

合金薄膜的临界磁場*

吳 杭 生

提 要

本文把文献[2]的理論推广到含有杂质的超导薄膜情形,得出合金薄膜的二級相变临界磁場。本文得到的結果,在 $2d \gg \xi_0$ 而 l 任意时,或者 $2d \ll \xi_0$ 而 $l \ll 2d$ 时,趋于 Гинзбург-Ландау 理論;在 $2d < \xi_0$ 而 $l > 2d$ 时,与 Гинзбург-Ландау 理論不同 (l 是杂质所决定的电子平均自由程)。理論符合 Blumberg 实验。

一、引 言

超导薄膜的厚度比相关长度 ξ_0 小时,即使在 T_c 附近,电流和矢势的关系仍是非局域的。实验指出^[3],厚度比 ξ_0 小的超导膜的性質和局域的 Гинзбург-Ландау 理論(以下簡称为 ГЛ 理論)^[1]存在着显著的分歧。在文献[2, 3]中,雷嘯霖和作者研究了在 T_c 附近,超导薄膜在磁場中的行为,給出有关的理論。

本文是以前工作^[2]的繼續¹⁾。在本文中,我們把 Edwards^[4], Абрикосов 和 Горьков^[5,6] 处理含有杂质的体系的 Green 函数方法推广到薄膜情形,計算出合金薄膜的二級相变临界磁場 ($T \sim T_c$)。把本文的結果和 Blumberg 的实验数据^[7]进行了比較,实验和理論的符合是滿意的。

二、理 論

文献[2]中的基本方程組很容易被推广到合金薄膜的情形。进行和文献[2]相类似的討論,不难証明,薄膜合金的二級相变临界磁場 H_c 是由以下方程决定的:

$$2d = K_0 + K_1 + K_2, \tag{1}$$

其中

$$K_0 = |g|kT \sum_{\omega} \iint d\mathbf{l} d\mathbf{r}_1 \overline{G_{V\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{r}) G_{V-\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{r})},$$
$$K_1 = 2|g|kT \sum_{\omega} \int \cdots \int d\mathbf{l} d\mathbf{s} d\mathbf{m} d\mathbf{r}_1 \overline{G_{V\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{r}) G_{V-\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{s}) \frac{i e \hbar H_c}{m c} \times}$$
$$\times (s_1 - d) \frac{\partial}{\partial s_2} G_{V-\omega}^0(\mathbf{s}\mathbf{m}) \frac{i e \hbar H_c}{m c} (m_1 - d) \frac{\partial}{\partial m_2} G_{V-\omega}^0(\mathbf{m}\mathbf{r})},$$

* 1963年10月14日收到。

1) 本文所采用的符号,如果没有特殊的说明,都和文献[2]相同。

$$K_2 = |g|kT \sum_{\omega} \int \cdots \int d\mathbf{l} d\mathbf{s} d\mathbf{m} d\mathbf{r}_1 \overline{G_{V\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{s}) \frac{ie\hbar H_C}{mc} (s_1 - d) \times} \\ \times \frac{\partial}{\partial s_2} G_{V\omega}^0(\mathbf{s}\mathbf{r}) G_{V-\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{m}) \frac{ie\hbar H_C}{mc} (m_1 - d) \frac{\partial}{\partial m_2} G_{V-\omega}^0(\mathbf{m}\mathbf{r}), \quad (2)$$

$G_{V\omega}^0(\mathbf{r}\mathbf{r}')$ 是单电子 Green 函数¹⁾,

$$\left\{ i\omega_n + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - U(\mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) - \mu \right\} G_{V-\omega}^0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3)$$

$U(\mathbf{r})$ 是边界势能, $V(\mathbf{r})$ 是杂质势能:

$$V(\mathbf{r}) = \sum_a U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a), \quad (4)$$

\mathbf{R}_a 是杂质原子的坐标. K_n 的被积函数上的一横代表对杂质位置取平均²⁾. 在得到方程 (1), (2) 时, 我們假定了能隙 $\Delta(\mathbf{r})$ 在对杂质位置平均后和 \mathbf{r} 无关.

引入³⁾

$$G_{V\omega}^0(\mathbf{r}\mathbf{r}') = \int \cdots \int \frac{dpdqdp'dq'}{(2\pi)^4} \sum_{kk'} G_{V\omega}^0(pqk, p'q'k') \times \\ \times e^{ipr_2 + iq'r_3 - ip'r'_2 - iq'r'_3} \varphi_k(r_1) \varphi_{k'}(r'_1), \quad (5)$$

$G_{V\omega}^0(pqk, p'q'k')$ 的图解如图 1. 每根粒子綫对应因子 $G_{V\omega}^0(pqk) = \frac{1}{i\omega - \xi_k}$, 頂点“×”对应因子 $V(pqk, p'q'k')$:

$$V(pqk, p'q'k') = \sum_a \int d\mathbf{r} U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a) e^{-i(p-p')r_2 - i(q-q')r_3} \varphi_k(r_1) \varphi_{k'}(r'_1). \quad (6)$$

在金属中, 由于电子的屏蔽, 杂质势能 $U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a)$ 是短程作用, 为了简化計算起見,

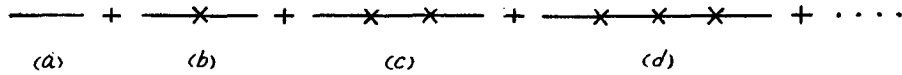


图 1

把 $U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a)$ 近似成局域的 δ 函数势能:

$$U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a) = U_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a). \quad (7)$$

1) 为了方便起見, 在本文中, Green 函数滿足如下的边界条件: 在沿着长寬方向的边界上滿足周期性边界条件, 而沿着厚度方向的边界上 Green 函数的数值等于零. 因此, 用来进行 Fourier 展开的基底是

$$\psi_{pqk}(r_1 r_2 r_3) = \varphi_k(r_1) \frac{1}{2\pi} e^{i(pr_2 + qr_3)}, \\ \varphi_k(r_1) = \sqrt{\frac{1}{d}} \sin kr_1 \quad \left(k = \frac{n\pi}{2d}, n = 1, 2, 3, \dots \right).$$

本文以及文献 [2, 3] 的结果是不依赖于边界条件的.

2) 平均定义^[4,5]

$$\overline{f(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \cdots \mathbf{R}_n)} = \frac{1}{\Omega^n} \int \cdots \int d\mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_2 \cdots d\mathbf{R}_n f(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \cdots \mathbf{R}_n),$$

Ω 是体积, 积分的区域限于超导膜的內部.

3) 本文采用了和文献 [2] 不同的规定. 在本文中, 所有对 $k = \frac{n\pi}{2d}$ 的求和都是 $\sum_k = \sum_{n=1,2,3,\dots}$.

(6)式簡化成

$$V(pqk, p'q'k') = \frac{U_0}{2d} \sum_a e^{-i(p-p')R_{2a} - i(q-q')R_{3a}} \cos(k-k')R_{1a} - \frac{U_0}{2d} \sum_a e^{-i(p-p')R_{2a} - i(q-q')R_{3a}} \cos(k+k')R_{1a}. \quad (8)$$

在对杂质位置平均后, 图 1(b) 只引起单粒子能 ξ_{pqk} 的自能修正, 经过能量零点适当的选择后, 图 1(b) 的矩阵元等于零. 对图 1(c), (d) 等取平均后, 可以得到二种类型的 Feynman 图, 一类是满足动量守恒的 [例: 图 2(a), (b)], 另一类是(至少有一个中间态)不满足动量守恒的 [例: 图 2(c)–(f)]. 动量不守恒的 Feynman 图以及如图 2(g), (h)所

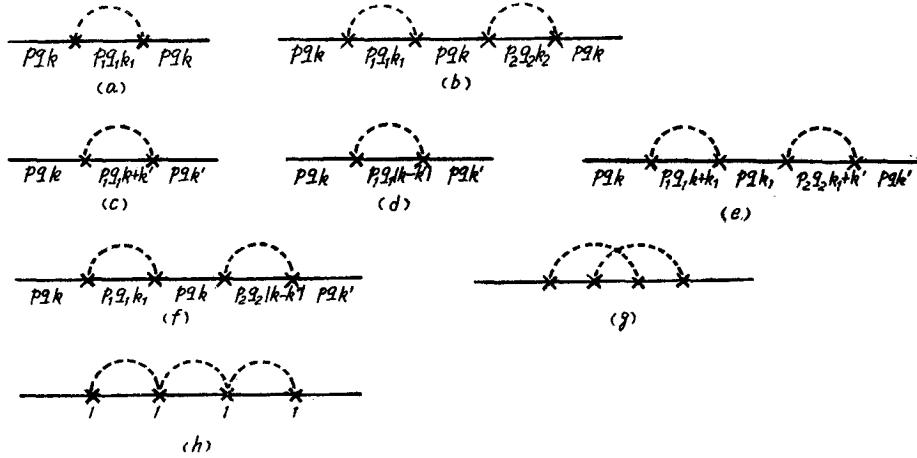


图 2

示的动量守恒的 Feynman 图中, 至少有一个粒子线的动量是不独立的, 因此它们对 G_{ω} 或者对力学量的贡献可以略去^[4,5]. 我们只需考虑如图 2(a), (b) 所示的 Feynman 图, 因此 $G_{\omega}^0(pqk, p'q'k') = G_{\omega}(pqk)(2\pi)^2\delta(p-p')\delta(q-q')\delta_{kk'}$, $G_{\omega}(pqk)$ 是由下边的 Dyson 方程给出:

$$G_{\omega}(pqk) = G_{\omega}^0(pqk) + G_{\omega}^0(pqk) \frac{nU_0^2}{(2d)^2} \iint \frac{dp_1 dq_1}{(2\pi)^2} \sum_{k_1} G_{\omega}^0(p_1 q_1 k_1) G_{\omega}(pqk), \quad (9)$$

其中 n 表示单位体积中杂质原子数目. 由(9)得到

$$G_{\omega}(pqk) = \frac{1}{i\omega\eta - \xi}, \quad (10)$$

而

$$\eta = 1 + \frac{\hbar}{2\tau|\omega|}, \quad (11)$$

τ 是弛豫时间, $\tau^{-1} = \frac{nm\rho_0 U_0^2}{(2d)\pi\hbar^3}$.

定义:

$$K_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d\mathbf{l} G_{V-\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{r}) G_{V\omega}^0(\mathbf{l}\mathbf{r}'), \quad (12)$$

把 $K_{\omega}(pqk, p'q'k') = \iint d\mathbf{r}d\mathbf{r}' K_{\omega}(\mathbf{r}\mathbf{r}') e^{-ip'r_2 - iq'r_3 - ip'r'_2 - iq'r'_3} \varphi_k(r_1) \varphi_{k'}(r'_1)$ 的 Feynman 图 (图 3) 对杂质位置取平均后, 同样给出动量守恒的和动量不守恒的 Feynman 图. 对于计算积分 K_0, K_1 和 K_2 来说, 只有满足动量守恒的“梯子图” (见图 4) 是重要的, 因为其他动量守恒的图以及所有动量不守恒的图都至少包含一根粒子线, 它的动量是不独立的, 这些图的贡献是很小的, 可以略去^[5]. 在这个近似下, $\overline{K_{\omega}(pqk, p'q'k')} = K_{\omega}(pqk)(2\pi)^2 \delta_{(p+p')}\delta_{(q+q')}\delta_{kk'}$, 而 $K_{\omega}(pqk)$ 由下边的积分方程给出:

$$K_{\omega}(pqk) = G_{-\omega}(-p - qk)G_{\omega}(pqk) \left\{ 1 + \frac{nU_0^2}{(2d)^2} \iint \frac{dp_1 dq_1}{(2\pi)^2} \sum_{k_1} K_{\omega}(p_1 q_1 k_1) \right\}. \quad (13)$$

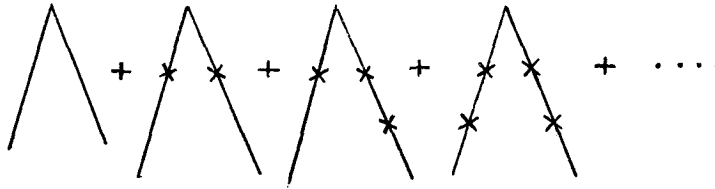


图 3

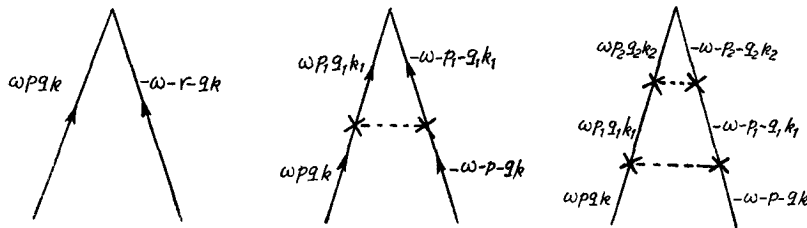
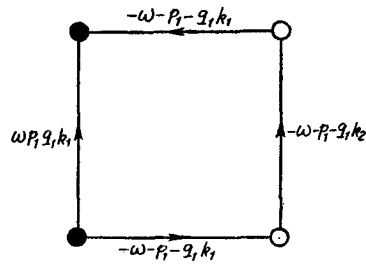
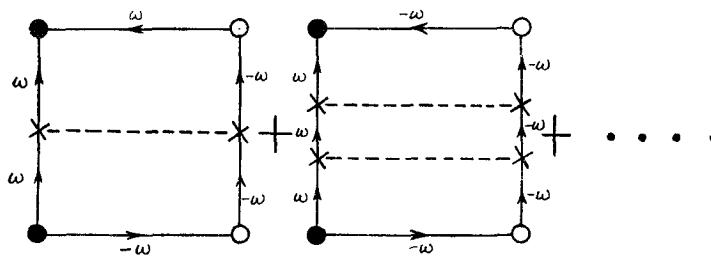


图 4



(a)



(b)

图 5

因此求得

$$K_\omega(pqk) = \eta G_{-\omega}(-p - qk) G_\omega(pqk). \quad (14)$$

根据定义知

$$K_0 = |g| kT \sum_\omega \iint \frac{dpdq}{(2\pi)^2} \sum_k K_\omega(pqk),$$

把(14)代入,求得

$$K_0 = 2d \left\{ N(0) |g| \ln \frac{T_c}{T} + 1 \right\}.$$

对积分 K_1 起主要贡献的 Feynman 图^[6]如图 5. 其中顶点“·”和“○”分别表示杂质的和磁场的顶角, 它们对应的矩阵元分别是 η 和 $-\left(\frac{eH_c \hbar}{mcd}\right) \left\{ \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} - \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \right\} p_1$ ($k_1 + k_2 =$ 奇数). 在杂质势能取 δ 函数的近似下, 图 5(b) 的矩阵元等于零, 因此

$$\begin{aligned} K_1 = & -\frac{2e^2 \hbar^2 H_c^2}{m^2 c^2 d^2} |g| kT \sum_\omega \iint \frac{dpdq}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ (k_1 + k_2 = \text{奇数})}} \eta^2 [G_{-\omega}(p_1 q_1 k_1)]^2 p^2 \left\{ \frac{1}{(k_1 - k_2)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \right\}^2 G_\omega(p_1 q_1 k_1) G_{-\omega}(p_1 q_1 k_2) = -\frac{2e^2 \hbar^2 H_c^2}{m^2 c^2 d^2} |g| kT \times \\ & \times \sum_\omega \eta^2 \iint \frac{dpdq}{(2\pi)^2} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ (k_1 + k_2 = \text{奇数})}} \frac{p^2}{(i\omega\eta - \xi_1)(i\omega\eta + \xi_1)^2 (i\omega\eta + \xi_2)} \left(\frac{1}{(k_1 - k_2)^2} - \frac{1}{(k_1 + k_2)^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (15)$$

利用我们在文献[2]中所说明的计算方法, 得到¹⁾

$$K_1 = -N(0) |g| \frac{31\zeta(5) e^2 H_c^2 p_0 d^4}{4kT c \pi^3 m c^2} \Phi_l(\sigma), \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \Phi_l(\sigma) &= \frac{32}{31\zeta(5)} \frac{16}{\pi^3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^5} \left(G_l^i(\sigma) - \frac{\sigma}{2l+1} F_l^i(\sigma) \right), \\ G_l^i(\sigma) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2l+1}{(2n+1+\rho)\sigma}, \\ F_l^i(\sigma) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} (2n+1+\rho) \left(1 - \frac{(2n+1+\rho)\sigma}{2l+1} \operatorname{tg}^{-1} \frac{2l+1}{(2n+1+\rho)\sigma} \right), \\ \rho &= \frac{\hbar}{2\pi\tau kT_c} = \frac{1}{1.14} \frac{\xi_0}{l}, \\ \sigma &= 0.36 \frac{2d}{\xi_0}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$l = \nu_0 \tau$ 表示由杂质所限制的电子自由行程. 用类似的方法可计算得到 K_2 , 它是和 K_1 相等的.

将上面计算得到的积分 K_0 , K_1 和 K_2 代入(1), 得到合金薄膜的二级相变临界磁场为¹⁾

1) 和文献[2]解释的理由相似, 公式(16)和(18)适用于 $d \gg d^*$ 的情形, 其中 $2d^* = \left(\frac{\xi_0}{0.36\rho_0\eta} \right)$, $\eta = 1 + \frac{\hbar}{2\tau|\omega|} \sim 1 + \frac{\xi_0}{0.72l}$.

$$\frac{H_C^2}{H_{CM}^2} = 3 \frac{\delta_0^2(T)}{d^2} \frac{\xi_0}{d} \frac{1}{\Phi_\tau(\sigma)} \quad (\Delta t \ll 1). \quad (18)$$

在杂质浓度趋于零时, $\rho \rightarrow 0$, (18) 趋于純的超导薄膜的临界場公式^[2].

最后, 我們指出, 利用这节的方法, 不难求出超导合金薄膜的能隙、磁矩和临界厚度的表达式, 它們可以直接由文献 [2] 相应的公式(39), (27)和(51)将其中出現的 G 和 F 函数用 $G_i^*(\sigma)$ 和 $F_i^*(\sigma)$ 替代后得到.

三、討 論

本文所得到的結果, 在下面三种极限情形下, 即 (i) $2d \gg \xi_0$; (ii) $2d \ll \xi_0$, $l \ll 2d$ 和 (iii) $2d \ll \xi_0$, $l > 2d$ 情形下予以討論.

在前两种情形中, 由超导体尺寸所引起的非局域效应是不重要的, 可以采用局域近似, 此时 ГЛ 理論是成立的. 在这两种情形下, (18) 中出現的两个参量 σ 和 ρ 分別滿足 (i) $\sigma \gg 1$ 和 (ii) $\sigma \ll 1$, 而 $\sigma\rho \gg 1$. 不难証明, (18) 趋于 ГЛ-Горьков 理論的結果^[1,6]:

$$\frac{H_C^2}{H_{CM}^2} = 6 \frac{\delta_0^2(T)}{d^2} \frac{1}{\chi(\rho)}, \quad (19)$$

而

$$\chi(\rho) = \frac{8}{7\zeta(3)} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2\rho} \left(\psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \rho\right) \right) \right]. \quad (20)$$

在后一种情形中, 非局域效应显著. 在这个情形下, 参量 σ , ρ 存在 $\sigma \ll 1$ 而 $\sigma\rho < 1$ 的关系. 把 $F_i^*(\sigma)$ 和 $G_i^*(\sigma)$ 按 $\frac{\rho}{\lambda} = \frac{\rho\sigma}{2l+1}$ 作 Taylor 級数展开, 經過复杂的但又是初等的計算, 得出

$$\Phi_\tau(\sigma) = 1 - \mu_\tau \left(\frac{d}{\xi_0} \right), \quad (21)$$

其中

$$\mu_\tau \left(\frac{d}{\xi_0} \right) = 0.78 \frac{d}{l} + 0.186 \frac{2d}{\xi_0} \left(\ln \frac{\xi_0}{2d} + 2.29 \right) \left(1 - \frac{d}{l} \right), \quad (22)$$

在上式中, 我們略去 $O\left(\frac{d^2}{l^2}\right)$ 和 $O\left(\frac{d^3}{\xi_0^3}\right)$ 的小項. 把(21)代入(18), 得到

$$\frac{H_C}{H_{CM}} = \sqrt{3} \frac{\delta_0(T)}{d} \left(\frac{\xi_0}{d} \right)^{1/2} \frac{1}{\left[1 - \mu_\tau \left(\frac{d}{\xi_0} \right) \right]^{1/2}}. \quad (23)$$

以上的結果表明, 起源于尺寸所引起的非局域效应因杂质的存在而減弱. 对于 $d \ll \xi_0$ 的超导膜來說, 临界磁場先随着杂质浓度的增加而加大(在 $l > 2d$ 时), 在浓度足够大时, 随着杂质浓度增加而減小, 最后趋于 ГЛ-Горьков 理論的結果(在 $l \ll 2d$ 时). 临界磁場和厚度的依賴关系, 随着杂质浓度的增加, 由和 $d^{3/2}$ 成反比的关系轉变成和 d 成反比的关系.

Blumberg^[7] 測量了含有 In 的 Sn 膜的临界磁場, 膜的厚度界于 2×10^{-6} cm 到 5×10^{-5} cm 之間, Blumberg 沒有分別給出每个膜的自由行程 l , 仅給出 l 的数值位于 1×10^{-5} cm 到 5×10^{-5} cm 之間的数据.

Blumberg 实验所用的膜,大部分都在(23)适用的范围之内,引入参量 $\delta(0, d)^{[3]}$,

$$\delta(0, d) = \frac{1}{1510(\Delta t)^{1/2}} Hcd. \quad (24)$$

把(24)和(23)比较,知 $\delta(0, d)$ 的理论公式是

$$\delta(0, d) = \frac{2.36\hbar c}{1510e\xi_0^{1/2}(2d)^{1/2}} \frac{1}{\left[1 - \mu_r \left(\frac{d}{\xi_0}\right)\right]^{1/2}}. \quad (25)$$

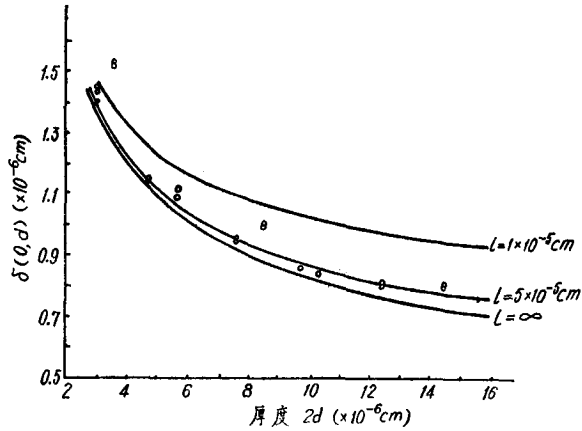


图6 In-Sn 合金薄膜的 $\delta(0, d)$ 随着厚度 $2d$ 变化关系

— 为理论曲线; o 为实验点

在图6中画出了 $\delta(0, d)$ 的理论曲线和实验点。理论曲线是根据(25)计算得到的,取 $\xi_0 = 2.1 \times 10^{-5}$ cm, l 等于 1×10^{-5} cm, 5×10^{-5} cm 和无穷大。实验点是根据 Blumberg^[7] 所测得的临界磁场数据(在 $\Delta t = 0.106$, 0.078 和 $\Delta t = 0.052$ 时)按照(24)的定义计算得到的。为了比较,在同图中我们还画出纯的 Sn 膜的 $\delta(0, d)$ 理论曲线。除了 $2d = 3.6 \times 10^{-6}$ cm 膜外,实验点都界于 $l = 1 \times 10^{-5}$ cm 和 $l = 5 \times 10^{-5}$ cm 的理论曲线之间。理论和实验的符合是满意的。 $2d = 3.6 \times 10^{-6}$ cm 膜的实验点位于曲线之外,可能是由于它的自由行程比 10^{-5} cm 更小所致。

参 考 文 献

- [1] Гинзбург, В. Л. и Ландау, Л. Д., *ЖЭТФ*, **20** (1950), 1064.
- [2] 吴杭生、雷啸霖, *物理学报*, **20** (1964), 873.
- [3] 雷啸霖、吴杭生, *物理学报*, **20** (1964), 991.
- [4] Edwards, S. F., *Phil. Mag.*, **3** (1958), 1020.
- [5] Абрикосов, А. А. и Горьков, Л. П., *ЖЭТФ*, **35** (1958), 1558.
- [6] Горьков, Л. П., *ЖЭТФ*, **37** (1959), 1407.
- [7] Blumberg, R. H., *J. Appl. Phys.*, **33** (1962), 1822.

CRITICAL MAGNETIC FIELD OF A SUPERCONDUCTING ALLOY FILM

WU HANG-SHENG
(*Peking University*)

ABSTRACT

In this paper, the theory developed in previous paper^[2] is extended to a thin superconducting film containing impurities. The critical magnetic field for the second order phase transition of the superconducting alloy film has been obtained. The results obtained are reduced to those of the Ginzburg-Landau theory when $2d \gg \xi_0$ with arbitrary l or $2d \ll \xi_0$ with $l \ll 2d$, but are different when $2d < \xi_0$ with $l > 2d$, l being the mean free path of the electrons. The theory agrees with Blumberg's experiment.