\mathbf{k}) (\alpha_{\omega}^* u_k \langle J_{\mathbf{g}}^z \rangle_{\Omega-\omega} - \alpha_{\omega} v_k^* \langle J_{\mathbf{g}}^z \rangle_{\Omega+\omega}) e^{-i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{g}} - \\
& - \left\{ L_2(k) (u_k^2 + |v_k|^2) + \frac{\omega_M}{4k^2} (k_+^2 u_k v_k + k_-^2 u_k v_k^*) \right\} |\alpha_{\omega}|^2 \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} - \\
& - \left\{ \frac{\omega_M}{8k^2} k_-^2 u_k v_k^* + L_4(k) u_k^2 \right\} \alpha_{\omega}^{*2} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-2\omega}, \\
\langle J_{\mathbf{g}}^+ \rangle_{\Omega} & = - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_k u_{11}(\Omega) - v_k u_{21}(\Omega)] \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} + \\
& + [u_k u_{12}(\Omega) - v_k^* u_{11}(\Omega)] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} - \\
& - \frac{S}{16} \sum_{\mathbf{k}} u_{11}(\Omega) \lambda'(\mathbf{k}) \{ 2|\alpha_{\omega}|^2 (u_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} - v_k^* \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}) + \\
& + \alpha_{\omega}^2 (-v_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega-2\omega} + u_k \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-2\omega}) \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} - \\
& - \frac{S}{16} \sum_{\mathbf{k}} u_{12}(\Omega) \lambda'(\mathbf{k}) \{ 2|\alpha_{\omega}|^2 (-v_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} + u_k \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}) + \\
& + (\alpha_{\omega}^*)^2 (u_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+2\omega} - v_k^* \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega+2\omega}) \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}}, \\
\langle J_{\mathbf{g}}^- \rangle_{\Omega} & = - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) \{ [u_k u_{22}(\Omega) - v_k^* u_{21}(\Omega)] \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega} + \\
& + [u_k u_{21}(\Omega) - v_k u_{22}(\Omega)] \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} - \\
& - \frac{S}{16} \sum_{\mathbf{k}} u_{21}(\Omega) \lambda'(\mathbf{k}) \{ 2|\alpha_{\omega}|^2 (u_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} - v_k^* \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}) + \\
& + \alpha_{\omega}^2 (-v_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega-2\omega} + u_k \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-2\omega}) \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}} - \\
& - \frac{S}{16} \sum_{\mathbf{k}} u_{22}(\Omega) \lambda'(\mathbf{k}) \{ 2|\alpha_{\omega}|^2 (-v_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega} + u_k \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}) + \\
& + (\alpha_{\omega}^*)^2 (u_k \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+2\omega} - v_k^* \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega+2\omega}) \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}}, \\
\langle J_{\mathbf{g}}^z \rangle_{\Omega} & = - \frac{S}{2} \sum_{\mathbf{k}} \lambda'(\mathbf{k}) u_{33}(\Omega) \{ u_k \alpha_{\omega} \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+\omega} - v_k^* \alpha_{\omega} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega+\omega} + \\
& + u_k \alpha_{\omega}^* \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega-\omega} - v_k \alpha_{\omega}^* \langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega-\omega} \} e^{i\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}}.
\end{aligned} \tag{39}$$

从方程组(39)中消去  $\langle J_{\pm} \rangle_{\Omega}$ ,  $\langle J_z \rangle_{\Omega}$  得到  $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle_{\Omega}$ ,  $\langle b_{-\mathbf{k}}^+ \rangle_{\Omega+2\omega}$  的二元齐次方程。由非零解存在条件得不为零的富氏分量的  $\Omega$  方程为

$$\begin{aligned}
& \{ \Omega + \omega - i\eta_k - (\omega - \omega_k - \delta\omega_k) - i\Gamma_k \} \{ \Omega + \omega - i\eta_k + \\
& + (\omega - \omega_k - \delta\omega_k) - i\Gamma_k \} + |C|^2 = 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

从(40)解出  $\Omega$ :

$$\Omega = -\omega + i(\eta_k + \Gamma_k) \pm i\sqrt{|C|^2 - (\omega - \omega_k - \delta\omega_k)^2}. \quad (41)$$

当  $\Omega$  的虚数部分为负时就给出自旋波随时间指数式地增长。和讨论(19)式一样,我们用逐次近似求  $\Omega$ , 一级近似下可将(41)中  $\delta\omega_k, \Gamma_k$  中所含的  $\Omega$  用  $\omega$  代替。这样,自旋波的频移  $\delta\omega_k$  及附加的损耗  $\Gamma_k$  就分别为

$$\left. \begin{aligned} \delta\omega_k &= -\frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left(1 + \frac{1}{4} |\alpha_\omega|^2\right) [u_k^2 u'_{11}(\omega) + |v_k|^2 u'_{22}(\omega) - \\ &\quad - u'_{12}(\omega) u_k (v_k^* + v_k)] - \\ &\quad - \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 |\alpha_\omega|^2 [u'_{33}(0) u_k^2 + u'_{33}(-2\omega) |v_k|^2] + \\ &\quad + |\alpha_\omega|^2 \left\{ L_2(\hbar) (u_k^2 + |v_k|^2) + \frac{\omega_M}{4\hbar^2} (\hbar^2 u_k v_k^* + \hbar^2 u_k v_k) \right\}, \\ \Gamma_k &= \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left(1 + \frac{1}{4} |\alpha_\omega|^2\right) [u_k^2 u''_{11}(\omega) + |v_k|^2 u''_{22}(\omega) - \\ &\quad - u''_{12}(\omega) u_k (v_k^* + v_k)] + \\ &\quad + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 |\alpha_\omega|^2 [u''_{33}(0) u_k^2 + u''_{33}(-2\omega) |v_k|^2], \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

而

$$\begin{aligned} |c| &= \left| \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \left[ \frac{u_k}{8} (\alpha_\omega^*)^2 (v_k u_{12}(\omega) - u_k u_{11}^*(\omega)) - u_k^2 u_{33}(0) \alpha_\omega^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\omega_M}{8\hbar^2} \hbar^2 u_k v_k + L_4(\hbar) u_k^2 \right) \alpha_\omega^2 \right|. \end{aligned} \quad (43)$$

从(41)式虚部为零立刻可求得自旋波不稳定性出现的临界场为

$$h_{crit.} = \{(\eta_k + \Gamma_k)^2 + (\omega - \omega_k - \delta\omega_k)^2\}^{1/4} \left/ \left| \frac{c}{\hbar^2} \right|^{1/2} \right. \quad (44)$$

当不含希土离子时(即  $n = 0$ ), 按照 Suhl<sup>[3]</sup> 应有

$$\delta\omega_k = 0, \Gamma_k = 0, |c| = |L_4(\hbar) u_k^2 \alpha_\omega^2|.$$

但是,从(42), (43) 看出,当  $n = 0$  时,  $\delta\omega_k$  并不为 0,  $|c|$  也不只一项。增加的项似乎是 Suhl 所遗漏了的。

应该指出,和前面两个情形的结果相比较可知,由(42)式所给出的  $\delta\omega_k = \tilde{\omega}_k - \omega_k$  及  $\Gamma_k$  中第一项与(19)式相同,多出的项和第一项相比都是二级小量,即  $o(|\alpha_\omega|^2)$  或  $o(\omega, \alpha_\omega)$  的项。所以由于激发方式改变造成的自旋波耗损、频移的改变是很小的,可以不计。

除去在低温下,晶体的某些方向上出现能级很接近,而引起自旋波频率有很大的移动的情形外,为简单起见,我们可以略去微量希土离子引起的自旋波的频率移动,并略去(42)中  $\Gamma_k$  的二级小量。如 Suhl<sup>[3]</sup> 所做的那样,计算(44)给出的  $h_{crit.}$  的最小值,得到所激发的(相应于临界场最小的)自旋波  $\Theta_k \approx 0$ ,  $\hbar$  值由等式  $\omega = \tilde{\omega}_k \approx \omega_k, \omega = \tilde{\omega}_0 \approx \omega_0$  确定。经计算,当纵分支起主要作用时,该最小临界值为

$$h_{crit.} = \frac{\Gamma_0}{|\bar{\gamma}|} \left\{ \frac{\eta_k + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi''_{11}(\omega) \phi^2}{\frac{\omega_M}{2} - \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi''_{11}(0)} \right\}^{1/2}; \quad (45)$$

当横分支起主要作用时有

$$h_{\text{crit.}} = \frac{\Gamma_0}{|\bar{\gamma}|} \left\{ \frac{\eta_k + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi''_+(\omega)}{\frac{\omega_M}{2} - \frac{nS}{16N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_+(\omega)} \right\}^{1/2}. \quad (46)$$

在晶体的某些方向上,能级靠近时引起频移较大,需要考虑频移的影响. 此时

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_k &= \omega'_H + \omega_{ex} k^2 - \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_+(\omega), \\ \tilde{\omega}_0 &= \omega'_H + \gamma MN_T - \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 \chi'_+(\omega). \end{aligned}$$

所以,  $\tilde{\omega}_k = \tilde{\omega}_0$  条件给出

$$\omega_{ex} k^2 + \frac{nS}{2N} [\lambda'(0)^2 - \lambda'(\mathbf{k})^2] \chi'_+(\omega) = \gamma MN_T.$$

从(44)求得满足上述条件的临界场值

$$h_{\text{crit.}} = \frac{\Gamma_0}{|\bar{\gamma}|} \left\{ \frac{\eta_k + \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi''_+(\omega)}{\frac{\omega_M}{2} - \frac{nS}{16N} \chi'_+(\omega) [2\lambda'(0)^2 - \lambda'^2(\mathbf{k})]} \right\}. \quad (47)$$

(45)–(47)表明,由于希土离子引起一致进动及自旋波的附加损耗,因此将大大提高临界场值. 如文献[15]表明含2% Ho的YIG多晶临界场比纯YIG多晶临界场约大十倍<sup>1)</sup>. 又如在含10% Sm的YIG中观测到临界场比纯YIG的大二十倍<sup>[16]</sup>. 希土离子能大大地提高临界场值,对于改进微波器件的性能可能有用.

在主峰共振情况下,临界场的温度关系及各向异性与一致共振峰宽的情况就完全相同. 在低温下,希土离子能级发生偶然简并的某些晶体方向上,引起自旋波频移较大,这时相应激发较小的 $k$ 值. 由此而导致 $\lambda'(k)^2$ 的增大(但这增加还是不大的). 此外, $\chi'_+(\omega)$ ,  $\chi''_+(\omega)$ 也增加,因而其结果是在这些方向上,临界场突然增加到相当大的数值.

## 六、

利用关联函数方法可以讨论高功率下铁磁共振中的非线性过程. 我们对含少量希土离子的钆石榴石铁氧体的椭球样品作了讨论,给出了希土离子引起的自旋波频率的移动及附加的损耗,以及纵向注入一级过程及横向注入一级、二级非线性过程出现的临界场. 由目前理论来看,它们相当于不同实验条件下发生的不同过程,而并不是对外场的一级、二级响应的問題. 因而并不存在着象微扰理论中,高级效应比低级效应小的問題. 一般而言,希土离子对这些非线性过程的临界场的影响是很复杂的. 但当希土离子含量很小时,这一影响主要由附加的损耗 $\Gamma_k$ ,  $\Gamma_0$ 所决定. 由于 $\Gamma_k$ 和 $\Gamma_0$ 的特性,希土离子不但增加临界场值,而且决定了临界场随温度的改变及各向异性.

1) 需要说明,因为该实验用的是多晶样品,其他机构引起的一致进动的损耗相当大,因而希土离子引起的相对变化就比单晶要小得多. 不过即使这样,由于 $\Gamma_k/\eta_k$ 较大,因而临界场的增加(约十倍)要比一致共振峰宽的增加(约三倍)大些.

由于希土杂质对高功率铁磁共振现象的影响研究得不多,因此缺乏系统的实验结果(尤其是纵向注入的情形)来与理论作比较。目前所看到的一些实验结果都可以作定性解释。

值得强调的是在微波场与恒定磁场平行的情形,在实验上可以利用选择不同形状及外磁场、频率的办法激发不同  $\mathbf{k}$  的自旋波,同时在理论分析方面也比较简单。因而利用这样的技术,对研究希土离子的弛豫过程也是一有力的工具。

我们的讨论也可推广到尖晶石型铁氧体的情形,只需将总角动量改成自旋角动量而在哈密顿  $\mathcal{H}_0$  中以  $V(\mathbf{L}) + \lambda \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  来代替  $V(\mathbf{J})$  即可,这里  $\lambda \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$  表示自旋轨道耦合作用。这样的推广没有原则上的困难。同样的方法也可用来讨论希土离子对磁声效应的影响,我们拟另作专门的讨论。

对于临界以上的稳定态也可以和 Suhl<sup>[3]</sup> 及 Schlömann 等人<sup>[10]</sup> 的工作中那样,作同样的讨论。由于希土离子对此并不提供新的特征,因此我们就不再讨论了。

作者感谢孟宪振及蒲富恪同志的帮助和有益的讨论。

## 附 录 A

对横向一级非线性过程,我们以在纵分支起主要作用的情形为例,说明确定最小临界场的步骤。

在纵分支起主要作用时,关联函数  $u_{ij}$  中可略去  $\chi_{\pm}$ 。将关联函数(16)及(8)式代入(19)式的  $\tilde{\omega}_k$  中,在上述近似下有

$$\tilde{\omega}_k \simeq \omega_k - \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11}(Q) \phi^2 \frac{1}{\omega_k} \{ \omega'_H + \omega_{ex} k^2 + \omega_M \sin^2 \theta_k \sin^2 \varphi_k \}. \quad (\text{A.1})$$

已经指出,在

$$\tilde{\omega}_k = \frac{\omega}{2} \quad (\text{A.2})$$

条件下,临界场将有较小值。把(A.1)代入(A.2),并利用  $\omega_k$  的表示式(8),可求得

$$\begin{aligned} \omega'_H + \omega_{ex} k^2 = y = & -\frac{1}{2} \left( \omega_M \sin^2 \theta_k - \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 - \frac{\omega}{2} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \omega_M^2 \sin^4 \theta_k + \left[ \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 + \frac{\omega}{2} \right]^2 - \right. \\ & \left. - 2\omega_M \sin^2 \theta_k \cos 2\varphi_k \frac{nS}{2N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi'_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

另一方面从(29)式看到,当满足条件(A.2),且远离共振时,临界场  $h_{\text{crit.}} \sim (\omega - \tilde{\omega}_0)(\Gamma_k + \eta_k)$ 。按照(24)式,

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 - \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 u'_{11}(\omega) = \omega'_H + \gamma MN_T - \frac{nS}{2N} \lambda'(0)^2 u'_{11}(\omega).$$

所以,当  $\omega'_H$  增加时,因子  $\omega - \tilde{\omega}_0$  减小,从而  $h_{\text{crit.}}$  减小。但是从方程(A.3)看到,对于使临界场取极小值的一定的  $\theta_k$  而言,  $\omega'_H$  增大就要求  $k^2$  值减小,一直减小到  $k^2 \approx 0$  为止。否则,(A.3)就会给出非实数的解。此时的最大  $\omega'_H$  对应最小的临界值。

按照  $k^2 \approx 0$  的条件, 从方程 (A.3) 很容易就解出  $\sin^2 \theta_k$ , 这就是 (35) 所给出的. 这样我们就确定了相应于最低临阈场激发的自旋波的  $|k|$  及  $\theta_k$ .

当计算临阈场时, 在 (34) 式的分母中仍略去关联函数中的  $\chi_{\pm}$  部分. 同时因  $\phi \ll 1$ , 故可按此小量展开并略去二次及更高级的小量. 得到 (34) 的分母近似为

$$|\bar{\gamma}| u_k (u_k - |v_k|) \left\{ \omega_M \frac{k_x k_y}{k^2} - \phi \frac{nS}{N} \lambda'(\mathbf{k})^2 \chi''_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \cos \phi_k \right\}. \quad (\text{A.4})$$

按 (8) 算出  $u_k (u_k - |v_k|) = \frac{1}{2\omega_k} (\omega_k + y)$ . 用同样近似从 (19) 算出希土离子的损耗参数为

$$\Gamma_k \approx \frac{nS}{2N} \lambda'(k)^2 \chi''_{11} \left( \frac{\omega}{2} \right) \phi^2 (y + \omega_M \sin^2 \theta_k \sin^2 \phi_k) \frac{1}{\omega_k}. \quad (\text{A.5})$$

为使临阈场值取极小, 就是要分子的因子 (A.5) 小, 而分母 (A.4) 大. 考虑到含少量希土离子情形, 分母部分引起的变化比起分子部分小. 分子部分和  $\phi_k$  有关的项是与和  $\phi_k$  无关的项同一量级的, 而分母部分和  $\phi_k$  有关的项则比和  $\phi_k$  无关的项小得多. 因此  $\phi_k$  取值主要决定于分子部分取最小值. 这样可知,  $\phi_k = 0, \pi$ . 于是我们就得到最小临阈场的表示式 (36).

### 参 考 文 献

- [1] Damon, R. W., *Rev. Mod. Phys.*, **25** (1953), 239.
- [2] Bloembergen, N., Wang, S., *Phys. Rev.*, **93** (1954), 72.
- [3] Suhl, H., *J. Phys. Chem. Solids*, **1** (1957), 209.
- [4] White, R. M., Sparks, M., *Phys. Rev.*, **130** (1963), 632; Loos, J., *Czech. J. Phys.*, **11** (1961), 490.
- [5] 霍裕平、孟宪振, *物理学报*, **20** (1964), 387.
- [6] Holstein, T., Primakoff, H., *Phys. Rev.*, **58** (1940), 1098.
- [7] Walker, L. R., *Phys. Rev.*, **105** (1957), 390.
- [8] Kubo, R., *J. Phys. Soc., Japan*, **12** (1957), 570.
- [9] Тябликов, С. В., *Укр. Мат. Журнал*, **61** (1959), 287; Тябликов, С. В., *ФТТ*, **2** (1960), 362, 2009; Зубарев, Д. Н., *УФН*, **71** (1960), 771.
- [10] Schlömann, E., *J. Appl. Phys.*, **33** (1962), 527.
- [11] Schlömann, E., Joseph, R. J., *J. Appl. Phys.*, **32** (1961), 1006.
- [12] Dillon, J. F., Nielson, J. W., *Phys. Rev.*, **120** (1960), 105; Dillon, J. F., Walker, L. R., *Phys. Rev.*, **124** (1961), 1401.
- [13] Гуревич, А. Г., Мэн Сянь-чжень (孟宪振), Старобинец, С. С., Соловьев, В. И. и Мыльникова, И. Е., *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **28** (1964), 462.
- [14] Kasuya, T., *Prog. Theor. Phys.*, **12** (1954), 802; Schlömann, E., *Phys. Rev.*, **121** (1961), 1312; Sparks, M., London, R., Kittel, C., *Phys. Rev.*, **122** (1961), 791.
- [15] Green, J. J., Schlömann, E., *Trans. IRE, MTT-8* (1960), 100; Schlömann, E., Green, J. J., Milano, V., *J. Appl. Phys.*, **31** (1960), 386S.
- [16] Harrison, R. G., Hodges, L. R. Jr., *J. Amer. Cer. Soc.*, **44** (1961), 214.

## THE INFLUENCE OF RARE-EARTH IONS ON THE FERROMAGNETIC RESONANCE AT HIGH POWER LEVELS

CHENG CHIN-CHI LAI WU-YAN

### ABSTRACT

The method of correlation function has been utilized to discuss the nonlinear effects in the ferromagnetic resonance at high power levels. For ordinary ferromagnetic crystals, the present theory includes the results of the semiclassical theory developed by H. Suhl as a classical limit. In the case of YIG doped with rare-earth ions, the frequency shift and the additional losses due to the rare-earth ions have been discussed. Besides, the threshold field of the so-called first order process with parallel pumping and the first and second order processes with perpendicular pumping have also been derived. The results obtained show that the rf critical magnetic field increases with the addition of rare-earth ions. In samples with small concentration of rare-earth ions, the influence on the threshold is attributed to the increase of the losses of spin waves. The temperature dependence and the anisotropy of the threshold field are entirely similar to those of the ferromagnetic resonance linewidth at low power level. The experimental results may be satisfactorily explained by the present theory.