

在微扰论中的 Regge 割线*

张 宗 燧

(中国科学院)

提 要

本文用微扰论研究了一个 s 道的梯形图在动量传递 t 变大及几个外质量也变大时 ($\sim \sqrt{t}$) 的渐近性质. 又用了微扰论直接研究了当一个 s 道的梯形图与一个寻常极点平行地结合时整个振幅在 t 道的虚部的渐近性质应如何变化, 证明了如果上述组合图所产生的 s 道分波振幅具有 Regge 割线, 则割线开端必须较现有理论所给出的位置为左.

一、引 言

在多边缘碰撞理论中, Amati^[1] 等提出了散射振幅可能在角动量 l 的复平面中具有割线 (以下称为 Regge 割线), 割线在 l 的右半平面出现. Mandelstamm^[2] 研究了图 1. (此处 $(p_A + p_B)^2$ 取为 s , $(p_A - p_{A'})^2$ 取为 t , 与文献 [2] 中的 s, t 对易.) 图中的梯形具有 Regge 极点的性质, 因此, 图 1 即是一个 Regge 极点与一寻常极点的组合. Mandelstamm 指出: s 道的分波振幅的 Regge 割线所以能在角动量 l 复平面的右半平面出现, 是因为在考虑振幅的 t 道吸收部分时, 只考虑了象 UV 的中间态, 而忽略了其他中间态, 例如 XY . 不应该忽略其他中间态, 无疑是正确的.

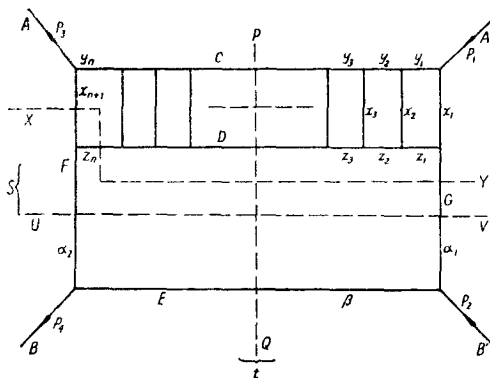


图 1

为求整个图的振幅, 他考虑了 s 道的色散关系, 认为中间态只有 QP 一种 (三粒子中间态). 这样的计算有同样的缺点, 因为他忽略了其他中间态. 在此计算中, 他求出费曼图 $ABCDE$ 的振幅. 在求此振幅的过程中, 他先求费曼图 $AFCD$ 的振幅, 这个振幅与寻常梯形图的不同只是 F 的动量不在质量壳上. 为求此振幅, 他写下了一个 Omnc 型的色散积分, 这里又假定了中间态只有二个粒子, 故产生了同样的缺点.

此外, Wilkin^[3] 直接地用微扰论计算了一个 Regge 极点与一寻常极点所组合的振幅 (如图 2). 图中 CD 为 Regge 极点, 振幅在 p_A, p_F 的质心系中为

$$(2\alpha + 1) \frac{R(s_1, p_A^2, p_F^2, p_{A'}^2, p_{F'}^2) P_\alpha(-\cos \theta)}{|\mathbf{p}_A| |\mathbf{p}_{A'}| \sin \pi \alpha(s_1)}, \quad (1)$$

* 1964 年 9 月 28 日收到.

(4)式右方成为

$$-\frac{1}{t} \theta(-d) \pi \frac{1}{(n-1)!} \left(\log \frac{\epsilon t}{|d|} \right)^{n-1}. \quad (5)$$

因此, (2)式对 t 的虚部可写为

$$-\frac{(-)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial d^m} \frac{1}{t} \theta(-d) \pi \frac{1}{(n-1)!} \left(\log \frac{\epsilon t}{|d|} \right)^{n-1}.$$

上式的主要项可写为

$$-\frac{1}{m t d^m} \theta(-d) \pi \frac{1}{(n-2)!} (\log t)^{n-2}. \quad (6)$$

以上为 $t \rightarrow +\infty$ 的虚部. 同样, 在 $t \rightarrow -\infty$ 的虚部为

$$-\frac{1}{m t d^m} \theta(d) \pi \frac{1}{(n-2)!} (\log |t|)^{n-2}.$$

由色散关系, 我们知 $t \rightarrow \infty$ 的振幅与 $t \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$ 的虚部的关系. 由此, 得 $t \rightarrow +\infty$ 的(2)式为

$$\frac{1}{m^t d^m} (\log t)^{n-1} \frac{1}{(n-2)!}. \quad (7)$$

当 $m = n-1$ 时, 文献[4]的结果为

$$\frac{1}{(n-1) t d^{n-1}} (\log t)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!},$$

与上式略有不同. 注意, 如果自 $m=1$ 的(2)式出发, 那末先对 α_n, α_{n-1} 积分, 取对 t 的虚部, 进行类似的计算, 也获得(7)式等等.

註 $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; y_1, y_2, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n; \alpha_1, \alpha_2, \beta$ 为费曼参数, 如图1所示. 为了讨论梯形图, 在图1中取去 β 线, 以 α_1, α_2 线为外线, 动量为 p_2, p_4 . 设内质量均为 m , 设 $t = (p_1 - p_3)^2 \rightarrow \infty$. 先设 p_2^2 较大, $\sim t^{\frac{1}{2}}$, 而令 p_1^2, p_3^2, p_4^2 不变大. 依照标准理论, 费曼振幅(除一常数倍外)为

$$\int \cdots \int \frac{1}{D^{n+1}} \delta(\Sigma x + \Sigma y + \Sigma z - 1) \Pi dx \Pi dy \Pi dz, \quad (8)$$

D 的指数为内线数(此处为 $3n+1$), 减去绕流动量(指独立的, 围绕一封闭路而流的内线动量)数的两倍(此处为 $2n$). 注意, 因子 $\delta(\Sigma x + \cdots)$ 可以取去^[6]. 此时应将积分极限改为 $(0, \infty)$, 而同时在积分号下引入一适当函数 $f(\Sigma x + \Sigma y + \Sigma z)$. 注意此 f 必须可积, 因此不能为一常数.

D 的形式为

$$t x_1 x_2 \cdots x_{n+1} + p_2^2 \left(\sum_i x_1 \cdots x_i z_i L_{i+1, n} \right) + p_4^2 (\sum L_{1, i-1} z_i x_{i+1} \cdots x_{n+1}) + d, \quad (9)$$

L_{ij} 在 $i = j+1$ 时为 1, 在 $i > j+1$ 时为零; 在 $i \leq j$ 时为

$$\begin{vmatrix} x_i + y_i + z_i + x_{i+1} & -x_{i+1} & 0 & 0 & \cdots \\ -x_{i+1} & x_{i+1} + y_{i+1} + z_{i+1} + x_{i+2} & -x_{i+2} & 0 & \cdots \\ 0 & -x_{i+2} & \cdots & -x_{i+3} & \cdots \\ 0 & 0 & -x_{i+3} & \cdots & \cdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & x_j + y_j + z_j + x_{j+1} \end{vmatrix}.$$

d 代表其他的項。在 t , p_2^2 較大而 p_1^2, p_3^2, p_4^2 不大时, 显然应该研究如下的积分:

$$\int_0^\epsilon \cdots \int_0^\epsilon \frac{1}{\{x_1 \cdots x_{n+1} t + p_2^2 x_1 z_1 L + d\}^{n+1}} dz_1 \Pi dx \quad L = L_{2,n} (x \equiv 0), \quad (10)$$

在分母指数为 2 时, 上式为

$$\int \cdots \int dx_2 \cdots dx_{n+1} dz_1 \frac{\epsilon}{[x_2 \cdots x_{n+1} t \epsilon + p_2^2 z_1 L \epsilon + d]} \frac{1}{d}. \quad (11)$$

因此(10)式为

$$\begin{aligned} & \frac{(-)^{n-1}}{n!} \frac{\partial}{\partial d^{n-1}} \int \cdots \int dx_2 \cdots dx_{n+1} dz_1 \frac{\epsilon}{[x_2 \cdots x_{n+1} t \epsilon + p_2^2 z_1 L \epsilon + d]} \frac{1}{d} = \\ & = \frac{\epsilon}{nd} \int \cdots \int dx_2 \cdots dx_{n+1} dz_1 \frac{1}{[x_2 \cdots x_{n+1} t \epsilon + p_2^2 z_1 L \epsilon + d]^n} + \cdots, \end{aligned} \quad (12)$$

式中右方未写出項为 t, p_2^2 的同一数量級項, 以后取去, 而在第一項上乘以 $f(n)O(1)$. 考虑(12)在 $t \rightarrow \infty$ 时的漸近值, 利用(7)得

$$\frac{1}{n} O(1) f(n) \int dz_1 \frac{1}{(n-1)t(p_2^2 z_1 L \epsilon + d)^{n-1}} (\log t)^{n-1} \frac{1}{(n-2)!}. \quad (13)$$

令 p_2^2 取一小虛数部分, 成一复数, 积分(13)式得

$$-\frac{1}{n-2} \frac{1}{n!} O(1) f(n) \frac{1}{t} (\log t)^{n-1} \frac{1}{p_2^2 L \epsilon} \left\{ \frac{1}{(p_2^2 L \epsilon^2 + d)^{n-2}} - \frac{1}{d^{n-2}} \right\}. \quad (14)$$

在 p_2^2 取大值时近似于

$$\frac{1}{n-2} \frac{1}{n!} O(1) f(n) \frac{1}{t} (\log t)^{n-1} \frac{1}{(p_2^2 L \epsilon)} \frac{1}{d^{n-2}}. \quad (15)$$

由此可見, 振幅除含有因子 t^{-1} 外, 还含有因子 $(p_2^2)^{-1}$. 再放入 $p_2^2 x_1 x_2 z_2 L'$ 項, 便获得 $(p_2^2)^{-2}$ 的因子等等. 这样的振幅对 n 取和后, 所得結果将不同于(1)式, 即远較(1)式为小.

如果让 p_2^2, p_4^2 均取值 $\sim \sqrt{t}$, 可以作类似的討論, 得类似的結論. 事实上, 如(10)式分母改写为

$$(x_1 x_2 \cdots x_{n+1} t + p_2^2 x_1 z_1 L_1 + p_4^2 x_{n+1} z_n L_2 + d)^n,$$

可先对 x_1, x_{n+1} 进行积分, 得类似(11)的式子, 再对 $x_2, \cdots, x_n$ 积分[利用(7)式], 最后对 z_1, z_n 积分, 結果是相似的.

三、梯形图与极点的組合

現在討論图 1 的振幅在 t 道中的虛部当 $t \rightarrow \infty$ 时的漸近值. 除一常数倍外, 振幅为

$$\int \cdots \int \Pi dx \Pi dy \Pi dz \Pi d\alpha \Pi d\beta \frac{1}{D^{n+2}} \delta(\Sigma x + \Sigma y + \Sigma z + \Sigma \alpha + \beta - 1), \quad (16)$$

$$D = (C'\alpha_1\alpha_2 + P'_1\alpha_1 + P'_2\alpha_2 + Q')t + d, \quad (17)$$

而 d 中不含有 t , C' , P'_1 , P'_2 , Q' 为文献[4]所给出:

$$C' = L_{1,n},$$

$$P'_1 = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} + \sum_i L_{1,i-1} z_i x_{i+1} \cdots x_{n+1},$$

$$P'_2 = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} + \sum_i x_1 \cdots x_i z_i L_{i+1,n},$$

$$Q' = x_1 \cdots x_{n+1} (\Sigma z + \beta) + \Sigma x_1 \cdots x_i z_i L_{i+1,i-1} z_i x_{i+1} \cdots x_{n+1}. \quad (18)$$

在 d 中含有 α_1, α_2 的项是 $-m^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta)^2 L_{1,n}$ 及 α_1, α_2 的线性项. 当我们忽略(16)式的 $\delta(\cdots)$ 因子, 忽略 D 中的 α_1^2, α_2^2 项而将 D 写为

$$C\alpha_1\alpha_2 + P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + Q, \quad (19)$$

那末, 对 α_1, α_2 积分给出象以下的典型式子:

$$\int_0^{\epsilon_1} \int_0^{\epsilon_2} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(C\alpha_1\alpha_2 + P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + Q)^2} = \frac{1}{P_1 P_2 - CQ} \{ \log(\epsilon_1 P_1 + Q) + \log(\epsilon_2 P_2 + Q) - \log Q - \log(C\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_1 P_1 + \epsilon_2 P_2 + Q) \}. \quad (20)$$

在此式中必须视 t 为复变数(割线自某一值 t_0 至 ∞), 而让每一个 $\log$ 取主值(虚数部分在 $-\pi i, +\pi i$ 中); 于是对于任何固定的 x, y, z, β (当然是正的), 只需令 $t \rightarrow \infty$, 上式右方的虚部即不存在. 将(20)左方分母的指数换为 n 也改变不了这个结果.

以上便是文献[4]的积分方法, 而它的结果是不够理想的. 所以有此结果乃是因为积分贡献不限于 $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$ 的区域内, 因此, (16)式中的因子 $\delta(\cdots)$ 不能忽略.

将 $\Sigma x + \Sigma y + \Sigma z + \beta$ 写为 $(1 - \gamma)$, D 写为(19)式, 则我们应先研究象以下的式子:

$$\begin{aligned} & \theta(\gamma)\theta(1-\gamma) \int_0^1 \int_0^1 \delta(\alpha_1 + \alpha_2 - \gamma) \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(C\alpha_1\alpha_2 + P_1\alpha_1 + P_2\alpha_2 + Q)} = \\ & = \theta(\gamma)\theta(1-\gamma) \int_0^\gamma \frac{d\alpha_1}{-C\alpha_1^2 + (P_1 - P_2 + C\gamma)\alpha_1 + (P_2\gamma + Q)} = \\ & = \theta(\gamma)\theta(1-\gamma) \frac{1}{\{(P_1 - P_2 + C\gamma)^2 + 4C(P_2\gamma + Q)\}^{\frac{1}{2}}} \log(\cdots). \end{aligned} \quad (21)$$

正如方形图一样, 这个式子有对 t 的不连续量. 不连续量乘以 $(2i)^{-1}$ 基本上为

$$\{(P_1 - P_2 + C\gamma)^2 + 4C(P_2\gamma + Q)\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

对 Q 进行微商多次, 产生 $\{\cdots\}^{-\frac{1}{2}-n}$, 再对 x, y, z, β 进行积分, 便得我们所需要的结果.

在讨论 n 很大, t 很大时的渐近行为, 可以在 $-\frac{1}{2} - n$ 中忽略 $-\frac{1}{2}$.

主要点是在 $t \rightarrow \infty$ 时, 仅仅令 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1} \rightarrow 0$ 不足以使式(22)曲括号中的项变小. 换句话说, 图 1 振幅对 t 的虚部不仅由梯形的 Regge 性质(在 $x_1 \doteq x_2 \doteq \cdots \doteq x_{n+1} \doteq 0$ 处的性质)来决定. 由于(22)曲括号中含有

$$x_1 \cdots x_{n+1} (\Sigma z + \beta) L_{1n} t^2, 4\gamma x_1 z_1 L_{1n} L_{2n} t^2, L_{1n}^2 \gamma^2 t^2, \cdots$$

等项, (22)式在指数 $-1/2$ 换为 $-n$ 后, 对 x, y, z, β 积分的结果不再是 $t^{-2}(\log t) \cdots$ 的形式, 而是比这个更小. 这个积分情形正如前一节的积分情形一样.

以上說明了 Regge 割綫如果存在的話, 其开端必然較現有理論所給的位置为更左。最后, 作者愿借此机会对戴元本同志所給的討論及帮助表示謝意。

参 考 文 献

- [1] Amati, D., Fubini, S., Stanghellini, A., *Nuovo Cimento*, **26** (1962), 896; 曹昌祺, 物理学报, **20** (1964), 596.
- [2] Mandelstamm, S., *Nuovo Cimento*, **30** (1963), 1127.
- [3] Wilkin, C., *Nuovo Cimento*, **31** (1964), 377.
- [4] Polkinghorne, J. C., *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 503; 1396.
- [5] 张宗燧, 物理学报, **18** (1962), 91.
- [6] 张宗燧, (待发表).

THE REGGE CUTS IN A PERTURBATION THEORY

CHANG T. S.

(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

This paper studies with the help of perturbation theories the asymptotic properties of a ladder in the s channel as the momentum transfer $t \rightarrow \infty$ and some external masses $M^2 \rightarrow t^{1/2}$. The knowledge of such a property is essential to the calculation of the asymptotic property (as the momentum transfer $t \rightarrow \infty$) of a diagram which connects a ladder (in the s channel) and an ordinary pole in parallel.

This paper studies also the absorptive part in the t channel of the above diagram, namely one which connects a ladder in the s channel and an ordinary pole in parallel. It proves that if the partial waves in the s channel possesses a Regge cut, the starting point of such a cut must lie to the left of the position given by current theories.