

# 磁 场 中 的 超 导 膜\*

雷 癩 霖  
(山东大学物理系)

## 提 要

本文将文献[1]的理论推广到较厚的超导膜。首先采用能隙是常数的模型,借助于 Schrieffer 方法,导出磁场中超导膜的补偿方程和电流方程。利用所得的方程,研究了均匀外磁场对金属膜超导性质的影响,讨论了超导膜在磁场中的相变,给出了确定超导膜的能隙、磁矩、平衡临界场  $H_c$ , 以及分别相应于过冷和过热区域边界的临界场  $H_{c_1}$  和  $H_{c_2}$  的一般公式。所有这些表达式,在局域极限下,化为 Гинзбург-Ландау 理论的相应结果;在薄膜情形下,回到文献[1]的结果。文中对一般情形下的非局域效应作了具体的讨论。

## 一、引 言

在文献[1,2]中,吴杭生和作者详细地讨论了超导薄膜在磁场中的性质,在能隙是常数的假定下,求出了超导薄膜的补偿方程和电流方程的解,计算了超导薄膜的能隙、磁矩、临界磁场等。对于薄膜,尺寸引起的非局域效应是重要的,这一点现在已经肯定无疑了。

在文献[3]中,吴杭生和作者把 Гинзбург-Ландау (简称 ГЛ) 理论对无限大样品的情形作了非局域推广,得到了包含非局域效应的大样品的补偿方程和电流方程;并从这个方程出发,研究了半无限大超导体的能隙函数和穿透深度。该文的作者指出,对于 Pippard 型和中间型超导体,即使温度相当接近  $T_c$ , 也仍然有明显的非局域效应。

但是,厚度较大的超导膜在磁场中的性质还没有仔细考虑过。在文献[1]中,从电流方程求解矢势时,利用了近似

$$A(z) = H_0(z - d) + \tilde{A}(z), \quad (1)$$

假定  $\tilde{A}(z)$  是小量。本文将指出,这个近似只有对于厚度满足条件  $d \ll 1.4d_c/\psi_0$  ( $\psi_0 = \frac{\Delta}{\Delta_0}$  是约化能隙,  $d_c$  是区别一级、二级相变的临界厚度,详见第三节)的超导膜才是可用的。固然,讨论与  $\psi_0 \sim 0$  相联系的一些问题时(例如过冷临界场),这个条件并不给出什么限制;但是,讨论一般的问题时(例如弱场磁矩,一级相变区域的临界磁场等),这个限制却是重要的。所以,对于  $d \gtrsim d_c$  的超导膜,文献[1]的结果一般已经不能用了。

研究  $d \gtrsim d_c$  的超导膜在磁场中的行为,不仅在理论上是感兴趣的,在实验上也十分重要。因为磁场对金属膜(即使是较厚的膜)超导性质的影响,往往比在大样品超导性质

\* 1964年9月11日收到。

的影响要显著得多。目前,任意厚度的超导膜在磁场中的普遍理论还有待建立。但是,放弃文献[1]所用的近似(1),而直接从电流方程求解矢势却是完全可能的,这样我们就可以研究较厚的超导膜在磁场中的行为。

本文将通过这条途径把文献[1]的理论加以推广。

## 二、基本方程

先讨论磁场中平面超导膜的补偿方程和电流方程。设磁场平行于膜的表面。

文献[3]曾证明,在一维情形下,大样品超导体的补偿方程和电流方程可以分别写成如下积分微分方程的形式<sup>1)</sup>:

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \kappa^2 \left[ \psi^3 - \psi + \psi \iint \frac{dq_1 dq_2}{(2\pi)^2} e^{i(q_1+q_2)z} A(q_1)A(q_2)M\left(\frac{q_1}{\theta}, \frac{q_2}{\theta}\right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{d^2A}{dz^2} = \psi^2 \int \frac{dq}{2\pi} e^{iqz} A(q)K\left(\frac{q}{\theta}\right). \quad (3)$$

通常的第一类超导体,参数  $\kappa \ll 1$ , 从文献[3]的讨论可知,能隙随空间位置的变化是缓慢减小的。因此,在许多问题中,把能隙当作常数处理已经足够了。特别是对于超导膜,只要厚度不是很大(例如  $d < \frac{\delta_0}{\kappa} \sim \frac{\xi_0}{(\Delta t)^{1/2}}$ ),由于磁场的穿入及相干效应,磁场对能隙函数平均值(零级)影响比能隙函数的空间变化要重要得多。外磁场对金属膜超导性质的影响主要地由这个零级效应来决定。本文只考虑这种效应,而把能隙当作常数。

假定膜的厚度是  $2d$ , 取  $z$  轴垂直于膜的表面,设磁场沿着  $y$  方向,只是  $z$  的函数,则矢势可选得只有  $x$  分量且也只是  $z$  的函数。此时,能隙函数是实的。一般,磁场的边界条件可设为

$$H|_{z=0} = H_{01}, \quad H|_{z=2d} = H_{02}. \quad (4)$$

在能隙是常数的假定下,利用 Schrieffer<sup>[4]</sup> 方法,从大样品的方程(2)和(3),不难得到超导膜的补偿方程和电流方程。事实上,可以比 Schrieffer<sup>[4]</sup>, Nambu-Tuan<sup>[5]</sup> 所讨论的更普遍一些,在磁场满足一般的条件(4)的情形下,也仍然有如下结论,即对于边界受到镜式反射的情形,电子局限于超导膜中运动的问题,在数学上等价于这样一个无限区域的问题。这个无限区域是由超导膜相反交迭而成的,其中的矢势和磁场分别满足

$$\left. \begin{aligned} H(z+4d) &= H(z), \\ H(z) &= -H(-z); \\ A(z+4d) &= A(z), \\ A(z) &= A(-z). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由此可见,超导膜问题与大样品问题的区别,只在于矢势  $A(z)$  现在应当满足条件(5)。因此,对于能隙等于常数的情形,只要把方程(2)和(3)中的  $A(z)$  换成满足条件(5)的  $A(z)$  的 Fourier 展式  $A_{q_n}$ :

$$A(z) = \frac{1}{4d} \sum_{q_n} e^{iq_n z} A_{q_n}, \quad \left( q_n = \frac{n\pi}{2d}, n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \right),$$

1) 本文使用的符号与文献[3]相同。在第二,三节中未特别声明处,一律用约化单位。

并将对  $dq$  的积分改为对  $q_n$  的求和, 就得到超导膜的补偿方程和电流方程<sup>1)</sup>. 设  $\psi = \psi_0$ , 在膜中求平均, 注意到  $M\left(\frac{q}{\theta}, -\frac{q}{\theta}\right) = K\left(\frac{q}{\theta}\right)$ , 超导膜的补偿方程可写作<sup>2)</sup>

$$\psi_0^3 - \psi_0 + \psi_0 \left(\frac{1}{4d}\right)^2 \sum_q A_q^2 K\left(\frac{q}{\theta}\right) = 0; \quad (6)$$

考虑到在  $z = 0, \pm(2d), \pm(4d) \cdots$  诸平面上磁场的突变, 电流方程应当是

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A}{dz^2} &= 2H_{01} \sum_N \delta(z - 2N(2d)) - 2H_{02} \sum_N \delta(z - (2N+1)(2d)) + \\ &+ \psi_0^2 \left(\frac{1}{4d}\right) \sum_q e^{iqz} A_q K\left(\frac{q}{\theta}\right) = \frac{(H_{01} + H_{02})}{2d} \sum_{k=\overline{z}} e^{ikz} + \\ &+ \frac{H_{01} - H_{02}}{2d} \sum_{k=\overline{z}} e^{ikz} + \psi_0^2 \left(\frac{1}{4d}\right) \sum_q e^{iqz} A_q K\left(\frac{q}{\theta}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

此方程的解可立即写出:

$$A_q = \begin{cases} -\frac{2(H_{01} + H_{02})}{q^2 + \psi_0^2 K\left(\frac{q}{\theta}\right)}, & \text{当 } q = \text{奇}, \\ -\frac{2(H_{01} - H_{02})}{q^2 + \psi_0^2 K\left(\frac{q}{\theta}\right)}, & \text{当 } q = \text{偶}. \end{cases} \quad (8)$$

(6), (7) 和 (8) 是我们的基本方程.

### 三、均匀外磁场中的超导膜

我们从方程(6), (7) 出发, 讨论均匀外磁场中金属膜的超导性质及其相变. 假定外磁场  $H_0$  是与膜的表面平行的; 此时, 边界条件为

$$H|_{z=0, 2d} = H_0. \quad (9)$$

在这个条件下, 电流方程(7)的解是

$$A_q = \begin{cases} -\frac{4H_0}{q^2 + \psi_0^2 K\left(\frac{q}{\theta}\right)} & \text{当 } q = \text{奇}, \\ 0 & \text{当 } q = \text{偶}; \end{cases} \quad (10)$$

$$A(z) = -\frac{H_0}{d} \sum_{k=\overline{z}} \frac{e^{ikz}}{k^2 + \psi_0^2 K\left(\frac{k}{\theta}\right)}. \quad (10a)$$

将(10)代入(6), 补偿方程变为

$$H_0^2 = \frac{1 - \psi_0^2}{f_s(\psi_0)(2d)^2}, \quad (11)$$

1) 我们强调指出, 这种做法只有在能隙当作常数时才是对的; 而且, 从数学上看, 必须  $d > d^*$  (见文献[1]).

2) 以后将  $q_n$  简记作  $q$ ,  $q$  为奇的意思是  $q = \frac{(2n+1)\pi}{2d}$ ,  $q$  为偶的意思是  $q = \frac{2n\pi}{2d}$ .

其中

$$f_s(\psi_0) = \frac{8}{(2d)^4} \sum_{k=\frac{\pi}{2d}>0} \frac{K\left(\frac{k}{\theta}\right)}{\left[k^2 + \psi_0^2 K\left(\frac{k}{\theta}\right)\right]^2}. \quad (12)$$

### 1. 能隙

(11)式确定了超导膜的能隙  $\psi_0$  作为外场  $H_0$  的函数. 注意到  $\theta = 1.13/\xi_0$  (通常单位下  $\theta = 1.13 \frac{\delta_0}{\xi_0}$ ), 可将(12)表为

$$f_s(\psi_0) = \frac{8}{\pi^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}{\left[(2l+1)^2 + \psi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)\right]^2}, \quad (13)$$

其中

$$\sigma = 0.36 \left(\frac{2d}{\xi_0}\right). \quad (14)$$

我们先就几个极限情形, 对能隙方程(11)作一些讨论.

(i) 如果  $\frac{\theta}{\psi_0} \gg 1$ , 同时  $\sigma \gg 1$ , 则对于(13)中起主要作用的  $l$  有  $K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right) \sim 1$ , 此时求和很容易作出:

$$f_s(\psi_0) \sim \frac{1}{2\psi_0^2(2d)^2} \frac{\left[\frac{\text{sh}(2\psi_0 d)}{(2\psi_0 d)} - 1\right]}{\text{ch}^2(\psi_0 d)}, \quad (15)$$

从而(11)可写作

$$H_0^2 = \frac{2\psi_0^2(1 - \psi_0^2)\text{ch}^2(\psi_0 d)}{\frac{\text{sh}(2\psi_0 d)}{(2\psi_0 d)} - 1}. \quad (16)$$

这正是  $\Gamma\text{JI}$  理论中定超导膜能隙的方程<sup>[6]</sup>.

以后, 我们把  $\frac{\theta}{\psi_0} \gg 1$  及  $\sigma \gg 1$  同时满足的极限, 称为超导膜的局域极限. 在局域极限下, 我们的结果化为  $\Gamma\text{JI}$  结果.

(ii) 如果  $\psi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \ll 1$ , 则(13)式可以展开:

$$f_s(\psi_0) = \frac{8}{\pi^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}{(2l+1)^4} - \frac{16}{\pi^6} \psi_0^2 (2d)^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K^2\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}{(2l+1)^6} + \dots, \quad (17)$$

因而方程(11)可写作

$$\psi_0^2 = \frac{1 - H_0^2(2d)^2\Phi_1(\sigma)}{1 - H_0^2(2d)^4\Phi_2(\sigma)}, \quad (18)$$

其中

$$\Phi_1(\sigma) = \frac{8}{\pi^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}{(2l+1)^4}, \quad (19)$$

$$\Phi_2(\sigma) = \frac{16}{\pi^6} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K^2\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}{(2l+1)^6}. \quad (20)$$

这正是文献 [1] 所得到的超导薄膜的能隙方程.  $\phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \ll 1$  的极限称为薄膜极限.

(iii) 在相反的情形下,  $d$  大, 以致  $\frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \gg 1$ . 这时候, 一般地说, 方程(11)的性质不象薄膜情形那样简单; 但是可以看出, 只要  $H_0$  不是很大, 方程(11)总有  $\phi_0^2 \sim 1$  的解. 对于这解, 可令

$$\phi_0^2 = 1 - \varepsilon, \quad (21)$$

而  $\varepsilon \ll 1$ . 代入(11), 略去高级小量, 可求得

$$\varepsilon \sim f_s(1)H_0^2(2d)^2. \quad (22)$$

满足条件  $\frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \gg 1$  的膜称为厚膜.

一般情形下, 能隙方程(11)的结果在下一节中给出.

## 2. 矢势和磁矩

所求得的矢势(10)是

$$\begin{aligned} A(z) &= -\frac{2H_0}{d} \sum_{k=\frac{\pi}{\theta}>0}^{\infty} \frac{\cos kz}{k^2 + \phi_0^2 K\left(\frac{k}{\theta}\right)} = \\ &= -\frac{4H_0}{\pi} (2d) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2l+1)\pi \frac{z}{2d}}{(2l+1)^2 + \phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}, \end{aligned} \quad (23)$$

因而场分布

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{2H_0}{d} \sum_{k=\frac{\pi}{\theta}>0}^{\infty} \frac{k \sin kz}{k^2 + \phi_0^2 K\left(\frac{k}{\theta}\right)} = \\ &= \frac{4H_0}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1) \sin(2l+1)\pi \frac{z}{2d}}{(2l+1)^2 + \phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}. \end{aligned} \quad (24)$$

我们也考虑三种极限:

(i) 局域极限,  $\frac{\theta}{\phi_0} \gg 1$  及  $\sigma \gg 1$ . (23)化为

$$\begin{aligned} A(z) &\cong -\frac{4H_0}{\pi^2} (2d) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2l+1)\pi \frac{z}{2d}}{(2l+1)^2 + \phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2}} = \\ &= -\frac{H_0}{\phi_0} \left[ \frac{\text{ch } \phi_0(2d-z)}{\text{sh } 2\phi_0 d} - \frac{\text{ch } \phi_0(d-z)}{2 \text{sh } \phi_0 d} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

此即  $\Gamma J$  理论的结果<sup>[6]</sup>.

(ii) 薄膜极限,  $\phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \ll 1$ . 将(23)展开, 矢势可表成

$$A(z) = -\frac{4H_0}{\pi^2} (2d) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2l+1)\pi \frac{z}{2d}}{(2l+1)^2} + \frac{4H_0}{\pi^2} (2d) \phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} \times \\ \times \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2l+1)\pi \frac{z}{2d}}{(2l+1)^4} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right) + \dots = H_0(z-d) + \tilde{A}(z), \quad (26)$$

$$\tilde{A}(z) = \frac{4H_0}{\pi^2} (2d) \phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos(2l+1)\pi \frac{z}{2d}}{(2l+1)^4} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right) + \dots \quad (27)$$

显然, 这与文献 [1] 所得的矢势完全一样. 由此可见, 文献 [1] 所用的方法, 只有在  $\phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \ll 1$  的情形下才是有效的.

(iii) 对于厚膜,  $\frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \gg 1$ . 将(21)代入(23),

$$A(z) = -\frac{4H_0}{2d} \sum_{k=\frac{\pi}{2d}>0}^{\infty} \frac{\cos kz}{k^2 + K\left(\frac{k}{\theta}\right)} - \\ - \left(\frac{4H_0}{2d}\right) H_{0f,1}^2(1) (2d)^2 \sum_{k=\frac{\pi}{2d}>0}^{\infty} \frac{K\left(\frac{k}{\theta}\right)}{\left[k^2 + K\left(\frac{k}{\theta}\right)\right]^2} \cos kz. \quad (28)$$

当  $d$  很大时, 可只保留第一项; 并且若只考虑靠近  $z=0$  那一边的场分布, 求和可以化为积分

$$A(z) = -\frac{2H_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos kz dk}{k^2 + K\left(\frac{k}{\theta}\right)}. \quad (29)$$

这等价于文献[3]对半无限大样品所得的  $A_0(z)$ .

利用所得的  $A(z)$ , 很容易写出超导膜的磁矩. 事实上, 文献[1]已经证明, 单位面积的膜的磁矩可表成

$$\mu = -\frac{1}{4\pi} [H_0(2d) + 2A(0)]. \quad (30)$$

将(23)代入, 立即得

$$\mu = -\frac{H_0}{4\pi} (2d) [1 - b_s(\psi_0)] = -\frac{H_0}{4\pi} (2d) \phi_0^2 (2d)^2 g_s(\psi_0), \quad (31)$$

其中

$$b_s(\psi_0) = \frac{8}{(2d)^2} \sum_{k=\frac{\pi}{2d}>0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + \phi_0^2 K\left(\frac{k}{\theta}\right)} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)^2 + \phi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}, \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 g_s(\psi_0) &= \frac{8}{(2d)^4} \sum_{k=\vec{q}>0}^{\infty} \frac{K\left(\frac{k}{\theta}\right)}{k^2 \left[ k^2 + \psi_0^2 K\left(\frac{k}{\theta}\right) \right]} = \\
 &= \frac{8}{\pi^4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}{(2l+1)^2 \left[ (2l+1)^2 + \psi_0^2 \frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right) \right]}. \quad (33)
 \end{aligned}$$

局域极限下,

$$b_s(\psi_0) \cong \frac{\text{th } \psi_0 d}{\psi_0 d}, \quad (34)$$

从(31)即得 ГЛ 理论的磁矩公式<sup>[6]</sup>

$$\mu = -\frac{H_0}{4\pi} (2d) \left[ 1 - \frac{\text{th } \psi_0 d}{\psi_0 d} \right]. \quad (35)$$

薄膜极限下,

$$g_s(\psi_0) \sim \Phi_1(\sigma),$$

因而

$$\mu \cong -\frac{H_0}{4\pi} (2d) \psi_0^2 (2d)^2 \Phi_1(\sigma). \quad (36)$$

这就是文献[1]的结果.

(31)–(36)各式中的能隙  $\psi_0$  都是外场  $H_0$  的函数, 所以超导膜的磁矩对  $H_0$  的依赖性一般不是线性的. 但当  $H_0$  很小时,  $\psi_0^2 \sim 1$ , 因而弱场磁矩

$$\left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)_{H_0 \rightarrow 0} = g_s(1) \quad \left[ \mu_0 = -\frac{H_0}{4\pi} (2d) \right], \quad (37)$$

一般情况下,  $\left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)$  依赖于  $H_0$ .

### 3. 超导膜在磁场中的相变

为了讨论超导膜在磁场中的相变问题, 需要考虑超导相和正常相的吉布斯函数. 在文献[1]中已经导出, 处于平衡态时, 金属膜的超导相与正常相吉布斯函数之差是

$$\begin{aligned}
 \Delta G &= G_s - G_n = \frac{H_{cb}^2 \delta_0}{4\pi} (2d) \Delta \tilde{G}; \\
 \Delta \tilde{G} &= H_0^2 + \Sigma, \\
 \Sigma &= \frac{1}{2d} \int_0^{2d} dz \left( H^2 - 2H_0 H - \frac{\psi^4}{2} \right).
 \end{aligned} \quad (38)$$

在我们的情形下, 将  $A(z)$  的表达式(23)代入, 得

$$\Delta \tilde{G} = H_0^2 [1 + \psi_0^2 (2d)^2 f_s(\psi_0) - b_s(\psi_0)] - \frac{\psi_0^4}{2}, \quad (39)$$

注意到, 平衡时超导相的能隙满足方程(11), 式(39)又可写成

$$\Delta \tilde{G} = H_0^2 [1 - b_s(\psi_0)] - \psi_0^2 + \frac{\psi_0^4}{2}. \quad (40)$$

(39)或(40)是我们讨论相变问题的依据.

先讨论热力学平衡相变。

在外磁场中,膜的超导相和正常相的平衡转变,发生在  $H_0 = H_c$  的时候,这个场称为平衡相变临界场,或简称临界场。临界场  $H_c$  以及此时的超导相能隙  $\psi_0 = \psi_{0c}$  (临界能隙),由两相吉布斯函数相等的条件决定。所以,由(39)可得

$$H_c^2 [1 + \psi_{0c}^2 (2d)^2 f_s(\psi_{0c}) - b_s(\psi_{0c})] - \frac{\psi_{0c}^4}{2} = 0, \quad (41)$$

或由(40)得

$$H_c^2 = \frac{\psi_{0c}^2 \left(1 - \frac{\psi_{0c}^2}{2}\right)}{1 - b_s(\psi_{0c})} = \frac{\left(1 - \frac{\psi_{0c}^2}{2}\right)}{g_s(\psi_{0c}) (2d)^2}. \quad (42)$$

另一方面,这时候超导相中能隙方程仍然是成立的,故

$$H_c^2 = \frac{1 - \psi_{0c}^2}{f_s(\psi_{0c}) (2d)^2}. \quad (43)$$

(41)及(43)或者(42)及(43)是确定临界场  $H_c$  和临界能隙  $\psi_{0c}$  的方程。

局域极限下,方程(42)也化为 ГЛ 理论的相应公式<sup>[6]</sup>:

$$H_c^2 = \frac{\psi_{0c}^2 (2 - \psi_{0c}^2)}{2 \left(1 - \frac{\text{th } \psi_{0c} d}{\psi_{0c} d}\right)}. \quad (44)$$

在厚膜情形下,  $H_c$  及  $\psi_{0c}$  可以明显地写出。事实上,当  $\frac{(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \gg 1$  时,方程(43)的解应当是

$$\begin{aligned} \psi_{0c}^2 &= 1 - \varepsilon_c, \\ \varepsilon_c &= f_s(1) H_c^2 (2d)^2 \ll 1, \end{aligned} \quad (45)$$

将(45)代入(42),有

$$H_c^2 = \frac{1}{2} \frac{1 - \varepsilon_c^2}{1 - b_s(1 - \varepsilon_c)} \cong \frac{1}{2[1 - b_s(1)]} \left\{ 1 + f_s^2(1) (2d)^4 \left[ \frac{H_c^2}{1 - b_s(1)} - H_c^4 \right] \right\}. \quad (46)$$

考虑到上式花括号中第二项  $\ll 1$ , 其中的  $H_c$  可代为  $1/2[1 - b_s(1)]$ , 从而得到

$$H_c^2 = \frac{1}{2[1 - b_s(1)]} \left\{ 1 + \frac{f_s^2(1) (2d)^4}{4[1 - b_s(1)]^2} \right\}. \quad (47)$$

顺便指出,这公式在  $\theta$  很大的情形,可化为 Гуревич<sup>[7]</sup> 从 ГЛ 理论对厚膜得到的结果(不包含  $\kappa$  项):

$$H_c^2 = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{\text{th } d}{d}\right)} \left[ 1 + \frac{\frac{\text{sh } 2d}{2d} - 1}{16 \text{ch}^4 d \left(1 - \frac{\text{th } d}{d}\right)} \right]. \quad (48)$$

另一方面,如果  $d$  很大,(47)中花括号内第二项也可抛去,

$$H_c^2 \sim \frac{1}{2} [1 + b_s(1)], \quad (49)$$

同时  $b_s(1)$  的表达式中,求和可化为积分



$$b_s(1) = \frac{4}{\pi(2d)} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + K\left(\frac{q}{\theta}\right)} = \frac{\lambda_0}{d} \quad (50)$$

(其中  $\lambda_0$  是大样品的弱场穿透深度, 见文献[3]), 因而

$$H_c^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\lambda_0}{d}\right), \quad (51)$$

或在原单位下

$$\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right) = 1 + \frac{\lambda_0}{2d}. \quad (52)$$

这和简单的热力学考虑所得的结果一致<sup>[8]</sup>.

对于  $\psi_0^2$  很小的情形, 文献[1]已经详细讨论过. 文献[1]指出, 当膜的厚度  $2d$  小于临界厚度  $2d_c$  时, 方程(41)和(43)存在  $\psi_0^2 \rightarrow 0$  的正数解. 此时, 相变是二级的, 二级相变的临界场是

$$H_c^2 = \frac{1}{\Phi_1(\sigma)(2d)^2}; \quad (53)$$

而当  $d > d_c$  时, 则不存在  $\psi_0^2 \rightarrow 0$  的正数解, 相变是一级的. 临界厚度  $2d_c$  由条件

$$1 - (2d_c)^2 \frac{\Phi_2(\sigma_c)}{\Phi_1(\sigma_c)} = 0 \quad (54)$$

确定.  $\Phi_1(\sigma)$ ,  $\Phi_2(\sigma)$  的定义见(19), (20).

临界厚度  $d_c$  依赖于参数  $\theta$ . 对于 London 极限,  $\theta \gg 1$ , 正如文献[1]已经指出的, 从(54)可解得

$$d_c = \frac{\sqrt{5}}{2} \sim 1.12; \quad (55)$$

而对于 Pippard 极限,  $\theta \ll 1$ ,  $\Phi_1(\sigma)$ ,  $\Phi_2(\sigma)$  中的  $K(\eta) \sim \frac{3\pi^3}{28\zeta(3)} \frac{1}{\eta}$ , 则有

$$d_c = 0.89\theta^{-1/3}. \quad (56)$$

由此可见, 随着  $\theta$  的减少,  $d_c$  (原单位下  $\frac{d_c}{\delta_0}$ ) 是无限增大的. 但是, 我们指出,  $\frac{d_c}{\lambda_0}$  (是大样品的弱场穿透深度) 并不无限增大, 而是趋于一有穷极限

$$\frac{d_c}{\lambda_0} = 1.61 \quad (\theta \rightarrow 0), \quad (57)$$

$2d_c$  及  $\frac{2d_c}{\lambda_0}$  作为  $\theta$  的函数的图见第四节.

下面, 讨论一下金属膜中存在亚稳正常相和亚稳超导相的可能性问题.

为此, 我们回到处于平衡态时, 超导相和正常相吉布斯函数差的表达式(38). 由于平衡时超导相中  $\psi_0^2$  和  $H_0$  通过(11)式联系, 所以  $\Delta\tilde{G}$  可以看作只是  $\psi_0^2$  的函数  $\Delta\tilde{G} = \Delta\tilde{G}(\psi_0^2)$ . 为了求这函数的极值, 将(40)式对  $\psi_0^2$  求微商:

$$\frac{\partial}{\partial \psi_0^2} (\Delta\tilde{G}) = 2H_0[1 - b_s(\psi_0)] \left(\frac{\partial H_0}{\partial \psi_0^2}\right) + [-1 + \psi_0^2 + H_0^2(2d)^2 f_s(\psi_0)]. \quad (58)$$

注意到(58)中第二项为零, 所以  $\Delta\tilde{G}$  的极值至多只有两个, 它们分别由方程

$$1 - b_s(\psi_0) = 0 \quad (59)$$

及

$$\frac{\partial H_0}{\partial \psi_0^2} = 0 \tag{60}$$

决定。(59)的解是

$$\psi_0^2 = \psi_{0c_1}^2 = 0, \tag{61}$$

相应的场为  $H_0 = H_{c_1}$ :

$$H_{c_1}^2 = \frac{1}{\Phi_1(\sigma)(2d)^2}. \tag{62}$$

(60)的解  $\psi_0 = \psi_{0c_2}$  以及相应的场  $H_0 = H_{c_2}$  由下列方程确定:

$$1 - H_{c_2}^2(2d)^2 f_s(\psi_{0c_2}) = 0, \tag{63}$$

$$1 - \psi_{0c_2}^2 - H_{c_2}^2(2d)^2 f_s(\psi_{0c_2}) = 0, \tag{64}$$

其中

$$f_s(\psi_0) = \frac{16}{\pi^6} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K^2\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)}{\left[(2l+1)^2 + \frac{\psi_0^2(2d)^2}{\pi^2} K\left(\frac{2l+1}{\sigma}\right)\right]^3} \tag{65}$$

不难看出,这个解只有在  $d > d_c$  时才存在<sup>1)</sup>。

对  $d < d_c$  及  $d > d_c$  两种情况,  $\Delta\tilde{G}$  作为  $\psi_0^2$  的函数形式分别画在图 1 和图 2 上。为了说明方便,我们还画出了由(11)确定的  $H_0$  作为  $\psi_0^2$  的函数示意图。

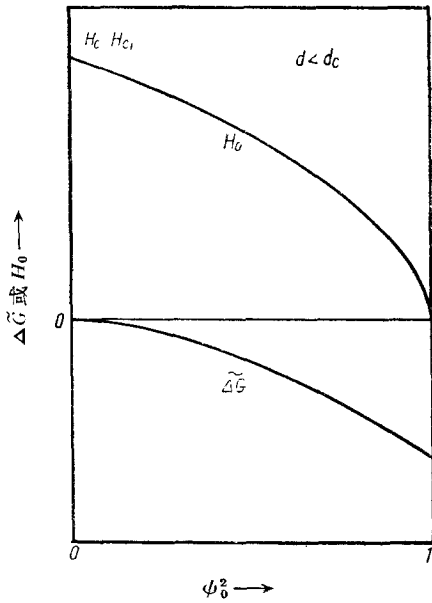


图 1  $d < d_c$  时,  $\Delta\tilde{G}$  和  $H_0$  作为  $\psi_0^2$  的函数  
当  $H_0 < H_c$  时, 只可能有平衡的超导相;  
当  $H_0 > H_c$  时, 只可能有平衡的正常相,  
过冷和过热都是不可能的

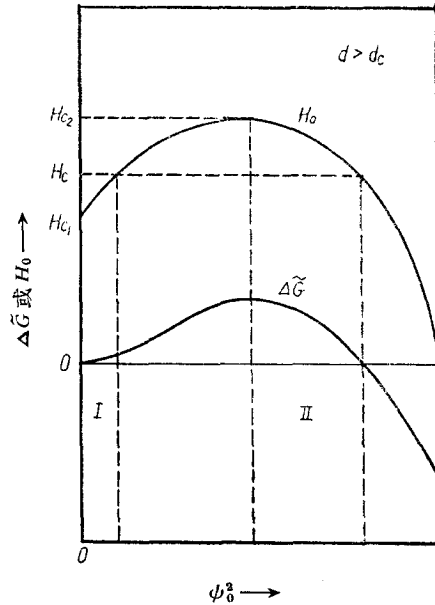


图 2  $d > d_c$  时,  $\Delta\tilde{G}$  和  $H_0$  作为  $\psi_0^2$  的函数  
在区域 I 可能出现亚稳正常相;  
在区域 II 是亚稳超导相

1) 事实上,当  $d < d_c$  时,满足(64)的最大场是  $H_0 = H_c$ ;另一方面,当  $H_0 < H_c$  时,方程(63)不存在  $\psi_0^2$  是正数的解。

由图 1 可见,当  $d < d_c$  时,  $\Delta\tilde{G}$  只在  $\psi_0 = \psi_{c_1}$  有一个极大  $\Delta\tilde{G} = 0$ , 此时  $H_0$  也是极大:  $H_0 = H_{c_1} = H_c$ . 显然, 这时候,  $H_0 < H_c$  时只可能是超导相,  $H_0 > H_c$  时只可能是正常相, 过热和过冷都是不会出现的. 但是, 当  $d > d_c$  时, 情况不同了. 这时  $\Delta\tilde{G}$  作为  $\psi_0^2$  的函数有两个极值:  $\psi_0^2 = \psi_{0c_1}^2 = 0$  时是极小;  $\psi_0^2 = \psi_{0c_2}^2$  时是极大(图 2). 不难看出, 在区域 I 可能出现亚稳(过冷)正常相; 而区域 II 可能出现亚稳(过热)超导相. 场  $H_{c_1}, H_{c_2}$  是这些区域的边界, 他们分别称为过冷临界场和过热临界场.

Гинзбург<sup>[9]</sup> 曾根据 ГЛ 理论的自由能表达式, 讨论过超导膜的过冷临界场和过热临界场问题, 得出确定  $H_{c_1}, H_{c_2}$  的方程. 不难看出, 他的结果是本文的局域极限 ( $\frac{\theta}{\psi_0} \gg 1$  及  $\sigma \gg 1$ ). 但是对于  $H_{c_1}$ , 由于  $\psi_{0c_1} = 0$ , 因而不论  $\theta$  大小如何, 只要  $\sigma = 0.36 \left(\frac{2d}{\xi_0}\right) \gg 1$ , (64) 就化为 ГЛ 的结果:

$$H_{c_1}^2 = \frac{12}{(2d)^2} \quad (66)$$

由此可见, 不论  $\theta$  大小如何, 只要膜的厚度足够大 ( $\sigma \gg 1$ ), ГЛ 理论中  $H_{c_1}$  的表达式总是正确的, 虽然对于 Pippard 型或中间型超导体, 由于  $\theta$  小, 即使  $d$  很大, ГЛ 理论的其他结果不见得成立. 这就是 Гинзбург<sup>[10]</sup> 指出过的, ГЛ 理论的  $H_{c_1}$  公式对于 Al 在相当宽的温度范围内也有效的原因.

#### 四、具体结果<sup>1)</sup>

为了对本文的理论有一个更清楚的了解, 我们根据第三节给出的一般公式, 计算了超导膜的能隙、弱场磁矩、磁矩随外场的变化、临界厚度、临界磁场、过热和过冷临界场等. 本节中, 将给出一部分结果.

超导膜的能隙与外磁场的关系, 可由公式(11)确定. 当  $2d = \delta_0$ ,  $2d = \sqrt{5}\delta_0$ ,  $2d = 3.5\delta_0$  及  $2d = 5\delta_0$  时, 对于不同的  $\theta$ ,  $\left(\frac{H_0}{H_{cb}}\right)$  作为  $\psi_0^2 = \left(\frac{\Delta}{\Delta_0}\right)^2$  的函数分别画在图 3—6 中. 从图中我们可以看出, 对于固定的  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  及  $\psi_0^2$ , 随  $\theta$  的减少,  $\left(\frac{H_0}{H_{cb}}\right)$  单调地增加; 而对固定的  $\theta$ , 当  $d < d_c$  时, 随  $\psi_0^2$  的增加  $\left(\frac{H_0}{H_{cb}}\right)$  单调地减少; 但是当  $d > d_c$  时, 则出现极值, 这是与一级相变的出现相关的.  $\theta = \infty$  是局域极限(即 ГЛ 理论); 可以看出, 当  $\theta < 1$  时, 非局域效应对 ГЛ 理论的修正已经很显著了.

作为超导膜磁矩随外磁场非线性变化的例子, 图 7 中, 对  $2d = 3.5\delta_0$  的膜和几个不同的  $\theta$  值, 我们画出了当外场从 0 增加到  $H_c$ ,  $\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)$  的变化. 一般地说, 当  $\left(\frac{H_0}{H_c}\right) < 0.5$  时,  $\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)$  随外磁场的变化是小的; 但当  $\left(\frac{H_0}{H_c}\right)$  再增大, 以致接近于 1 时, 超导膜的磁矩将比较快地减少.

1) 本节起一律用通常单位.

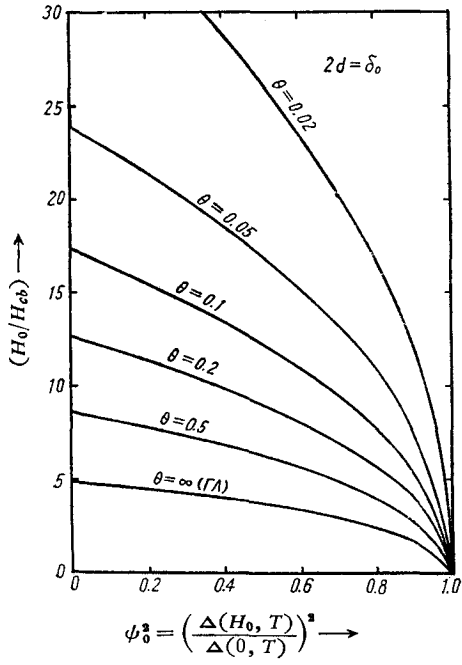


图 3  $2d = \delta_0$  时, 对不同的  $\theta$ , 能隙和外磁场的关系

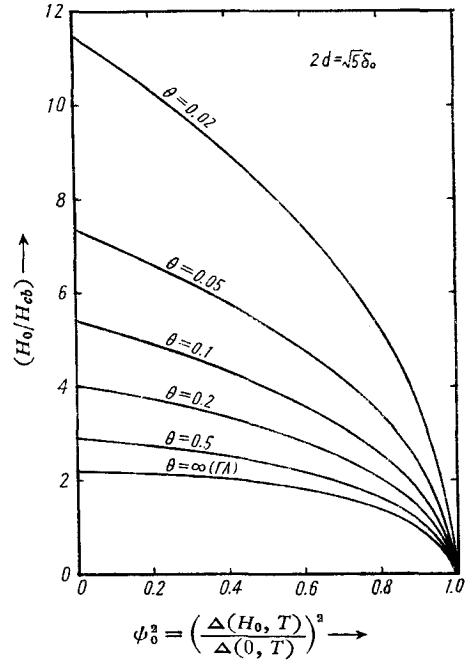


图 4  $2d = \sqrt{5}\delta_0$  时, 对不同的  $\theta$ , 能隙和外磁场的关系

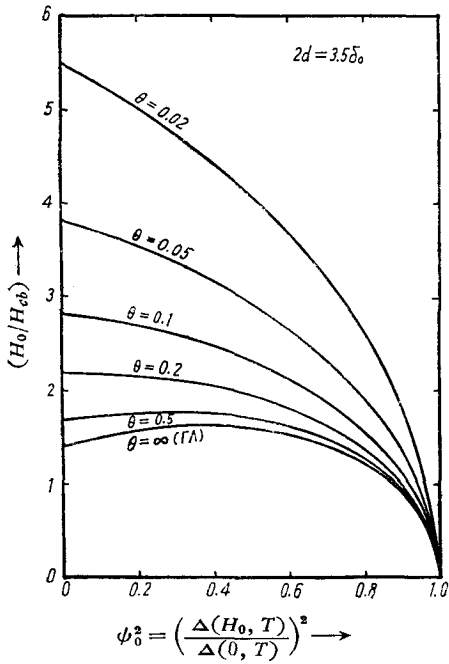


图 5  $2d = 3.5\delta_0$  时, 对不同的  $\theta$ , 能隙和外磁场的关系

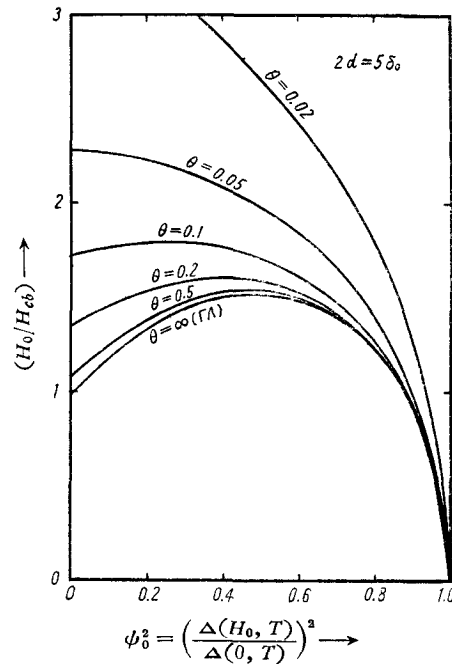


图 6  $2d = 5\delta_0$  时, 对不同的  $\theta$ , 能隙和外磁场的关系

由方程(52)可决定一级和二级相变边界的临界厚度. 图 8 中画出了  $\left(\frac{2d_c}{\delta_0}\right)$  作为  $\theta$  的函数. 利用大样品弱场穿透深度  $\lambda_0$  的结果<sup>[3]</sup>, 还把这个图换成  $\frac{2d_c}{\lambda_0}$  作为  $\theta$  的函数. 可以看出, 局域极限下, 二者都趋于  $\Gamma\text{II}$  值:  $\left(\frac{2d_c}{\delta_0}\right) = \left(\frac{2d_c}{\lambda_0}\right) = \sqrt{5}$ . 当  $\theta$  减少时,  $\left(\frac{2d_c}{\delta_0}\right)$  迅速增加趋于无穷;  $\left(\frac{2d_c}{\lambda_0}\right)$  随  $\theta$  的减少也是增加的, 但增加得比较缓慢, 在 Pippard 极限下趋于一有限值  $\left(\frac{2d_c}{\lambda_0}\right) \sim 3.21$ .

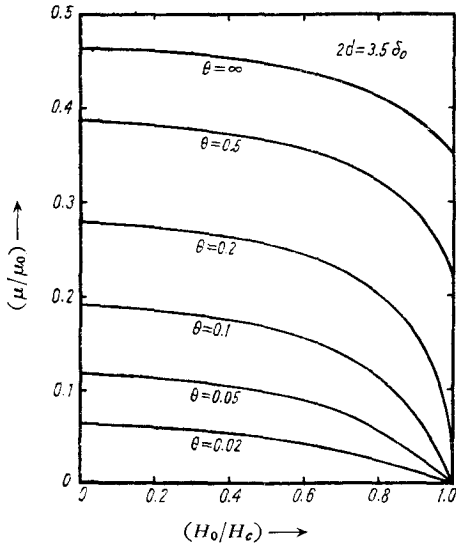


图 7 在  $2d = 3.5\delta_0$  的膜中, 对不同的  $\theta$ , 磁矩随外加磁场的变化

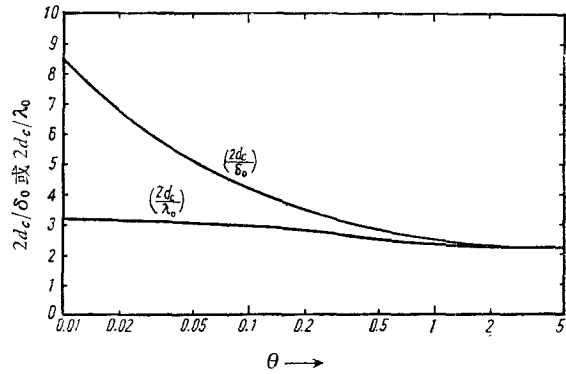


图 8 临界厚度  $2d_c$  作为  $\theta$  的函数

根据方程(40)和(41), 我们计算了超导膜的临界能隙及临界磁场. 图 9 对不同的  $\theta$  将  $\psi_{0c}^2 = \left(\frac{\Delta_c}{\Delta_0}\right)^2$  画作  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  的函数. 图 10 还将  $\psi_{0c}^2$  画作  $\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)$  的函数. 图 11, 图 12 对不同

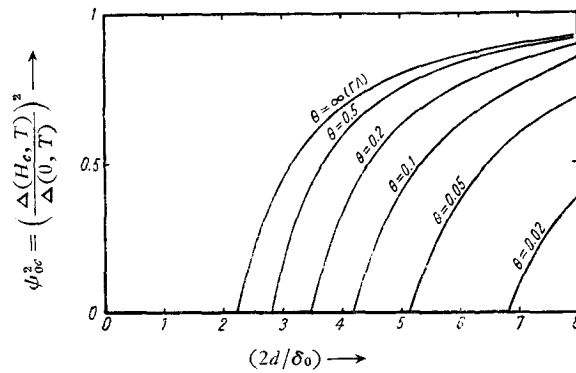


图 9 对不同的  $\theta$ , 临界能隙的平方作为  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  的函数

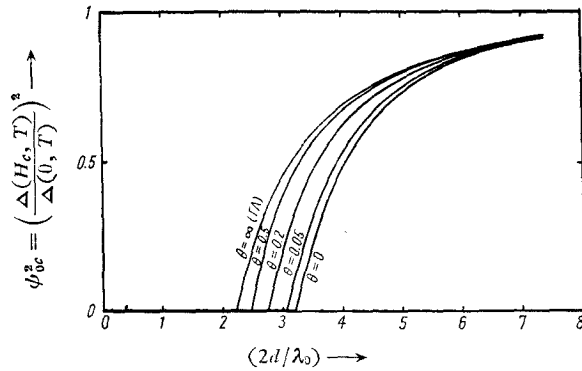


图 10 对不同的  $\theta$ , 临界能隙的平方作为  $\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)$  的函数

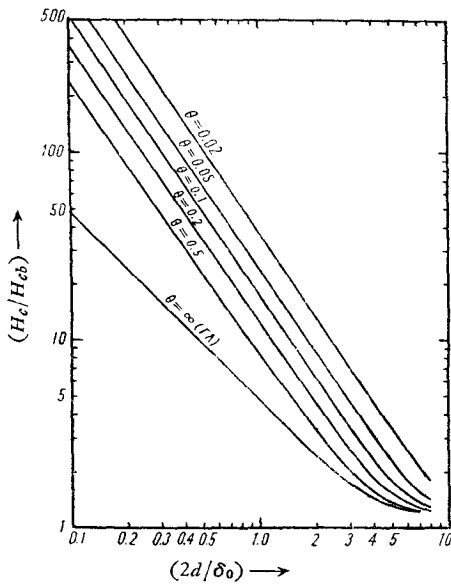


图 11 对不同的  $\theta$ , 临界磁场  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right)$  作为  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  的函数

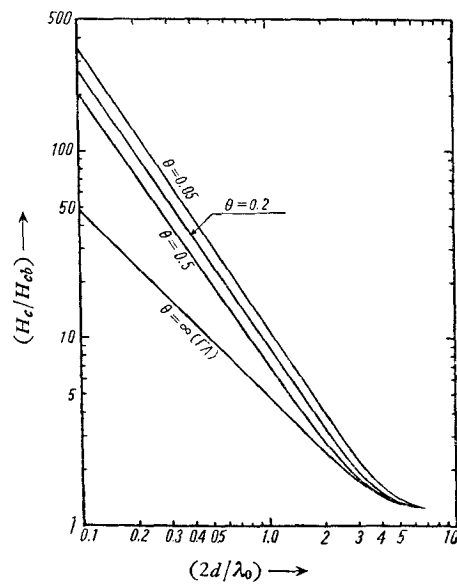


图 12 对不同的  $\theta$ , 临界磁场  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right)$  作为  $\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)$  的函数

的  $\theta$  分别将  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right)$  画作  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  以及  $\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)$  的函数。  $\theta = \infty$  是  $\Gamma\text{Л}$  理论的结果。 我们看到， 不仅  $\psi_{0c}^2$  及  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right)$  作为  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  的函数随  $\theta$  变化很大， 就是作为  $\left(\frac{2d}{\lambda_0}\right)$  的函数时，  $\theta$  的影响也不能忽略。 我们知道， 在  $\Gamma\text{Л}$  理论中出现的参量是  $\delta_0$  而不是  $\lambda_0$ ； 但是不少作者常把  $\Gamma\text{Л}$  理论中的  $\delta_0$ ， 当作是大样品的弱场穿透深度而与实验比较。 图 8, 10 和 12 的结果表明， 这样做是不够的。 在一般情形下， 临界能隙、 临界磁场必定依赖于两个参量， 而不能归为一个参量(其他的量也有类似的情形)。 另外， 我们顺便指出一个从具体计算得到的有趣事实： 当  $d = d_c$  时的临界磁场， 几乎总是  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right) \sim 2.20$ ， 而随  $\theta$  变化很少 [London 极限下，  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right) \Big|_{d_c} \cong 2.19$ ； Pippard 极限下，  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right) \Big|_{d_c} \cong 2.23$ ].

图 13 以扩大的尺度画出了  $d > d_c$  的  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right)$ , 并且对于  $\theta = \infty$ ,  $\theta = 0.2$  及  $\theta = 0.5$  分别画出了根据 (62) 计算的  $\left(\frac{H_{c1}}{H_{cb}}\right)$  以及根据 (63) 和 (64) 计算的  $\left(\frac{H_{c2}}{H_{cb}}\right)$  作为  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  的函数。

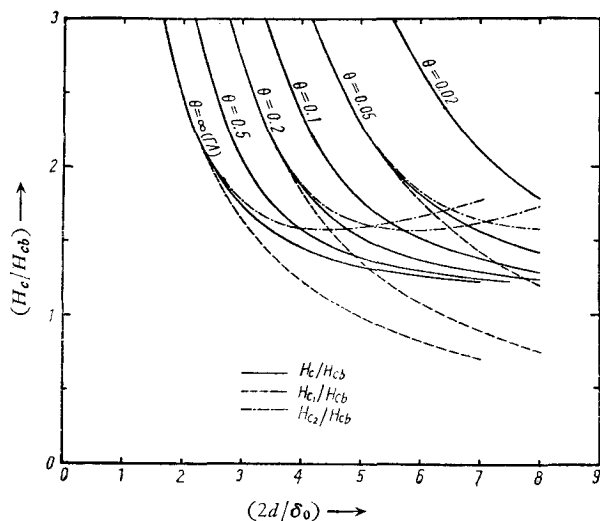


图 13 对不同的  $\theta$ ,  $\left(\frac{H_c}{H_{cb}}\right)$ ,  $\left(\frac{H_{c1}}{H_{cb}}\right)$  和  $\left(\frac{H_{c2}}{H_{cb}}\right)$  作为  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  的函数

## 五、討 論

1. 超导膜与半无限大超导体是不同的。在半无限大超导体中, 磁场对超导体性质的影响, 只是通过能隙函数的空间变化效应来实现; 但是在超导膜中, 磁场不仅影响能隙函数的空间变化, 而且直接影响能隙函数的平均值 (零级效应)。从文献[3]的讨论我们知道, 当参数  $\kappa$  小时, 能隙函数的空间变化不仅是小的 (例如, 当  $H_0 = H_{cb}$  时, 对于 Sn, 能隙的最大变化不超过 3%; 对于 Al, 能隙的最大变化不超过 0.3%), 而且是缓慢的 (在距离  $\frac{\delta_0}{\kappa} \sim \xi_0/(\Delta_i)^{1/2}$  内发生)。当膜的厚度  $d < \frac{\delta_0}{\kappa}$  时, 一方面, 磁场使能隙函数平均值的下降已超过了这个数量级; 另一方面, 能隙函数的最大空间变化还达不到这个值。因此, 研究磁场对于  $d < \frac{\delta_0}{\kappa}$  的超导膜性质的影响, 采用能隙等于常数的模型已经够了。当然, 对于更厚的膜, 零级效应可能小到与空间变化效应相比, 这个时候, 对于第一类超导体, 特别是 Pippard 型超导体, 总的说来, 磁场的影响是很小的。要研究这种小的效应, 假定能隙等于常数当然不行了。这个问题我们要在另外的文章中讨论。

2. 本文中我们研究了超导膜能隙随磁场的变化, 计算了超导膜的磁矩, 讨论了超导膜在磁场中的相变, 给出了临界能隙、平衡临界场、过热和过冷临界场等。在条件 (a)  $\frac{\theta}{\phi_0} \gg 1$  及 (b)  $\sigma = 0.36 \left(\frac{2d}{\xi_0}\right) \gg 1$  下, 所有这些趋于  $\Gamma\text{JI}$  理论的相应结果。如果除去  $\phi_0 \rightarrow 0$  这一特殊情形 (在讨论过冷临界场  $H_{c1}$  时, 我们遇到这种情形), 条件 (a) 就要求

$\theta \gg 1$ , 即相应的大样品处于 London 区域. 由此可见, 一般情形下,  $\Gamma\text{JI}$  理论只有对厚度  $d$  远大于  $\xi_0$ , 而且相应的大样品又处于 London 区域的膜才成立. 从文献[1—3]及本文的讨论我们知道, 有两种非局域效应. 一种是由  $\delta_0 \lesssim \xi_0$  引起的, 对任何形状、尺寸的样品都存在的, 我们称其为穿透非局域效应. 这个效应由参数  $\theta$  反映,  $\theta$  可称为穿透非局域参量.  $\theta$  越小, 穿透非局域效应越重要. 另一种是由于样品尺寸的变小而引起的, 我们称为尺寸非局域效应. 对于膜, 这个效应可由参数  $\sigma = 0.36 \left( \frac{2d}{\xi_0} \right)$  反映,  $\sigma$  称为膜的尺寸非局域参数.  $\sigma$  越小, 尺寸非局域效应越重要. 对于大样品, 只存在穿透非局域效应; 对于很薄的膜 ( $d \ll \delta_0$ ), 尺寸非局域效应起决定作用; 但是在一般的膜中, 两种效应都是存在的. 膜的局域极限, 只有在两种非局域效应都变得不重要的时候才能达到. 局域极限下就是  $\Gamma\text{JI}$  结果. 至于讨论  $\psi_0 \rightarrow 0$  的问题, 这是一个特殊情形. 在这种情形下, 穿透非局域效应是不重要的, 只要  $\sigma \gg 1$  就趋于  $\Gamma\text{JI}$  结果(见第三节关于过冷临界场的讨论).

3. 在条件  $\frac{\psi_0^2}{\pi^2} \frac{(2d)^2}{\delta_0^2} K\left(\frac{1}{\sigma}\right) \ll 1$  满足时, 本文的讨论回到文献[1]的结果. 数值计算表明, 这个条件基本上相当于  $d \ll \frac{1.4d_c}{\psi_0}$  ( $d_c$  是决定一级相变和二级相变区域的临界厚度). 由此可见, 虽然讨论  $\psi_0 \sim 0$  的问题(例如过冷临界场)时, 文献[1]的结果对任意厚度都有效; 但是讨论一般的问题时, 文献[1]的结果只能限于  $d \ll 1.4d_c$  的膜. 以后, 我们把满足此条件的膜称为薄膜. 文献[1]是本文的薄膜极限.

4. 文献[1—3]以及本文的结果表明, 由于非局域效应, 强磁场中超导体的性质与  $\Gamma\text{JI}$  理论有很大的歧离. 这一点, 实验上稍早一些已经观察到了. 不少作者企图通过对  $\Gamma\text{JI}$  理论的唯一修改来解释有关实验.

我们知道, 在整个  $\Gamma\text{JI}$  理论中, 只有两个参量:  $H_{cb}$  和  $\delta_0$ . 所有的物理量都可用它们表示出来.  $H_{cb}$  是大样品的临界磁场, 这是一个纯粹的热力学量; 根据  $\Gamma\text{JI}$  理论,  $\delta_0$  应当是大样品的 London 穿透深度.

对  $\Gamma\text{JI}$  理论最简单的一个推广, 是把  $\delta_0$  就看作是大样品的弱场穿透深度  $\lambda_0$ . 从本文的结果可以看出(见图 8, 10 和 12), 这样做之后, 虽然在一些情况下, 缩小了  $\Gamma\text{JI}$  理论与实际情况的歧离, 但差别仍然是相当大的, 特别是当尺寸非局域效应重要的时候(薄膜). 为了解决这个问题, 又有一些作者把  $\Gamma\text{JI}$  理论进一步唯象推广. 他们认为  $\Gamma\text{JI}$  理论的公式仍然是对的, 只要把  $\delta_0$  看成是一个“有效穿透深度”  $\delta_{\text{eff}}$ , 这个有效穿透深度不仅与  $\lambda_0$  有关, 而且还可以与膜的厚度有关. 在这方面, 特别应当提到 Toxen 等<sup>[11]</sup>的工作. Toxen 的有效穿透深度  $\delta_T$  是如此定义的: 令  $\Gamma\text{JI}$  理论中, 膜的弱场磁矩表达式与真正用非局域理论计算的弱场磁矩相等. 这样确定的  $\delta_T$ , 将是膜的厚度及非局域参数的函数. 因此, 用  $\delta_T$  代替  $\Gamma\text{JI}$  理论中的  $\delta_0$ , 就把其他物理量(例如膜的临界场)也表为另外的膜的厚度及非局域参量的函数了. Toxen 的做法的实质, 是企图把所有的非局域效应用一个参数  $\delta_T$  来反映. 为了判断他的做法是否合理, 我们作如下的考虑. 事实上, 通过弱场磁矩来定有效穿透深度并不是唯一的途径; 应当可以用令任一个量的  $\Gamma\text{JI}$  结果与非局域计算结果相等的办法来定  $\delta_{\text{eff}}$ . 例如, 可以令  $\Gamma\text{JI}$  理论的过冷临界场公式

$$\left( \frac{H_{c1}}{H_{cb}} \right)^2 = 24 \frac{\delta_{\text{eff}}^2}{(2d)^2},$$



这与本文所得的结果(59)相等. 由此定出

$$\delta_{\text{eff}} = [12\Phi_1(\sigma)]^{1/2}\delta_0.$$

如果 Toxen 的方法是合理的, 则通过不同途径确定的  $\delta_{\text{eff}}$ , 应当一致. 显然, 这是不可能的. 实际上, 上式所给出的  $\delta_{\text{eff}}$  仅仅是  $\sigma=0.36\left(\frac{2d}{\xi_0}\right)$  的函数; 而从弱场磁矩确定的  $\delta_{\text{eff}}$ , 除了是  $\sigma$  的函数外, 还是  $\left(\frac{2d}{\delta_0}\right)$  的函数. 只有非常薄的极限下, 二者才趋于一致; 对于稍厚的膜, 可能有相当大的区别. 由此可见, Toxen 等的方法还值得商榷. 看来, 把非局域效应只归为对 ГЛ 理论某一个参量的修正总是不够的.

5. 本文没有计算超导膜的临界电流. 从文献 [1] 的讨论可知, 尺寸非局域对它的影响, 与对本文所讨论的一些量的影响有原则的区别. 这个问题我们将另文讨论.

作者在进行此工作时曾得到吴杭生先生多次有益的讨论, 特此致谢; 作者对于王承瑞先生的帮助也表示谢意.

### 附录 非局域函数 $K(\eta)$ 表<sup>1)</sup>

非局域函数的定义是

$$G(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{2n+1}, \quad (\text{A.1})$$

$$F(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{\eta} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{2n+1} \right), \quad (\text{A.2})$$

$$\Phi(\eta) = G(\eta) - \frac{1}{\eta} F(\eta), \quad (\text{A.3})$$

$$K(\eta) = \frac{12}{7\zeta(3)} \frac{1}{\eta} \Phi(\eta). \quad (\text{A.4})$$

$\eta$  小时,

$$K(\eta) = 1 - \frac{31\zeta(5)}{140\zeta(3)} \eta^2 + \frac{381\zeta(7)}{3920\zeta(3)} \eta^4 - \dots; \quad (\text{A.5})$$

$\eta$  大时,

$$K(\eta) = \frac{3\pi^3}{28\zeta(3)} \frac{1}{\eta} \left[ 1 - \frac{16}{\pi^3} \frac{1}{\eta} (C + \log 2 + \log \eta) - \frac{8}{9\pi^3} \frac{1}{\eta^3} + \dots \right]. \quad (\text{A.6})$$

另外, 利用欧拉-马克劳林公式, 可得  $G$ ,  $F$  的如下近似表示式:

$$\begin{aligned} G(\eta) = & \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(2n+1)^2} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{2n+1} + \left[ \frac{1}{2(2N+1)} + \frac{1}{2(2N+1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3(2N+1)^3} \right] \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{2N+1} + \frac{1}{6(2N+1)^2} \frac{\eta}{[(2N+1)^2 + \eta^2]} - \\ & - \frac{1}{4\eta} \log \left[ 1 + \frac{\eta^2}{(2N+1)^2} \right] + R_2(N), \quad R_2(N) < \frac{29}{45} \frac{1}{(2N+1)^5}; \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

1) 本附录的计算是由雷啸霖, 杜厚文, 甄立明同志共同完成的.

$$\begin{aligned}
F(\eta) = & \frac{1}{2} \left[ (C + \log 2 - 1) + \frac{1}{24N^2} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^2} - \frac{7}{1920N^4} - \right. \\
& \left. - \frac{2}{15(2N+1)^4} - \log \left( 1 + \frac{1}{2N} \right) \right] + \frac{1}{2} \log [(2N+1)^2 + \eta^2] + \\
& + \frac{N}{\eta} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{2N+1} - \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{tg}^{-1} \frac{\eta}{2n+1} - \frac{1}{6[(2N+1)^2 + \eta^2]} - \\
& - \frac{1}{45[(2N+1)^2 + \eta^2]^2} + \frac{2(2N+1)^2}{45[(2N+1)^2 + \eta^2]^3} + R_3(N) + R'_3(N) \\
& R_3(N) < \frac{1}{2(2N+1)^6}, R'_3(N) < \frac{1}{500N^6}. \tag{A.8}
\end{aligned}$$

根据这些公式计算的  $K(\eta)$  函数列表如下:

| $\eta$ | $K(\eta)$ | $\eta$ | $K(\eta)$ | $\eta$ | $K(\eta)$ | $\eta$ | $K(\eta)$ |
|--------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|
| 0      | 1.0000    | 1.65   | 0.7357    | 4.6    | 0.4121    | 9.8    | 0.2292    |
| 0.05   | 0.9995    | 1.70   | 0.7268    | 4.7    | 0.4060    | 10.0   | 0.2254    |
| 0.10   | 0.9981    | 1.75   | 0.7181    | 4.8    | 0.3999    | 10.5   | 0.2163    |
| 0.15   | 0.9958    | 1.80   | 0.7095    | 4.9    | 0.3940    | 11.0   | 0.2079    |
| 0.20   | 0.9926    | 1.85   | 0.7010    | 5.0    | 0.3883    | 11.5   | 0.2002    |
| 0.25   | 0.9886    | 1.90   | 0.6927    | 5.1    | 0.3828    | 12.0   | 0.1931    |
| 0.30   | 0.9836    | 1.95   | 0.6845    | 5.2    | 0.3774    | 12.5   | 0.1864    |
| 0.35   | 0.9781    | 2.00   | 0.6765    | 5.3    | 0.3722    | 13.0   | 0.1803    |
| 0.40   | 0.9721    | 2.1    | 0.6610    | 5.4    | 0.3671    | 13.5   | 0.1744    |
| 0.45   | 0.9651    | 2.2    | 0.6462    | 5.5    | 0.3621    | 14.0   | 0.1690    |
| 0.50   | 0.9575    | 2.3    | 0.6317    | 5.6    | 0.3572    | 14.5   | 0.1639    |
| 0.55   | 0.9492    | 2.4    | 0.6178    | 5.7    | 0.3525    | 15.0   | 0.1590    |
| 0.60   | 0.9404    | 2.5    | 0.6044    | 5.8    | 0.3480    | 15.5   | 0.1544    |
| 0.65   | 0.9314    | 2.6    | 0.5916    | 5.9    | 0.3436    | 16.0   | 0.1502    |
| 0.70   | 0.9222    | 2.7    | 0.5793    | 6.0    | 0.3393    | 16.5   | 0.1462    |
| 0.75   | 0.9128    | 2.8    | 0.5673    | 6.2    | 0.3309    | 17.0   | 0.1423    |
| 0.80   | 0.9030    | 2.9    | 0.5558    | 6.4    | 0.3230    | 17.5   | 0.1387    |
| 0.85   | 0.8930    | 3.0    | 0.5448    | 6.6    | 0.3154    | 18.0   | 0.1352    |
| 0.90   | 0.8829    | 3.1    | 0.5342    | 6.8    | 0.3082    | 18.5   | 0.1319    |
| 0.95   | 0.8726    | 3.2    | 0.5238    | 7.0    | 0.3012    | 19.0   | 0.1288    |
| 1.00   | 0.8624    | 3.3    | 0.5140    | 7.2    | 0.2945    | 19.5   | 0.1258    |
| 1.05   | 0.8522    | 3.4    | 0.5044    | 7.4    | 0.2881    | 20.0   | 0.1230    |
| 1.10   | 0.8421    | 3.5    | 0.4953    | 7.6    | 0.2821    | 21     | 0.1177    |
| 1.15   | 0.8320    | 3.6    | 0.4865    | 7.8    | 0.2863    | 22     | 0.1128    |
| 1.20   | 0.8219    | 3.7    | 0.4779    | 8.0    | 0.2708    | 23     | 0.1083    |
| 1.25   | 0.8119    | 3.8    | 0.4696    | 8.2    | 0.2655    | 24     | 0.1042    |
| 1.30   | 0.8019    | 3.9    | 0.4615    | 8.4    | 0.2603    | 25     | 0.1003    |
| 1.35   | 0.7920    | 4.0    | 0.4538    | 8.6    | 0.2553    | 26     | 0.09673   |
| 1.40   | 0.7823    | 4.1    | 0.4463    | 8.8    | 0.2506    | 27     | 0.09343   |
| 1.45   | 0.7727    | 4.2    | 0.4390    | 9.0    | 0.2460    | 28     | 0.09033   |
| 1.50   | 0.7633    | 4.3    | 0.4320    | 9.2    | 0.2416    | 29     | 0.08744   |
| 1.55   | 0.7540    | 4.4    | 0.4251    | 9.4    | 0.2373    | 30     | 0.08472   |
| 1.60   | 0.7448    | 4.5    | 0.4184    | 9.6    | 0.2332    | 32     | 0.07977   |

(续表)

| $\eta$ | $K(\eta)$ | $\eta$ | $K(\eta)$ | $\eta$ | $K(\eta)$ | $\eta$   | $K(\eta)$ |
|--------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|----------|-----------|
| 34     | 0.07537   | 50     | 0.05232   | 90     | 0.02969   | 160      | 0.01692   |
| 36     | 0.07143   | 55     | 0.04776   | 95     | 0.02817   | 170      | 0.01594   |
| 38     | 0.06788   | 60     | 0.04394   | 100    | 0.02680   | 180      | 0.01507   |
| 40     | 0.06467   | 65     | 0.04068   | 110    | 0.02442   | 190      | 0.01429   |
| 42     | 0.06175   | 70     | 0.03788   | 120    | 0.02243   | 200      | 0.01358   |
| 44     | 0.05909   | 75     | 0.03543   | 130    | 0.02074   | $\infty$ | 0         |
| 46     | 0.05664   | 80     | 0.03329   | 140    | 0.01929   |          |           |
| 48     | 0.05439   | 85     | 0.03139   | 150    | 0.01804   |          |           |

## 参 考 文 献

- [1] 吳杭生、雷啸霖, 物理学报, **20** (1964), 873.  
 [2] 雷啸霖、吳杭生, 物理学报, **20** (1964), 991.  
 [3] 吳杭生、雷啸霖, 物理学报, **21** (1965), 1355.  
 [4] Schrieffer, J. R., *Phys. Rev.*, **106** (1957), 47.  
 [5] Nambu, Y., Tuan, S. F., *ibid.*, **133** (1964), A1.  
 [6] Гинзбург, В. Л., Ландау, Л. Д., *ЖЭТФ*, **20** (1950), 1064.  
 [7] Гуревич, А. В., *Там же*, **27** (1954), 195.  
 [8] Shoenberg, D., 1952. *Superconductivity*, Cambridge University Press.  
 [9] Гинзбург, В. Л., *ДАН СССР*, **83** (1952), 385.  
 [10] Ginzburg, V. L., *Physica*, **24** (1958), suppl. 42.  
 [11] Toxen, A. M., *Phys. Rev.*, **127** (1962), 382; Toxen, A. M., Burns, M. J., *ibid.*, **130** (1963), 1808; Toxen, A. M., *ibid.*, **133** (1964), A1218.

## SUPERCONDUCTING FILMS IN A MAGNETIC FIELD

LEI HSIAO-LIN

(Department of Physics, Shantung University)

## ABSTRACT

The theory developed in reference [1] has been extended to thicker films. The compensation equation and current equation are derived for superconducting films in a magnetic field, on the basis of a model which assumes the energy-gap function to be constant over the whole film and by means of Schrieffer's technique. The equations obtained are applied to discuss the influence of an external magnetic field on the superconducting properties of a metallic film and its transition changes. The formulas for determining energy-gap, magnetic moment, and critical fields  $H_c$ ,  $H_{c_1}$  and  $H_{c_2}$  which correspond respectively to equilibrium transition and to boundaries of supercooled and superheated region, are given. All the expressions have been reduced to the well-known results of the Ginzburg-Landau theory in the local limit and to those of reference [1] in the thin film limit. Non-local effects in the general case have been discussed in detail.