

变截面铁氧体柱中电磁波 传播的耦合波理论*

黄宏嘉 范滇元
(中国科学院)

提 要

在本文中,作者导出了一组普遍的耦合波方程,它描述了在部分填充以迴磁媒质的波导中电磁波的传播。利用这组方程,作者研究了纵向磁化铁氧体柱中的法拉第旋转(铁氧体柱的两端是截面变化的圆锥)。然后仍从耦合波的观点出发,研究了若干其他问题,如铁氧体柱对波的反射、柱的几何不规则性对法拉第旋转的影响。本文的分析说明,耦合波理论特别适用于复杂的包含有铁氧体的电磁场问题,这些问题如果用研究铁氧体时经常利用的正规方法来分析很难求得解决。

引 言

微波技术中最常用的法拉第旋转器件是一个圆柱形波导,在它的轴线上安放有一根纵向磁化的铁氧体柱;为了减小反射,铁氧体柱的两端作成锥形。就作者所知,这样一种器件,尽管它在铁氧体应用中是极其基本的,然而在过去已发表的文献中却还没有满意地被分析过。

在以前的论文中,为了简化分析,总是考虑均匀的铁氧体柱。计算法拉第旋转的方法不外两种。一种方法是利用边界条件及麦克斯韦方程组在铁氧体结构不同区域中的解来导出一个很复杂的特征方程。特征方程的解一般不能写成解析的形式,因而只有进行数字计算以求得铁氧体结构中简正模的传播常数,然后计算法拉第旋转角。另一种方法是熟知的微扰法:选定一个容易求解的较简单的参考结构(通常是一个空波导),从参考结构的解可以求得实际结构的简正波传播常数。显然,上述的两种方法没有一种适用于更加复杂的包含有变截面铁氧体柱的情形。

本文的目的是利用耦合波理论来研究这个问题。在微波理论的许多方面,特别是在不规则波导、微波电子学和参量电路中,耦合波的方法并不是新的。然而,对于微波铁氧体来说,看来耦合波的方法还研究得不够。

当然,也有过一些作者,他们用耦合波的方法研究迴磁媒质中电磁波的传播。Schelkunoff^[1]在他的原始论文中导出了一组广义的电报员方程;然而,它的应用范围仅限于全部填充以均匀迴磁媒质的波导。另一方面, Fox, Miller 和 Weiss^[2]虽然考虑了部分填充波导,但只进行了定性的讨论。在更近的一篇文章中, Никольский^[3] 利用正交展开研究

* 1964年11月28日收到。

了部分填充波导,但他得到的结果只有理论的意义,而不切实用。此外,他的方法对于我们这里所要分析的复杂结构仍然是无效的。

本文首先导出一组耦合波方程,它适用于更广泛的迴旋媒质电磁波传播问题。然后在耦合波理论的统一观点下,求解若干具有实际问题,包括变截面铁氧体柱中的法拉第旋转、柱对波的反射以及柱的几何不规则性对法拉第旋转的影响。在结束语中,讨论了耦合波理论在微波铁氧体中的若干其他应用。

一、耦合波方程组

在推导部分填充铁氧体波导的耦合波方程组时,我们仍然利用耦合波理论的基本方法——正交函数展开。但在推导中,我们采取了一个特殊的步骤,它和其他作者在推导类似方程组时所采取的步骤都有所不同。在下面的推导中,我们将强调说明这个步骤。

考虑一个内壁完全导电的直波导,它具有均匀截面,但其形状则是任意的。在波导轴上放有一纵向磁化的铁氧体柱,其几何形状和电参数($\vec{\mu}$, ϵ)在半径方向和轴线方向都可能是变化的。取普遍的柱形坐标系,在这种坐标系中,麦克斯韦方程组可写成下列形式¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_t E_z \times \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_t}{\partial z} &= -j\omega \mathbf{B}_t, \quad \nabla_t H_z \times \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_t}{\partial z} = j\omega \mathbf{D}_t, \\ (\nabla_t \times \mathbf{E}_t) \cdot \mathbf{i}_z &= -j\omega B_z, \quad (\nabla_t \times \mathbf{H}_t) \cdot \mathbf{i}_z = j\omega D_z; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_t &= \vec{\mu}_t \cdot \mathbf{H}_t, \quad \mathbf{D}_t = \epsilon \mathbf{E}_t, \\ B_z &= \mu_z H_z, \quad D_z = \epsilon E_z, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$ 是电场和磁场的横向矢量; E_z , H_z 是电场和磁场的纵分量; $\vec{\mu}_t$ 是并矢横向导磁系数,定义为

$$\vec{\mu}_t = \begin{pmatrix} \mu & -j\kappa \\ j\kappa & \mu \end{pmatrix};$$

μ_z 是纵向导磁系数; ϵ 是铁氧体媒质的介电常数; ∇_t 是算符 ∇ 的横向部分,即 $\nabla_t =$

$$= \frac{\partial}{h_1 \partial u} \mathbf{i}_u + \frac{\partial}{h_2 \partial v} \mathbf{i}_v.$$

作为参考波导,选择和实际结构几何形状相同的波导,但它没有填充铁氧体。然后将实际结构中的电磁场展开为参考波导中简正模的级数:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_t(u, v, z) &= - \sum_k [V_k(z) \nabla \Pi_k + V_k^*(z) \nabla \Pi_k^* \times \mathbf{i}_z], \\ \mathbf{H}_t(u, v, z) &= - \sum_k [I_k(z) \mathbf{i}_z \times \nabla \Pi_k + I_k^*(z) \nabla \Pi_k^*], \\ E_z(u, v, z) &= - \sum_k \chi_k V_{z,k}(z) \Pi_k, \\ H_z(u, v, z) &= - \sum_k \chi_k^* I_{z,k}^*(z) \Pi_k^*, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

1) 式中 $\nabla_t \times \mathbf{E}_t$ 的定义为 $\frac{1}{h_1 h_2} \begin{vmatrix} \mathbf{i}_u & \mathbf{i}_v & \mathbf{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & 0 \\ h_1 E_u & h_2 E_v & 0 \end{vmatrix}$; $\nabla_t \times \mathbf{H}_t$ 的定义相似。

Π_k 和 Π_k^* 是参考波导的电和磁赫兹函数, 它们适合二维亥姆霍兹方程和某些正交条件.

将方程(2),(3)代入(1), 得

$$\begin{aligned} \sum_k \left[\chi_k V_{z,k} \nabla \Pi_k \times \mathbf{i}_z - \frac{dV_k}{dz} \nabla \Pi_k \times \mathbf{i}_z + \frac{dV_k^*}{dz} \nabla \Pi_k^* \right] = \\ = -j\omega \vec{\mu}_t \cdot \sum_k [I_k \mathbf{i}_z \times \nabla \Pi_k + I_k^* \nabla \Pi_k^*], \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \sum_k \left[\chi_k^* I_{z,k}^* \nabla \Pi_k^* \times \mathbf{i}_z - \frac{dI_k^*}{dz} \nabla \Pi_k^* \times \mathbf{i}_z - \frac{dI_k}{dz} \nabla \Pi_k \right] = \\ = j\omega \epsilon \sum_k [V_k \nabla \Pi_k + V_k^* \nabla \Pi_k^* \times \mathbf{i}_z], \end{aligned} \quad (4b)$$

$$\sum_k \chi_k^* V_k^* \Pi_k^* = -j\omega \mu_z \sum_k \chi_k^* I_{z,k}^* \Pi_k^*, \quad (4c)$$

$$\sum_k \chi_k^2 I_k \Pi_k = -j\omega \epsilon \sum_k \chi_k V_{z,k} \Pi_k. \quad (4d)$$

在推导耦合波方程组时, 一个重要的步骤是找出纵向场 E_z , H_z 的幅度函数 ($V_{z,k}$, $I_{z,k}^*$) 和横向场矢量 $\mathbf{E}_t$, $\mathbf{H}_t$ 的幅度函数之间的关系. 为此, 将方程(4c)改写为下列形式:

$$\sum_k V_k^* \frac{\chi_k^* \Pi_k^*}{j\omega \mu_z} = - \sum_k \chi_k^* I_{z,k}^* \Pi_k^*. \quad (5)$$

这个步骤在数学上很简单, 然而它在决定幅度函数间的关系时却是关键性的¹⁾. 为了说清楚这一点, 将上式两边乘以 Π_i^* , 然后在铁氧体结构的整个横截面上积分. 利用赫兹函数的正交归一性, 就得出所需要的一个幅度函数关系式:

$$I_{z,i}^* = -\chi_i^* \sum_k V_k^* \iint_{\Omega} \frac{\chi_k^*}{j\omega \mu_z} \Pi_i^* \Pi_k^* d\Omega. \quad (6a)$$

类似地, 从方程(4d)可得到

$$V_{z,i} = -\chi_i \sum_k I_k \iint_{\Omega} \frac{\chi_k^2}{j\omega \epsilon} \Pi_i \Pi_k d\Omega. \quad (6b)$$

现在, 再将(4a)分别乘以 $\nabla \Pi_i \times \mathbf{i}_z$ 和 $\nabla \Pi_i^*$, 将(4b)分别乘以 $\nabla \Pi_i^* \times \mathbf{i}_z$ 和 $\nabla \Pi_i$, 然后进行面积分. 利用有关的正交性, 我们得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_i}{dz} &= - \sum_k I_k Z_{ik} + I_k^* Z_{i(*k)}, \\ \frac{dI_i}{dz} &= - \sum_k V_k Y_{ik} + V_k^* Y_{i(*k)}, \\ \frac{dV_i^*}{dz} &= - \sum_k I_k Z_{(*i)k} + I_k^* Z_{(*i)(*k)}, \\ \frac{dI_i^*}{dz} &= - \sum_k V_k Y_{(*i)k} + V_k^* Y_{(*i)(*k)}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

1) Morgan 在他的关于非均匀介电质填充波导的论文中^[4], 由于没有采取这个步骤, 所以不得不尝试通过无穷多联立方程组的求解来确定幅度函数间的关系式. 为了避免数学上的困难, 在这篇论文中不得不将无穷运算问题避而不谈. 此外, 从实用观点来看, 他的方法的一个缺点是所得结果仅仅适用于媒质不均匀性很小的情形. 而实际上, 在许多具体问题中, 包括本文所研究的部分填充铁氧体波导, 并不允许引入上述小不均匀性限制.

式中

$$\left. \begin{aligned} Z_{ik} &= \iint_{\Omega} \frac{(\chi_i \chi_k)^2}{j\omega \epsilon} \Pi_i \Pi_k d\Omega + j\omega \iint_{\Omega} [\mu \nabla \Pi_i \cdot \nabla \Pi_k + j\kappa (\nabla \Pi_i \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k] d\Omega, \\ Z_{i(*k)} &= -j\omega \iint_{\Omega} [\mu (\nabla \Pi_i \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k^* - j\kappa \nabla \Pi_i \cdot \nabla \Pi_k^*] d\Omega, \\ Z_{(*i)k} &= -j\omega \iint_{\Omega} [\mu \nabla \Pi_i^* \cdot (\nabla \Pi_k \times \mathbf{i}_z) + j\kappa \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_k] d\Omega, \\ Z_{(*i)(*k)} &= j\omega \iint_{\Omega} [\mu \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_k^* + j\kappa (\nabla \Pi_i^* \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k^*] d\Omega, \\ Y_{ik} &= j\omega \iint_{\Omega} \epsilon \nabla \Pi_i \cdot \nabla \Pi_k d\Omega, \\ Y_{i(*k)} &= j\omega \iint_{\Omega} \epsilon \nabla \Pi_i \cdot (\nabla \Pi_k^* \times \mathbf{i}_z) d\Omega, \\ Y_{(*i)k} &= j\omega \iint_{\Omega} \epsilon (\nabla \Pi_i^* \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k d\Omega, \\ Y_{(*i)(*k)} &= \iint_{\Omega} \frac{(\chi_i^* \chi_k^*)^2}{j\omega \mu_z} \Pi_i^* \Pi_k^* d\Omega + j\omega \iint_{\Omega} \epsilon \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_k^* d\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

方程组(7)通过变换式 $V = \sqrt{Z}(A^+ + A^-)$ 和 $I = (A^+ - A^-)/\sqrt{Z}$, 很容易转化为耦合波方程组. 这里, A^+ 和 A^- 分别是向前和向后模式的幅度, 在归一化条件下, 它们的数值平方直接代表功率; $Z = \beta/\omega \epsilon_0$ (对于电波), 或 $Z = \omega \mu_0/\beta$ (对于磁波). 所得的耦合波方程组可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_i^+}{dz} &= - \sum_k [K_{ik}^+ A_k^+ + K_{ik}^- A_k^- + K_{i(*k)}^+ A_{(*k)}^+ + K_{i(*k)}^- A_{(*k)}^-], \\ \frac{dA_i^-}{dz} &= + \sum_k [K_{ik}^- A_k^+ + K_{ik}^+ A_k^- + K_{i(*k)}^- A_{(*k)}^+ + K_{i(*k)}^+ A_{(*k)}^-], \\ \frac{dA_{(*i)}^+}{dz} &= - \sum_k [K_{(*i)k}^+ A_k^+ + K_{(*i)k}^- A_k^- + K_{(*i)(*k)}^+ A_{(*k)}^+ + K_{(*i)(*k)}^- A_{(*k)}^-], \\ \frac{dA_{(*i)}^-}{dz} &= + \sum_k [K_{(*i)k}^- A_k^+ + K_{(*i)k}^+ A_k^- + K_{(*i)(*k)}^- A_{(*k)}^+ + K_{(*i)(*k)}^+ A_{(*k)}^-], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} K_{ik}^{\pm} &= \frac{1}{2} [(Z_i Z_k)^{1/2} Y_{ik} \pm (Z_i Z_k)^{-1/2} Z_{ik}], \\ K_{i(*k)}^{\pm} &= \frac{1}{2} [(Z_i Z_k^*)^{1/2} Y_{i(*k)} \pm (Z_i Z_k^*)^{-1/2} Z_{i(*k)}], \\ K_{(*i)k}^{\pm} &= \frac{1}{2} [(Z_i^* Z_k)^{1/2} Y_{(*i)k} \pm (Z_i^* Z_k)^{-1/2} Z_{(*i)k}], \\ K_{(*i)(*k)}^{\pm} &= \frac{1}{2} [(Z_i^* Z_k^*)^{1/2} Y_{(*i)(*k)} \pm (Z_i^* Z_k^*)^{-1/2} Z_{(*i)(*k)}]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

从方程组(8), (10) 看出, 对于非消失波, 耦合系数满足负共轭关系式: $K_{ik}^{\pm} = -K_{ki}^{\pm}$ (i, k 指电波或磁波).

方程组(9)加上方程组(8)和(10)适用于任何部分填充以纵向磁化铁氧体柱的波导

(作为特例, 也包括全填充波导的情形)。这些方程组同时也适用于填充以非均匀介电质的波导, 这时假定 $\kappa = 0$, $\mu = \mu_z = \mu_0$ 。

二、法拉第旋转角

考虑图 1 所示的法拉第旋转器件。圆波导的直径为 a ; 铁氧体柱的半径是 b , 它是纵坐标 z 的函数:

$$b(z) = \begin{cases} b_1(z) = \frac{b_0}{z_1} z, & 0 < z < z_1, \\ b_2(z) = b_0, & z_1 < z < z_2, \\ b_3(z) = \frac{b_0}{l - z_2} (l - z), & z_2 < z < l, \end{cases} \quad (11)$$

假定铁氧体材料是均匀的。由于“笔状”铁氧体的几何形状接近于一个长椭球体, 所以可认为当均匀外磁场加在铁氧体上时, 铁氧体中的内磁场基本上是均匀的。因而, 我们有

$$\begin{aligned} \vec{\mu}(r, z) &= \begin{cases} \vec{\mu}, & 0 < r < b, \\ \mu_0, & b < r < a; \end{cases} \\ \epsilon(r, z) &= \begin{cases} \epsilon, & 0 < r < b, \\ \epsilon_0, & b < r < a. \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

根据上列方程, 方程(8)化为下列形式:

$$\left. \begin{aligned} Z_{ik} &= \frac{\chi_i \chi_k}{j\omega \epsilon_0} \delta_{ik} + j\omega \mu_0 \delta_{ik} + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) \iint_{\Omega_1} (\chi_i \chi_k)^2 \Pi_i \Pi_k d\Omega + \\ &\quad + j\omega(\mu - \mu_0) \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i \cdot \nabla \Pi_k d\Omega - \omega \kappa \iint_{\Omega_1} (\nabla \Pi_i \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k d\Omega, \\ Z_{i(*k)} &= -j\omega(\mu - \mu_0) \iint_{\Omega_1} (\nabla \Pi_i \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k^* d\Omega - \omega \kappa \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i \cdot \nabla \Pi_k^* d\Omega, \\ Z_{(*i)k} &= -j\omega(\mu - \mu_0) \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i^* \cdot (\nabla \Pi_k \times \mathbf{i}_z) d\Omega + \omega \kappa \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_k d\Omega, \\ Z_{(*i)(*k)} &= j\omega \mu_0 \delta_{(*i)(*k)} + j\omega(\mu - \mu_0) \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_k^* d\Omega - \\ &\quad - \omega \kappa \iint_{\Omega_1} (\nabla \Pi_i^* \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k^* d\Omega, \\ Y_{ik} &= j\omega \epsilon_0 \delta_{ik} + j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i \cdot \nabla \Pi_k d\Omega, \\ Y_{i(*k)} &= j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i \cdot (\nabla \Pi_k^* \times \mathbf{i}_z) d\Omega, \\ Y_{(*i)k} &= j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \iint_{\Omega_1} (\nabla \Pi_i^* \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_k d\Omega, \\ Y_{(*i)(*k)} &= \frac{\chi_i^* \chi_k^*}{j\omega \mu_0} \delta_{(*i)(*k)} + j\omega \epsilon_0 \delta_{(*i)(*k)} + j\omega(\epsilon - \epsilon_0) \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_k^* d\Omega, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

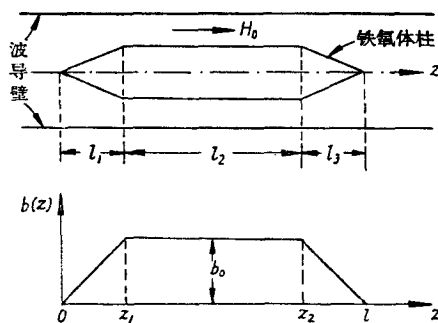


图 1

式中 Q_1 是铁氧体柱的变化截面; Π_i 和 Π_i^* , 和以前一样, 是空波导的赫兹函数:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{mn} &= A_{mn} J_m \left(\frac{v_{mn}}{a} r \right) \cos m\varphi, \quad J_m(v_{mn}) = 0, \quad A_{mn} = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\pi}} / v_{mn} J_{m+1}(v_{mn}); \\ \Pi_{mn}^* &= A_{mn}^* J_m \left(\frac{u_{mn}}{a} r \right) \cos m\varphi, \quad J'_m(u_{mn}) = 0, \quad A_{mn}^* = \sqrt{\frac{\epsilon_m}{\pi}} / \sqrt{u_{mn}^2 - m^2} J_m(u_{mn}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

当上列方程代入方程(13)时, 就发现: 除了具有相同周向标注 m 的一对特殊波型外, 所有的系数 (Z, Y) 都等于零。因而, 在应用耦合波理论时, 就只需要考虑这些波型。假定在未引入铁氧体柱时只有 H_{11} 波是非消失波, 那么, 如果铁氧体柱的直径比波导管直径小很多 (实际上常常是这样), 在计算法拉第旋转时, 就只需要考虑 H_{11} 偶波和奇波。利用(13)式, 很容易从方程(10)导出这两个波型微扰后的传播常数以及有关的耦合系数:

$$\left. \begin{aligned} K_{ee} &= K_{00} = j\beta_{11} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] \iint_{Q_1} \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_i^* dQ \right\}, \\ K_{e0} &= -K_{0e} = \frac{A_1^2 \pi \kappa}{2 \mu_0} \beta_{11} J_1^2 \left(u_{11} \frac{b}{a} \right), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} \iint_{Q_1} \nabla \Pi_i^* \cdot \nabla \Pi_i^* dQ &= A_1^2 \pi \left\{ \left(u_{11} \frac{b}{a} \right) J_1 \left(u_{11} \frac{b}{a} \right) J'_1 \left(u_{11} \frac{b}{a} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(u_{11} \frac{b}{a} \right)^2 J_1'^2 \left(u_{11} \frac{b}{a} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(u_{11} \frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right] J_1^2 \left(u_{11} \frac{b}{a} \right) \right\}, \\ A_1^2 &= 2/\pi(u_{11}^2 - 1)J_1^2(u_{11}), \end{aligned}$$

$\beta_{11} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 - (u_{11}/a)^2}$ 是 H_{11} 波的微扰前传播常数。这里我们注意到 H_{11} 偶波和奇波在有铁氧体波导中, 正象它们在空波导中一样, 仍然是简并的。同时还注意到, 耦合系数正比于 κ , 后者是表明铁氧体材料具有各向异性的一个参量。在损耗很小而可忽略的假定下, 微扰后传播常数为纯虚数, 而耦合系数为实数。于是两个波型的耦合波方程可以写成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_e}{dz} &= -K_{ee}A_e - K_{e0}A_0, \\ \frac{dA_0}{dz} &= -K_{0e}A_e - K_{00}A_0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

这又可以改写为矩阵形式:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{K}\mathbf{A}, \quad (17a)$$

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \frac{dA_e}{dz} \\ \frac{dA_0}{dz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_e \\ A_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -K_{ee} & -K_{e0} \\ -K_{0e} & -K_{00} \end{pmatrix}. \quad (17b)$$

为了求解上列的变系数方程组,我们引入下列变换^[5]:

$$\mathbf{W} = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{A}, \quad (18)$$

式中 $\mathbf{W}$ 是包含有矩阵元 w_1 和 w_2 的一个新的列矩阵, $\mathbf{O}$ 是 $\mathbf{K}$ 的模矩阵. 利用方程(18), 矩阵方程(17a)变换为

$$\mathbf{W}' = (\mathbf{O}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{O} - \mathbf{O}^{-1}\mathbf{O}')\mathbf{W}. \quad (19)$$

很容易用矩阵代数的方法找出 $\mathbf{K}$ 的模矩阵以及有关的本征值:

$$\mathbf{O} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{pmatrix}, \quad (20a)$$

$$\lambda_{1,2} = -(K_{ee} \pm jK_{e0}). \quad (20b)$$

因为 $\mathbf{O}$ 是一个常数矩阵(所以如此是因为所考虑的两个波型是简并的), 方程(19)右边第二项等于零, 而方程(19)化为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W}' &= \mathbf{A}\mathbf{W}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

它的解是

$$w_1(z) = d_1 e^{\int_0^z \lambda_1 dz}, \quad w_2(z) = d_2 e^{\int_0^z \lambda_2 dz}. \quad (22)$$

根据变换式(18),我们有

$$\left. \begin{aligned} A_e(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} w_1(z) + \frac{1}{\sqrt{2}} w_2(z) = \frac{d_1}{\sqrt{2}} e^{\int_0^z \lambda_1 dz} + \frac{d_2}{\sqrt{2}} e^{\int_0^z \lambda_2 dz}, \\ A_0(z) &= \frac{j}{\sqrt{2}} w_1(z) - \frac{j}{\sqrt{2}} w_2(z) = \frac{j d_1}{\sqrt{2}} e^{\int_0^z \lambda_1 dz} - \frac{j d_2}{\sqrt{2}} e^{\int_0^z \lambda_2 dz}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中任意常数可以根据给定的端点条件来确定. 假定单位幅度的 H_{11} 偶波投入铁氧体柱, 就有下列的端点条件:

$$A_e(0) = 1, \quad A_0(0) = 0. \quad (24)$$

利用这些条件,定出 $d_1 = d_2 = 1/\sqrt{2}$, 而方程(23)化为

$$\left. \begin{aligned} A_e(z) &= \frac{1}{2} e^{\int_0^z \lambda_1 dz} + \frac{1}{2} e^{\int_0^z \lambda_2 dz} = e^{-\int_0^z K_{ee} dz} \cos \left(\int_0^z K_{e0} dz \right), \\ A_0(z) &= \frac{j}{2} e^{\int_0^z \lambda_1 dz} - \frac{j}{2} e^{\int_0^z \lambda_2 dz} = e^{-\int_0^z K_{ee} dz} \sin \left(\int_0^z K_{e0} dz \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

注意对于所有的 z , H_{11} 偶波和奇波都是同相的, 因而它们合成一个线极化 H_{11} 波, 其场矢量沿着铁氧体波导的轴连续地旋转. 在 $z = l$ 处, 旋转角等于

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\sin \int_0^l K_{e0} dz}{\cos \int_0^l K_{e0} dz} = \int_0^l K_{e0} dz, \quad (26)$$

这里 $\theta < 0$ 和 $\theta > 0$ 分别表示顺时针和逆时针旋转 (在两种情形下都是朝直流磁场的方向看)。

将 K_{e0} 的表示式代入上列公式, 就得到变截面铁氧体柱中的法拉第旋转角¹⁾:

$$\theta = \frac{1}{u_{11}^2 - 1} \frac{1}{J_1^2(u_{11})} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \int_0^l J_1^2\left(u_{11} \frac{b}{a}\right) dz, \quad (27)$$

实际用的铁氧体柱很少是粗的 (通常 $b_0/a < 30\%$, 于是 $u_{11} \frac{b}{a} < 0.552$); 在这个条件下, 方程(27)右边被积函数展开后可只取头两项, 即 $J_1\left(u_{11} \frac{b}{a}\right) \approx \frac{1}{2}\left(u_{11} \frac{b}{a}\right) - \frac{1}{16}\left(u_{11} \frac{b}{a}\right)^3$, 然后将这两项积分。引入这个近似, 很容易导出 H_{11} 偶波通过两端成锥形的铁氧体柱的法拉第旋转角公式²⁾:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \\ \left. \begin{aligned} \theta_1 &\approx \frac{1}{u_{11}^2 - 1} \frac{1}{J_1^2(u_{11})} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \left[\left(u_{11} \frac{b_0}{a}\right)^2 / 12 - \left(u_{11} \frac{b_0}{a}\right)^4 / 80 \right] l_1, \\ \theta_2 &\approx \frac{1}{u_{11}^2 - 1} \frac{1}{J_1^2(u_{11})} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \left[\left(u_{11} \frac{b_0}{a}\right)^2 / 4 - \left(u_{11} \frac{b_0}{a}\right)^4 / 16 \right] l_2, \\ \theta_3 &\approx \frac{1}{u_{11}^2 - 1} \frac{1}{J_1^2(u_{11})} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \left[\left(u_{11} \frac{b_0}{a}\right)^2 / 12 - \left(u_{11} \frac{b_0}{a}\right)^4 / 80 \right] l_3, \end{aligned} \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

式中 θ 是总的旋转角; θ_2 是通过铁氧体柱中部 (长度为 l_2) 的旋转角, θ_1 和 θ_3 分别是通过始端和终端锥形铁氧体 (长度为 l_1 和 l_3) 的旋转角。

通常铁氧体柱两端的锥形是同长的 ($l_1 = l_3$); 对于这种铁氧体柱, 将 $u_{11} = 1.84$,

1) 这是一个较普遍的公式, 它包含以前其他作者利用若干不同方法得到过的一些特殊结果。例如, 对于均匀截面的铁氧体柱, (27) 式化为

$$\theta = \frac{1}{u_{11}^2 - 1} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \left[\frac{J_1\left(u_{11} \frac{b_0}{a}\right)}{J_1(u_{11})} \right]^2 l,$$

它和 Severin^[6] 利用微扰法导出的公式一致。另一方面, 对于全填充铁氧体波导, (27) 式又简化为 Suhl 和 Walker^[7] 用另一种方法导出的公式:

$$\theta = \frac{1}{u_{11}^2 - 1} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} l.$$

2) 一个有趣的结果是, 在 $l_1 = l_3$ 的特殊情形下, 一次近似有 $\theta_1/\theta_3 = 1/3$, 这恰好是锥体平均截面积和中部圆柱体截面积之比。事实上, 很容易证明: 无论两端变截面部分的半径以什么方式沿 z 轴变化, 上述的结论都是成立的。例如, 设 b 为 z 的任何函数, 则有

$$\begin{aligned} \theta_1 &\approx \frac{u_{11}^2}{4(u_{11}^2 - 1)} \frac{1}{J_1^2(u_{11})} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \int_0^{l_1} \left(\frac{b}{a}\right)^2 dz, & \bar{s}_1 &= \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \pi b^2 dz; \\ \theta_3 &\approx \frac{u_{11}^2}{4(u_{11}^2 - 1)} \frac{1}{J_1^2(u_{11})} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \left(\frac{b_0}{a}\right)^2 l_1, & s_2 &= \pi b_0^2. \end{aligned}$$

从上面的式子我们仍然得到

$$\theta_1/\theta_3 = \frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} \left(\frac{b}{b_0}\right)^2 dz = \bar{s}_1/s_2. \quad (28')$$

$J_1(u_{11}) = 0.582$ 代入方程(28), 就得到下列公式:

$$\theta = 0.349 \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \left(\frac{b_0}{a} \right)^2 (3l - 4l_1) - 0.177 \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} \left(\frac{b_0}{a} \right)^4 (5l - 8l_1), \quad (29)$$

这个形式非常便于进行数值计算.

三、反 射 系 数

为了计算从铁氧体柱端点的反射, 除了以前计算法拉第旋转时已考虑过的两个前向的 H_{11} 偶波和奇波外, 还需要多考虑另外两个波型. 它们就是后向的 H_{11} 偶波和奇波; 所以必需同时考虑两个后向波的原因是因为它们的相速相等, 因而, 和相应的一对前向波型一样, 它们相互之间也发生强耦合.

从方程(10)和(13), 可以得出微扰后传播常数和有关的耦合系数:

$$\left. \begin{aligned} K_{ee}^+ &= K_{00}^+ = j\beta_{11} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] \iint_{\Omega_1} \nabla H_e^* \cdot \nabla H_e^* d\Omega \right\} = j\beta^+, \\ K_{ee}^- &= K_{00}^- = j\beta_{11} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} - \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] \iint_{\Omega_1} \nabla H_e^* \cdot \nabla H_e^* d\Omega = jC^-, \\ K_{e0}^+ &= -K_{0e}^+ = \frac{A_1^2 \pi}{2} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} J_1^2 \left(u_{11} \frac{b}{a} \right) = C^+, \\ K_{e0}^- &= -K_{0e}^- = -\frac{A_1^2 \pi}{2} \frac{\kappa}{\mu_0} \beta_{11} J_1^2 \left(u_{11} \frac{b}{a} \right) = -C^+, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中所含符号的意义和对(15)式所作的说明一样.

根据方程(9), 四个波的耦合方程组是

$$\mathbf{A}' = \mathbf{K}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_e^+ \\ A_0^+ \\ A_e^- \\ A_0^- \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -K_{ee}^+ & -K_{e0}^+ & -K_{ee}^- & -K_{e0}^- \\ -K_{0e}^+ & -K_{00}^+ & -K_{0e}^- & -K_{00}^- \\ K_{ee}^- & K_{e0}^- & K_{ee}^+ & K_{e0}^+ \\ K_{0e}^- & K_{00}^- & K_{0e}^+ & K_{00}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -j\beta^+ & -C^+ & -jC^- & C^+ \\ C^+ & -j\beta^+ & -C^+ & -jC^- \\ jC^- & -C^+ & j\beta^+ & C^+ \\ C^+ & jC^- & -C^+ & j\beta^+ \end{pmatrix}. \quad (31)$$

上列四个包含有变系数的方程是不易求解的. 然而, 我们所研究的耦合波问题有一个特点可以用来简化数学分析, 即: 虽然两个前向波和两个后向波之间的耦合都是强的, 但任何一个前向波和任何一个后向波之间的耦合却是弱得多 (因为这样两个波的相速差很大). 因而, 如果采取某种步骤使得强耦合项变小, 那么就能利用迭代法求出上列方程组的近似解. 用矩阵代数的术语来说, 我们需要引入一个变换式将 $\mathbf{K}$ 的两个主“分矩阵” $\begin{pmatrix} -j\beta^+ & -C^+ \\ C^+ & -j\beta^+ \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} j\beta^+ & C^+ \\ -C^+ & j\beta^+ \end{pmatrix}$ 都化为对角线型¹⁾. 从方程(20)的形式看出, 下列形式的矩阵是满足我们的要求的:

$$\mathbf{O} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ j & -j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & j & -j \end{bmatrix}. \quad (32)$$

1) 参看钱景仁最近的一篇文章^[8].

通过变换 $\mathbf{A} = \mathbf{O}\mathbf{W}$, 方程(31)化为

$$\mathbf{W}' = \mathbf{N}\mathbf{W}, \quad (33)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1^+ \\ w_2^+ \\ w_1^- \\ w_2^- \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & -m_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -m_2 \\ m_1 & 0 & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & -\lambda_2 \end{bmatrix},$$

式中

$$\lambda_{1,2} = -j\beta^+ \mp jC^+, \quad m_{1,2} = jC^- \mp jC^+. \quad (34)$$

从矩阵 $\mathbf{N}$ 的形式看出, $\mathbf{W}$ 的耦合方程组分裂为两个独立的耦合波方程组, 第一组是对 w_1^+ 和 w_1^- 的:

$$\begin{cases} (w_1^+)' = \lambda_1 w_1^+ - m_1 w_1^-, \\ (w_1^-)' = m_1 w_1^+ - \lambda_1 w_1^-, \end{cases} \quad (35)$$

第二组则是对 w_2^+ 和 w_2^- 的:

$$\begin{cases} (w_2^+)' = \lambda_2 w_2^+ - m_2 w_2^-, \\ (w_2^-)' = m_2 w_2^+ - \lambda_2 w_2^-. \end{cases} \quad (36)$$

从一些数值计算容易看出, 对于常用的法拉第旋转器件来说, 我们在这里考虑的波型其耦合能力满足 $Q_{w_1} = |m_1/\lambda_1| \ll 1$ 和 $Q_{w_2} = |m_2/\lambda_2| \ll 1$ 的条件. 因此, 方程(35)和(36)都是弱耦合方程, 它们的一次近似解为

$$\begin{cases} w_1^-(z) = e^{-\int_0^z \lambda_1 dz} \left[w_1^-(0) + w_1^+(0) \int_0^z m_1 e^{2\int_0^{z'} \lambda_1 dz'} dz' \right], \\ w_2^-(z) = e^{-\int_0^z \lambda_2 dz} \left[w_2^-(0) + w_2^+(0) \int_0^z m_2 e^{2\int_0^{z'} \lambda_2 dz'} dz' \right], \end{cases} \quad (37)$$

这里 $w(0)$ 是 w 在 $z=0$ 处的值.

和以前一样, 仍假定入射波是 H_{11} 偶波, 那么, 对于现在的问题来说, 铁氧体波导的端点条件就可以写成 $A_e^+(0) = 1$, $A_0^+(0) = 0$, $A_e^-(l) = 0$, $A_0^-(l) = 0$. 根据变换式 $\mathbf{W} = \mathbf{O}^{-1}\mathbf{A}$, w 的端点条件是

$$\begin{cases} w_1^+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, & w_2^+(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ w_1^-(l) = 0, & w_2^-(l) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

利用这些条件, 方程(37)可以写成

$$\begin{cases} w_1^-(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^l m_1 e^{2\int_0^{z'} \lambda_1 dz'} dz, \\ w_2^-(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^l m_2 e^{2\int_0^{z'} \lambda_2 dz'} dz. \end{cases} \quad (39)$$

根据变换式 $\mathbf{A} = \mathbf{O}\mathbf{W}$ 并利用方程(34), 我们得到

$$\begin{cases} A_e^-(0) = \int_0^l \left[C^+ \sin \left(\int_0^{z'} 2C^+ dz' \right) - jC^- \cos \left(\int_0^{z'} 2C^+ dz' \right) \right] e^{-2j \int_0^{z'} \beta^+ dz'} dz, \\ A_0^-(0) = - \int_0^l \left[C^+ \cos \left(\int_0^{z'} 2C^+ dz' \right) + jC^- \sin \left(\int_0^{z'} 2C^+ dz' \right) \right] e^{-2j \int_0^{z'} \beta^+ dz'} dz. \end{cases} \quad (40)$$

从这个结果我们直接导出两端呈锥形的铁氧体柱当入射波为 H_{11} 偶波时的反射系数:

$$R = \frac{A_r^-(0)}{A_e^+(0)} = A_r^-(0) = \int_0^l e^{-2j \int_0^z \beta^+ dz'} \left[C^+ \sin \left(\int_0^z 2C^+ dz' \right) - jC^- \cos \left(\int_0^z 2C^+ dz' \right) \right] dz. \quad (41)$$

在特殊情形下, 如果铁氧体柱的截面是均匀的(两端没有锥体), 方程(41)化为

$$R_0 = \frac{e^{-2j\beta_0^+ l}}{2(\beta_0^{+2} - C_0^{+2})} \{ C_0^+ (j\beta_0^+ \sin 2C_0^+ l + C_0^+ \cos 2C_0^+ l) - jC_0^- (j\beta_0^+ \cos 2C_0^+ l - C_0^+ \sin 2C_0^+ l) \} - \frac{(C_0^+)^2 + C_0^- \beta_0^+}{2[(\beta_0^+)^2 - (C_0^+)^2]}, \quad (42)$$

下标“0”代表取 $b(z) \equiv b_0$ 时的值。

四、具有几何小不规则性的铁氧体柱

为了进一步说明耦合波理论在研究迴磁媒质中电磁波传播问题时非常有效, 我们再来分析铁氧体柱几何小变形对法拉第旋转的影响。因为在实际工作中我们感兴趣的常是公差问题, 所以这里我们将只考虑小变形。

根据耦合波理论, 任何形式的不规则性(它是指实际结构不同于理想参考结构的某种偏差)都会在耦合系数的公式中反映出来。根据方程(10)和(13), 铁氧体圆波导中 H_{11} 偶波和奇波之间的耦合系数可以写成下列的一般形式:

$$\left. \begin{aligned} K_{ee} &= j\beta_{11} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_e^* \cdot \nabla \Pi_e^* d\Omega \right\}, \\ K_{00} &= j\beta_{11} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_0^* \cdot \nabla \Pi_0^* d\Omega \right\}, \\ K_{e0} &= \frac{j\beta_{11}}{2} \left\{ \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\epsilon - \epsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] \iint_{\Omega_1} \nabla \Pi_e^* \cdot \nabla \Pi_0^* d\Omega - \frac{1}{2} \beta_{11} \frac{\kappa}{\mu_0} \iint_{\Omega_1} (\nabla \Pi_e^* \times \mathbf{i}_z) \cdot \nabla \Pi_0^* d\Omega \right\}, \\ K_{0e} &= -K_{e0}, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

这里的横截面 Ω_1 已经不再是正圆形了。

因为实际用的铁氧体柱一般都很短, 所以为了简化数学计算, 可以研究一个柱形铁氧体¹⁾, 并假定几何变形在轴的方向是均匀的。在这种情况下, 铁氧体柱的半径就仅仅是角向坐标 φ 的函数。因而, 我们有

$$b(\varphi) = b_0 [1 + \delta(\varphi)] \quad |\delta(\varphi)| \ll 1, \quad (44)$$

式中 b_0 代表一常量, 它是铁氧体柱半径的平均值; $\delta(\varphi)$ 代表离开一理想圆形的偏差。

由于 $\delta(\varphi)$ 必然是一个周期性函数, 故可将它展开为下列形式的傅里叶级数:

$$b(\varphi) = b_0 \left[1 + \sum_{p=1} \delta_p \cos p(\varphi - \varphi_p) \right], \quad (45)$$

1) 我们不去研究铁氧体柱两端锥体的几何变形问题。我们可以合理地假定: 锥体部分对法拉第旋转角的贡献仍可利用公式(28')来估计。

其中 ϕ_p 角量度了铁氧体柱变形的取向; $p = 1$ 的项代表了铁氧体柱的轴偏离, 离开波导轴的最大偏差为 $b_0\delta_1$; $p = 2$ 的项代表了柱体截面的椭圆度, 其半长轴和半短轴分别为 $b_0 + b_0\delta_2$ 和 $b_0 - b_0\delta_2$; $p = 3$ 和 $p = 4$ 的项分别代表“三重”和“四重”变形, 等等. 从实际需要来说, 我们只需要考虑轴偏离和椭圆度这两种情形.

下面就利用展开式 (45) 来计算方程 (43) 中的面积分. 这里我们遇到形式为 $\iint_{\Omega_1} g(\varphi)f(r)d\Omega = \int_0^{2\pi} \left[g(\varphi) \int_0^{b(\varphi)} f(r)rdr \right] d\varphi$ 的积分, 它是很难严格算出的. 但在 $|\delta(\varphi)| \ll 1$ 的条件下, 积分 $\int_0^{b(\varphi)} f(r)rdr$ (它是积分上限 b 的函数) 可以在 $b = b_0$ 的邻近展开为泰勒级数:

$$\int_0^{b(\varphi)} f(r)rdr \approx \int_0^{b_0} f(r)rdr + b_0\delta(\varphi)f(b_0)b_0 + \frac{[b_0\delta(\varphi)]^2}{2!} \frac{d}{dr} [f(r)r]_{r=b_0}.$$

利用上列级数不难算出方程 (43) 中的面积分, 而耦合系数可以写成

$$\left. \begin{aligned} K_{ee} &= j\beta_0 + j\beta_2 + jh_1 + jh_2, & K_{00} &= j\beta_0 + j\beta_2 - jh_1 - jh_2, \\ K_{e0} &= C_0 + c_2 + j\Delta_1 + j\Delta_2, & K_{0e} &= -C_0 - c_2 + j\Delta_1 + j\Delta_2, \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -(\delta_2 \cos 2\psi_2) \frac{A_1^2 \pi}{4} \beta_{11} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] [J_1^2 - x^2 J_1'^2], \\ \Delta_1 &= -(\delta_2 \sin 2\psi_2) \frac{A_1^2 \pi}{4} \beta_{11} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] [J_1^2 - x^2 J_1'^2], \\ \beta_2 &= (\delta_1^2 + \delta_2^2) \frac{A_1^2 \pi}{8} \beta_{11} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] [2x(2 - x^2) J_1 J_1' - x^2 J_1'^2 - J_1^2], \\ c_2 &= (\delta_1^2 + \delta_2^2) \frac{A_1^2 \pi}{4} \beta_{11} \frac{\kappa}{\mu_0} x^2 [J_1'^2 + J_1 J_1'], \\ h_2 &= -(\delta_1^2 \cos 2\psi_1) \frac{A_1^2 \pi}{16} \beta_{11} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] [x^2 J_1'^2 + 2x^3 J_1 J_1' - J_1^2], \\ \Delta_2 &= -(\delta_1^2 \sin 2\psi_1) \frac{A_1^2 \pi}{16} \beta_{11} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right] [x^2 J_1'^2 + 2x^3 J_1 J_1' - J_1^2]. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

这里 J 代表贝塞尔函数 $J(x)$, $x = u_{11} \frac{b_0}{a}$; 下标“0”代表 $\delta = 0$ 的项, 这样 β_0 和 C_0 的表示式就和方程 (15) 一致; 下标“1”和“2”分别代表准确到 δ 的一次和二次的项.

从方程 (46) 看出, 当实际的铁氧体柱并非理想圆柱体时, $K_{ee} \neq K_{00}$, 并且 K_{e0} 是复量. 根据本文附录中的分析, 此时的输出波是椭圆极化的. 利用附录中导出的有关公式, 可算出和椭圆极化相关的法拉第旋转角的改变、介入损耗的增加以及隔离性的降低.

在计算法拉第旋转角之前, 有必要来估计一下耦合能力的大小. 耦合能力的一次近似为

$$Q = \left| \frac{2K_{e0}}{K_{ee} - K_{00}} \right| \approx \left| \frac{C_0 + j\Delta_1}{jh_1} \right|. \quad (48)$$

在强直流磁场的情形下, $C_0 \gg \Delta_1, h_1$, 因而 $Q \gg 1$, 这表明所考虑的两个波型是强耦合的. 法拉第旋转主要决定于 C_0 的值, 至于几何变形的影响则仅仅是附加一修正项. 根据

(A-7)式, 法拉第旋转角等于 $\text{tg } 2\theta = \cos \phi \text{tg } 2|K_{e0}|l$; 因为 $\frac{\Delta_1}{C_0} \ll 1$, $\cos \phi \approx 1$, 于是

$$\left. \begin{aligned} \theta &\approx |K_{e0}|l = \sqrt{(C_0 + c_2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)^2}l \approx C_0l \left\{ 1 + \frac{c_2}{C_0} + \frac{\Delta_1^2}{2C_0^2} \right\} \approx \\ &\approx C_0l \left\{ 1 + \frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 (u_{11} b_0/a)^2 [J_1'^2 + J_1 J_1'']}{2J_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \frac{(\delta_2 \sin 2\psi_2)^2}{(\kappa/\mu_0)^2} \left[\frac{\omega^2 \mu_0 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{\beta_{11}^2} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \right]^2 \left[1 - \left(u_{11} \frac{b_0}{a} \right)^2 \left(\frac{J_1'}{J_1} \right)^2 \right]^2 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

这个方程解释了实验中曾发现过的一个有趣现象, 即铁氧体柱椭圆变形对法拉第旋转的影响和椭圆长短轴的取向有关; 当 ψ_2 等于 0 或 $\pi/2$ 时 (表明入射波电场方向和椭圆的长轴或短轴相重合), 变形的影响最小, 但当 $\psi_2 = \pi/4$ 时 (电场方向在长短轴中间), 变形的影响最大。

五、结 束 语

很难回答为什么在许多微波问题中 (包括不规则波导、微波管和参量电子学等) 用得非常多的耦合波理论, 在研究铁氧体时却一直还未引起足够的注意。本文的目的正是说明很多复杂的利用其他方法很难解决的铁氧体波导边值问题, 可以通过耦合波的分析方法系统地得到解决。

在一篇论文中自然不可能研究所有的有关问题, 但这里不妨再举一些例子, 它们很容易利用耦合波的概念来求解。

例如, 从事微波铁氧体技术的人都有过这样的经验: 在恒定磁场下, 当铁氧体柱的直径增大到超过某一极限时, 法拉第旋转角会突然变小。从耦合波的概念来看, 这是因为某一杂波原来在空波导中是消失波, 但在包含有直径够大的铁氧体的波导中则变成了非消失波, 因而在包含有铁氧体的一段波导中来回反射, 在一定条件下发生谐振。可以估计到, 杂波谐振对法拉第旋转效应起着强烈的影响。

作为另一个例子, 从耦合波方程组的解 (25) 式, 很容易算出消耗在铁氧体柱中的少量功率。

附 录

H_{11} 偶波和奇波的耦合波方程组是

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{KA}, \\ \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} -K_{ee} & -K_{e0} \\ -K_{0e} & -K_{00} \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (A-1)$$

一般 $K_{ee} \approx K_{00}$ 。对于无损耗情形, K_{ee} , K_{00} 都是纯虚数, 但 K_{e0} , K_{0e} 可能是复数, 仍满足负共轭关系: $K_{e0} = -K_{0e}$ 。

利用端点条件 $A_e(0) = 1$, $A_0(0) = 0$, 方程 (A-1) 的解可写成

$$\left. \begin{aligned} A_e(z) &= e^{-j\beta z} [\cos \phi z - j(1 + Q^2)^{-1/2} \sin \phi z], \\ A_0(z) &= e^{-j\beta z} e^{-j\phi} (1 + Q^2)^{-1/2} \sin \phi z, \end{aligned} \right\} \quad (A-2)$$

式中

$$j\beta = (K_{ee} + K_{00})/2, Q = |2K_{e0}/K_{ee} - K_{00}|, \phi = \text{Arg}(K_{e0}), \psi = |K_{e0}|\sqrt{1 + Q^{-2}}.$$

可以看出, H_{11} 偶波和奇波一般既具有不同幅度也具有不同相位, 因而合成波是一个椭圆极化波。在这种情形下, 一般用直线极化波来描述法拉第旋转的概念不再适用。不过, 我们却仍可以象通常那样从实验技术的角度来理解法拉第旋转角。为此, 让我们想象在铁氧体圆波导的终端接有一段矩形波导(通过一个方圆过渡器连接), 从它取得输出功率。显然, 对于椭圆极化波来说, 仍然存在着矩形波导的某一确定取向, 它给出最大的输出功率; 很自然地, 我们就利用矩形波导的这个取向的改变作为法拉第旋转角的定义。

以上定义的法拉第旋转角可以这样来确定: 在偏离垂直轴 θ 角的方向上, 波幅度为 $A(\theta) = A_e \cos \theta + A_0 \sin \theta$, 而相应的输出功率为

$$P = |A|^2 = |A_e \cos \theta + A_0 \sin \theta|^2.$$

将方程(A-2)代入上列表示式, 就有

$$P = \cos^2 \theta [\cos^2 \psi z + (1 + Q^2)^{-1} \sin^2 \psi z] + (1 + Q^{-2})^{-1} \sin^2 \theta \sin^2 \psi z + (1 + Q^{-2})^{-1/2} \sin 2\theta \left[\frac{1}{2} \cos \phi \sin 2\psi z + (1 + Q^2)^{-1/2} \sin \phi \sin^2 \psi z \right], \quad (\text{A-3})$$

P 是 θ 的函数。从 P 的微商, 容易确定使 P 取极大值的 θ 角(表示为 $\theta_{\max}$):

$$\text{tg } 2\theta_{\max} = (1 + Q^{-2})^{-1/2} \frac{\cos \phi \sin 2\psi z + 2(1 + Q^2)^{-1/2} \sin \phi \sin^2 \psi z}{\cos 2\psi z + 2(1 + Q^2)^{-1} \sin^2 \psi z}. \quad (\text{A-4})$$

相应的最大功率为

$$P_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{ [\cos 2\psi z + 2(1 + Q^2)^{-1} \sin^2 \psi z]^2 + (1 + Q^{-2})^{-1} [\cos \phi \sin 2\psi z + 2(1 + Q^2)^{-1/2} \sin \phi \sin^2 \psi z]^2 \}^{1/2}. \quad (\text{A-5})$$

相似地, 可以证明使输出功率取极小值的 θ 角为

$$\theta_{\min} = \theta_{\max} + \pi/2,$$

相应的最小功率为

$$P_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \{ [\cos 2\psi z + 2(1 + Q^2)^{-1} \sin^2 \psi z]^2 + (1 + Q^{-2})^{-1} [\cos \phi \sin 2\psi z + 2(1 + Q^2)^{-1/2} \sin \phi \sin^2 \psi z]^2 \}^{1/2}. \quad (\text{A-6})$$

根据方程(A-4)到(A-6)可以得出结论: 在椭圆极化的情形下, 法拉第旋转在下列三个方面和直线极化的情形显然不同:

1. 旋转角不仅和耦合系数 K_{e0} 有关, 同时还和耦合能力 Q 有关;
2. 最大输出功率降低了 ($P_{\max} < 1$), 相当于存在着附加介入损耗;
3. 最小输出功率永远不等于零 ($P_{\min} \neq 0$), 其结果是使隔离系数减小。

方程(A-4)到(A-6)是普遍适用的。对于强耦合 ($Q \gg 1$) 和弱耦合 ($Q \ll 1$) 这两种极端情形, 这些方程可以进一步简化。

强耦合情形:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta_{\max} &= \cos \phi \operatorname{tg} 2|K_{e0}|z, \\ P_{\max} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \{ \cos^2(2|K_{e0}|z) + \cos^2 \phi \sin^2(2|K_{e0}|z) \}^{1/2}, \\ P_{\min} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \{ \cos^2(2|K_{e0}|z) + \cos^2 \phi \sin^2(2|K_{e0}|z) \}^{1/2}; \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

弱耦合情形:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2\theta_{\min} &= 2Q \sin \frac{\Delta\beta}{2} z \cos \left(\frac{\Delta\beta}{2} z - \phi \right), \\ P_{\max} &= 1 - 2Q^2 \sin^2 \frac{\Delta\beta}{2} z \sin^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\beta}{2} z - \phi \right), \\ P_{\min} &= 2Q^2 \sin^2 \frac{\Delta\beta}{2} z \sin^2 \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\beta}{2} z - \phi \right), \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8})$$

式中 $\Delta\beta = |K_{ee} - K_{00}|$.

应该指出,上列结果只适用于波型之间发生常量耦合的无损耗系统.

致谢 马大猷、鲍家善、林为干诸先生对本文初稿提出了许多宝贵的改进意见,钱景仁同志对文中若干问题作了有益的讨论,特此表示感谢.

参 考 文 献

- [1] Schelkunoff, S. A., *BSTJ*, **31** (1952), 784.
- [2] Fox, A. G., Miller, S. E. and Weiss, M. T., *ibid.*, **34** (1955), 5.
- [3] Никольский, В. В., *Радиотехника и электроника*, **6** (1961), 74.
- [4] Morgan, S. P., *BSTJ*, **36** (1957), 1209.
- [5] Huang Hung-chia, *Scientia Sinica*, **9** (1960), 142.
- [6] Severin, H. K. F., *Trans. IRE.*, MTT-7 (1959), 337.
- [7] Suhl, H. and Walker, L. K., *BSTJ*, **33** (1954), 1133.
- [8] 钱景仁, 守恒耦合系统中缓变系数法应用的推广 (尚未发表).

THE COUPLED-MODE THEORY OF WAVE PROPAGATION THROUGH FERRITE ROD WITH VARIABLE CROSS-SECTION

HUANG HUNG-CHIA FAN DIAN-YUAN
(*Academia Sinica*)

ABSTRACT

In this paper, the authors have derived a general set of coupled-mode equations for wave propagation in a wave-guide partially filled with gyromagnetic medium. With these equations, they have investigated the problem of Faraday rotation in a longitudinally magnetized ferrite rod with tapering cross-sections at both ends. Additional problems, e.g., the reflection from the ferrite rod and the effect of geometrical irregularity of the rod on the Faraday rotation, have been subsequently attacked by the same coupled-mode approach. It is shown that the coupled-mode theory is admirably suitable for the important problems herein treated. It would be extremely difficult to discuss these problems with any standard method more commonly used in the study of microwave ferrites.