

对关联对于 Pb^{208} 附近 α 衰变的影响—— α 约化宽度的绝对值的计算*

高美娟 陈金全 施士元

(南 京 大 学)

提 要

本文利用 BCS 波函数及投影波函数计算了 ^{84}Po 的偶-偶同位素及 ^{85}At 的奇-偶同位素的 α 约化宽度 r_a^2 的绝对值。文中仔细研究了 r_a^2 的绝对值及相对趋势和参数 b, R_0, G 的关系; b 为谐振子势阱参数, R_0 为道半径, G 为对关联相互作用常数。

计算结果的分析表明: (1) 对关联有利于 α 的形成, 它可以使 α 约化宽度的绝对值增加一个数量级, 且可以使相对趋势与实验符合得更好。(2) BCS 波函数的粒子数不守恒的缺点, 对于满壳外粒子数不多的核的 α 衰变来说相当严重。用了粒子数守恒的投影波函数, 绝对值可以增加 1—2 倍, 且可以使相对趋势变好。(3) 考虑了阻塞效应后, 宽度约减小 10%, 使奇 A 核的阻碍因子的理论值和实验值一致。(4) 绝对值对参数的选择很敏感, 而相对趋势对参数则不太敏感, 要使理论的绝对值接近实验值, 必须取 R_0 在 $8f$ 以内。

一、引 言

近年来, 人们对原子核表面的结构发生了浓厚的兴趣。Wilkinson^[1] 在曼彻斯特和金斯顿会议上都提出了核表面究竟是“光滑”还是“粗糙”的问题, 即在核表面区域中, 核子密度是象零级独立粒子模型所预言的那样均匀下降为零呢, 还是核子结合成象 α, d, t 等的结团(Cluster)。很多实验^[1,2] 表明, 后一种图象是切合实际的, 其中最重要的事实是某些核的 α, d, t 复杂粒子的约化宽度很大。但是, 如何说明这种“结团”现象还是一个没有弄清楚的问题。对轻核, 有人^[3] 提出一种所谓结团模型, 把某些轻核波函数明显地写成若干个结团(如 α, d, t 等)波函数的反对称的乘积。但我们以前的工作^[4] 和 Smirnov^[5] 的计算表明, 至少对于轻核中的正常宇称态, 结团现象可以用简单的壳模型说明, 它能给出相当大的复杂粒子的约化宽度, 而不需要额外地引入一种“结团”机构。重核的情形如何, 还不清楚。Mang^[6] 用单组态壳模型波函数计算了 Pb 附近的 α 衰变宽度, 发现相对趋势基本上可以被说明, 但绝对值却比实验值小五个数量级。后来, Harada^[7] 及 Zeh 和 Mang^[8] 用组态混合波函数计算了 $Po^{210}, Po^{212}, Bi^{210}$ 少数几种核的 α 宽度, 发现组态混合很重要, 可以使 α 宽度增加 5—10 倍, 但比起实验值来还是小得多。由于计算的复杂性, 这种计算只能限于少数几种核。近年来, 超导理论的进展使得我们有可能把计算的范围大大扩展。Соловьев^[9] 首先在超铀元素区用超流模型计算了对关联对于 α 衰变几率的影响, 发现它

* 1964 年 8 月 20 日收到。

可以使 α 约化宽度增加三个数量级。我们曾用超流模型初步估计了 Pb^{208} 附近 α 约化宽度的相对值^[10], 发现在相对趋势上与实验符合较好。本文进一步计算了 α 约化宽度的绝对值, 并仔细研究了绝对值和相对趋势对各种参数变化的依赖关系, 目的是为了研究绝对值和相对趋势可否同时与实验相符, 亦即研究在壳模型的基础上考虑了对关联后, 能否解释重核表面的结团现象。

二、计算公式

我们先讨论粒子数为固定的情形。设母态为满壳外有 n 个中子和 n' 个质子的情形, 我们不考虑 n - p 关联, 因此母态波函数

$$\Psi_{J_i M_i} = \sum_{M_{N_i} M_{P_i}} C_{J_{N_i}^{M_i}, J_{P_i}^{M_{P_i}}}^{J_i M_i} \Psi_{J_{N_i}^{M_{N_i}}} \Psi_{J_{P_i}^{M_{P_i}}}, \quad (1)$$

这里 $\Psi_{J_{N_i}^{M_{N_i}}}$ ($\Psi_{J_{P_i}^{M_{P_i}}}$) 是 n 个中子 (n' 个质子) 的反对称波函数。同样, 子核波函数为

$$\Psi_{J_f M_f} = \sum_{M_{N_f} M_{P_f}} C_{J_{N_f}^{M_f}, J_{P_f}^{M_{P_f}}}^{J_f M_f} \Psi_{J_{N_f}^{M_{N_f}}} \Psi_{J_{P_f}^{M_{P_f}}}, \quad (2)$$

这里 $\Psi_{J_{N_f}^{M_{N_f}}}$ ($\Psi_{J_{P_f}^{M_{P_f}}}$) 是 $n-2$ 个中子 ($n'-2$ 个质子) 的反对称波函数。

由母核态 $\Psi_{J_i M_i}$ 衰变到子核态 $\Psi_{J_f M_f}$, 并放出一个相对运动轨道角动量为 L_α 的 α 粒子的约化宽度振幅为^[11]

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha L_\alpha} = & \left(\frac{\hbar^2 R_0}{2M} \right)^{1/2} \binom{n}{2}^{1/2} \binom{n'}{2}^{1/2} \int \Psi_{J_i M_i}^* (12 \cdots n 1' 2' \cdots n') \times \\ & \times \left[\sum_{M_f M_\alpha} C_{J_{N_f}^{M_f}, L_\alpha M_\alpha}^{J_f M_f} \Psi_{J_f M_f} (3 \cdots n 3' \cdots n') \chi_\alpha (12 1' 2') Y_{L_\alpha M_\alpha}(\Omega_\alpha) \right] dq_f dq_\alpha d\Omega_\alpha \Big|_{R=R_0}; \end{aligned} \quad (3)$$

式中 R_0 是道半径, M 为 α 粒子和子核的折合质量, $\binom{n}{2}$ 为二项式系数, 号码 $12 \cdots n$ ($1' 2' \cdots n'$) 代表中(质)子编号, $\chi_\alpha (12 1' 2')$ 为 α 粒子的内部波函数, \mathbf{R} 代表 α 粒子质心的径矢量, $d\Omega_\alpha$ 为 \mathbf{R} 方向上的立体角元, $dq_f dq_\alpha$ 代表对子核坐标和 α 粒子的内部坐标积分, 整个积分是在 $R = R_0$ 的道表面上进行的。

我们取 α 粒子的内部波函数为高斯型的:

$$\begin{aligned} \chi_\alpha (12 1' 2') = & \left(2\beta^{3/2} / \frac{1}{2}! \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\beta^2}{2} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \right] (Y_{00})^3 \chi_0^0(12) \chi_0^0(1' 2'), \\ \mathbf{q}_1 = & \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{r}_{1'} - \mathbf{r}_{2'}), \quad \mathbf{q}_3 = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{1'} - \mathbf{r}_{2'}); \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $\chi_0^0(12)$ 和 $\chi_0^0(1' 2')$ 分别是中子和质子的自旋单态波函数。

为计算积分(3), 我们先将母态 $\Psi_{J_{N_i}^{M_{N_i}}}$, $\Psi_{J_{P_i}^{M_{P_i}}}$ 用双粒子 f. p. 系数展开, 然后改用狄拉克符号, 于是式(3)表示为

$$\gamma_{\alpha L_\alpha} / \left(\frac{\hbar^2 R_0}{2M} \right)^{1/2} = \binom{n}{2}^{1/2} \binom{n'}{2}^{1/2} \langle J_i M_i | (J_f, \alpha L_\alpha) J_i M_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n}{2}^{1/2} \binom{n'}{2}^{1/2} \sum_{\substack{i_1 i_2 I_N J_N \\ i_1' i_2' I_P J_P}} \langle (J_{N_i} J_{P_i}) J_i M_i | [(J_N I_N) J_{N_i}, (J_P I_P) J_{P_i}] J_i M_i \rangle \times \\
&\quad \times \langle [(J_N I_N) J_{N_i}, (J_P I_P) J_{P_i}] J_i M_i | (J_f, \alpha L_a) J_i M_i \rangle \quad (5) \\
&= \binom{n}{2}^{1/2} \binom{n'}{2}^{1/2} \sum_{\substack{i_1 i_2 I_N J_N L \\ i_1' i_2' I_P J_P J}} \langle J_{N_i} | \{ J_N I_N \} \rangle \langle J_{P_i} | \{ J_P I_P \} \rangle \times \\
&\quad \times \langle [(J_N I_N) J_{N_i}, (J_P I_P) J_{P_i}] J_i M_i | [(J_N J_P) J, (I_N I_P) L] J_i M_i \rangle \times \\
&\quad \times \langle [(J_N J_P) J, (I_N I_P) L] J_i M_i | [(J_N J_{P_f}) J_f, \alpha L_a] J_i M_i \rangle \quad (6) \\
&= \binom{n}{2}^{1/2} \binom{n'}{2}^{1/2} \sum_{\substack{i_1 i_2 I_N \\ i_1' i_2' I_P}} \langle J_{N_i} | \{ J_N I_N \} \rangle \langle J_{P_i} | \{ J_P I_P \} \rangle \langle (I_N I_P) L_a | \alpha L_a \rangle \times \\
&\quad \times [J_{N_i} J_{P_i} J_f L_a]^{1/2} \begin{Bmatrix} J_{N_f} & I_N & J_{N_i} \\ J_{P_f} & I_P & J_{P_i} \\ J_f & L_a & J_i \end{Bmatrix}; \quad (7)
\end{aligned}$$

式中 $\langle J_{N_i} | \{ J_N I_N \}$ 为双粒子 f. p. 系数, $|I_N\rangle$ 代表两个角动量为 j_1 和 j_2 的中子耦合成角动量为 I_N 的反对称归一化波函数, $[j_1 j_2 \dots]^{1/2} = (2j_1 + 1)^{1/2} (2j_2 + 1)^{1/2} \dots$, $\{ \}$ 为 $9j$ 符号.

为计算方便, 我们把式(7)中出现的双粒子 f. p. 系数转换到二次量子化表象中去, 这样可证(见附录 I)

$$\binom{n}{2}^{1/2} \langle J_{N_i} | \{ J_N I_N \} \rangle = \langle J_{N_i} | A_{I_N}^+(j_1 j_2) | J_{N_f} \rangle, \quad (8)$$

这里

$$\langle J_{N_i} | A_{I_N}^+(j_1 j_2) | J_{N_f} \rangle = \sum_{M_N M_{N_f}} C_{J_{N_i} M_{N_i} I_N M_N}^{J_{N_f} M_{N_f}} \langle J_{N_i} M_{N_i} | A_{I_N M_N}^+(j_1 j_2) | J_{N_f} M_{N_f} \rangle, \quad (9)$$

而

$$A_{I_N M_N}^+(j_1 j_2) = \sqrt{\frac{1}{1 + \delta_{j_1 j_2}}} \sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{I_N M_N} a_{j_1 m_1}^+ a_{j_2 m_2}^+ \quad (10)$$

为一对粒子的产生算符, $a_{j m}^+$ 为单粒子产生算符. 注意, 式(8)右边及式(9)中的 $\langle J_{N_i} |$ 和 $|J_{N_f}\rangle$ 为初、末态在二次量子化表象中的表示, 因此, 式(8)右边不论初态或终态都是对 n 个中子完全反对称的, 而式(8)左边只有初态是全部反对称的, 终态则是局部反对称的, 二项式系数 $\binom{n}{2}^{1/2}$ 反映了这两者之间的差别.

将式(8)代入式(7), 便能得到母态和子态的粒子数为固定情形的 α 约化宽度的一般表示式:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\alpha L_a} / \left(\frac{\hbar^2 R_0}{2M} \right)^{1/2} &= \sum_{\substack{i_1 i_2 I_N \\ i_1' i_2' I_P}} \langle J_{N_i} | A_{I_N}^+(j_1 j_2) | J_{N_f} \rangle \langle J_{P_i} | A_{I_P}^+(j_1' j_2') | J_{P_f} \rangle \times \\
&\quad \times \langle (I_N I_P) L_a | \alpha L_a \rangle [J_{N_i} J_{P_i} J_f L_a]^{1/2} \begin{Bmatrix} J_{N_f} & I_N & J_{N_i} \\ J_{P_f} & I_P & J_{P_i} \\ J_f & L_a & J_i \end{Bmatrix}. \quad (11)
\end{aligned}$$

这公式的一个重要的特征是它不再含有二项式系数 $\binom{n}{2}$ 和 $\binom{n'}{2}$, 也就是说, 不显含粒子数 n 和 n' , 因此, 即使对粒子数不固定的情形, 例如在利用 BCS 波函数来计算 $\gamma_{\alpha L_a}$ 时, 式(11)也仍然成立, 因为我们可以把 BCS 波函数展为具有固定粒子数的波函数的迭加:

$$\Psi(\text{BCS}) = \sum C_n \Psi(n); \quad (12)$$

其中每一项对 $\gamma_{\alpha L_a}$ 的贡献都可用式(11)来表示, 把所有项的贡献全加起来, 就可得到 BCS 波函数所给出的 $\gamma_{\alpha L_a}$.

式(11)中的 $\langle (I_N I_P) L_a | \alpha L_a \rangle$ 为两个中子和两个质子的波函数和 α 粒子波函数的重迭积分:

$$\begin{aligned} \langle (I_N I_P) L_a | \alpha L_a \rangle = & \int [\psi_{(j_1 j_2) l_N}(12) \psi_{(j_1' j_2') l_P}(1'2')]_{L_a M_a}^* \times \\ & \times \chi_{\alpha}(121'2') Y_{L_a M_a}(\Omega_a) dq_a d\Omega_a |_{R=R_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

如果单粒子波函数取谐振子波函数, 则上式可用 Talmi 变换系数^[12,13]表示出来^[6,7], 即

$$\begin{aligned} \langle (I_N I_P) L_a | \alpha L_a \rangle = & [j_1 j_2 j_1' j_2' I_N I_P]^{1/2} \begin{Bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & j_1 \\ l_2 & \frac{1}{2} & j_2 \\ I_N & 0 & I_N \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1' & \frac{1}{2} & j_1' \\ l_2' & \frac{1}{2} & j_2' \\ I_P & 0 & I_P \end{Bmatrix} \times \\ & \times \sqrt{2 - \delta_{j_1 j_2}} \sqrt{2 - \delta_{j_1' j_2'}} \left(\frac{2\sqrt{b\beta}}{b + \beta} \right)^{9/2} \sum_{N_1 N_2} \langle N L_a, n_3 0 : L_a | N_1 I_N, N_2 I_P : L_a \rangle \times \\ & \times \langle N_1 I_N, n_1 0 : I_N | \nu_1 l_1, \nu_2 l_2 : I_N \rangle \langle N_2 I_P, n_2 0 : I_P | \nu_1' l_1', \nu_2' l_2' : I_P \rangle \times \\ & \times \left(\frac{1}{2}! \right)^{-3/2} \left[\frac{(n_1 + \frac{1}{2})! (n_2 + \frac{1}{2})! (n_3 + \frac{1}{2})!}{n_1! n_2! n_3!} \right]^{1/2} \left(\frac{\beta - b}{\beta + b} \right)^{n_1 + n_2 + n_3} \cdot \phi_{N_S}(R_0); \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\phi_{N_S}(R_0)$ 为 α 粒子的质心波函数

$$\phi_{N_S}(R_0) = \sqrt{\frac{2N!(4b)^{3/2}}{(N+1/2)!}} \exp(-2bR_0^2) L_N^{1/2}(4bR_0^2), \quad (15)$$

$\langle N I, n_0 : I | \nu_1 l_1, \nu_2 l_2 : I \rangle$ 为 Talmi 变换系数. 上式在求和时必须满足能量守恒的条件:

$$2\nu_1 + l_1 + 2\nu_2 + l_2 = 2N_1 + I_N + 2n_1,$$

$$2\nu_1' + l_1' + 2\nu_2' + l_2' = 2N_2 + I_P + 2n_2,$$

$$2N_1 + I_N + 2N_2 + I_P = 2N + L_a + 2n_3.$$

本文要处理的是偶-偶核的基态-基态跃迁以及奇 A 核的有利跃迁 ($J_i = J_f$). 下面我们给出所需要的 f. p. 系数(8).

1. 单组态^[14]

(1) 偶数粒子系统 初态 $|i\rangle = [N(p)]^{-1} (A_0^+)^p |0\rangle$, 末态 $|f\rangle = [N(p-1)]^{-1} (A_0^+)^{p-1} |0\rangle$; 其中 $p = \frac{n}{2}$, $N(p)$ 为归一化系数

$$N(p) = \sqrt{\frac{p! \Omega_j!}{\Omega_j^p (\Omega_j - p)!}}, \quad \Omega_j = j + \frac{1}{2}; \quad (16)$$

因此

$$\langle i \| A_0^+ \| f \rangle = \frac{R(j)}{\sqrt{\Omega_j}}, \quad R(j) = \sqrt{p(\Omega_j - p + 1)}. \quad (17a)$$

(2) 奇数粒子系统 初态 $|i\rangle = [N(p)]^{-1} a_{jm}^+ (A_0^+)^p |0\rangle$, 末态 $|f\rangle = [N(p-1)]^{-1} \times a_{jm}^+ (A_0^+)^{p-1} |0\rangle$; 其中 $p = \frac{n-1}{2}$, 而归一化系数

$$N(p) = \sqrt{\frac{p!(\Omega_j - 1)!}{\Omega_j^p (\Omega_j - p - 1)!}};$$

因此

$$\langle i \| A_0^+ \| f \rangle = \frac{R(j)}{\sqrt{\Omega_j}}, \quad R(j) = \sqrt{p(\Omega_j - p)}. \quad (18a)$$

2. BCS 波函数

(1) 偶数粒子系统

$$|i\rangle = \prod_{jm>0} (u_j^i + v_j^i a_{jm}^+ a_{j-m}^+) |0\rangle, \quad (19)$$

$$|f\rangle = \prod_{jm>0} (u_j^f + v_j^f a_{jm}^+ a_{j-m}^+) |0\rangle. \quad (20)$$

我们定义 a_{j-m}^+ 为 a_{jm}^+ 的时间反演, 即

$$a_{jm}^+ |0\rangle = \psi_{jm}, \quad (21)$$

$$a_{j-m}^+ |0\rangle = \hat{T} \psi_{jm} = (-1)^{j-m+l} \psi_{j-m}^D, \quad (22)$$

这里 \hat{T} 为时间反演算符.

$$\langle i \| A_0^+(j^a) \| f \rangle = (-)^l \frac{1}{\sqrt{\Omega_j}} \sum_{m>0} \langle i | a_{jm}^+ a_{j-m}^+ | f \rangle = (-)^l \frac{R(j)}{\sqrt{\Omega_j}},$$

$$R(j) = \Omega_j u_j^i v_j^i \prod_{j'} (u_{j'}^i u_{j'}^i + v_{j'}^i v_{j'}^i)^{\Omega_{j'} - \delta_{j'j}}. \quad (17b)$$

(2) 奇数粒子系统

$$|i\rangle = a_{j_0 m_0}^+ \prod_{jm \neq j_0 m_0} (u_j^i + v_j^i a_{jm}^+ a_{j-m}^+) |0\rangle, \quad (23)$$

$$|f\rangle = a_{j_0 m_0}^+ \prod_{jm \neq j_0 m_0} (u_j^f + v_j^f a_{jm}^+ a_{j-m}^+) |0\rangle; \quad (24)$$

$$\langle i \| A_0^+(j^2) \| f \rangle = (-)^l \frac{R(j)}{\sqrt{\Omega_j}},$$

$$R(j) = (\Omega_j - \delta_{j j_0}) u_j^i v_j^i \prod_{j'} (u_{j'}^i u_{j'}^i + v_{j'}^i v_{j'}^i)^{\Omega_{j'} - \delta_{j'j} - \delta_{j'j_0}}. \quad (18b)$$

3. 投影波函数 (公式推导见附录 II)

(1) 偶数粒子系统

对应的 $R(j)$ 为

1) 因子 $(-1)^l$ 的出现是因为我们所用的 Y_{lm} 是按 Condon, Shortley 定义的, $\hat{T} Y_{lm} = Y_{lm}^* (-1)^m Y_{lm}$.

$$R(j) = \Omega_j \frac{v_j^i}{u_j^i} \frac{C^{(p-1)}(0, j)}{\sqrt{A_i^{(p)}(0) A_j^{(p-1)}(0)}}, \quad (17c)$$

$p = \frac{n}{2}$, n 为偶数, 它是初态 i 所包含的核子(例如中子)数.

(2) 奇数粒子系统

对应的 $R(j)$ 为

$$R(j) = (\Omega - \delta_{j0}) \frac{v_j^i}{u_j^i} \frac{C^{(p-1)}(0, j_0, j)}{\sqrt{A_i^{(p)}(0, j_0) A_j^{(p-1)}(0, j_0)}}, \quad (18c)$$

$p = \frac{n-1}{2}$, n 为奇数, 它是初态 i 所包含的核子数. 式中

$$C(Z, j_1 \cdots, j_n) = \prod_j (1 + Z c_j)^{a_i - \delta_{i1} - \cdots - \delta_{in}}, \quad (25)$$

$$A(Z, j_1 \cdots, j_n) = \prod_j (1 + Z a_j)^{a_i - \delta_{i1} - \cdots - \delta_{in}}, \quad (26)$$

$$c_j = \frac{v_j^i v_j^f}{u_j^i u_j^f}, \quad a_j = \left(\frac{v_j}{u_j} \right)^2; \quad (27)$$

$$C^{(k)}(0, j_1 \cdots, j_n) = \frac{d^k C(Z, j_1 \cdots, j_n)}{k! dZ^k} \Big|_{Z=0},$$

$$A^{(k)}(0) = \frac{d^k A(Z)}{k! dZ^k} \Big|_{Z=0}. \quad (28)$$

附录 II 中也给出了计算这些微商值的简便公式.

这里值得注意的一点是, 指标 i 和 f 的意义在粒子和空穴的情况下有所不同, 对于粒子-粒子跃迁(如中子数为 126 以上的核), i 是指粒子数较多的核, 即母核; f 是指粒子数较少的核, 即子核. 但对于空穴-空穴跃迁(如中子数 = 126 以下的核), $i(f)$ 是指空穴数较多(较少)的核, 即子(母)核.

令 $j_1 = j_2 = j_n, l_1 = l_2 = l_n, j_{1'} = j_{2'} = j_p, l_{1'} = l_{2'} = l_p, I_N = I_P = L_a = 0$, 以及 $J_{N_i} = J_{P_i} = J_{N_f} = J_{P_f} = 0$ (对偶-偶核) 或 $J_{N_i} = J_{N_f} = 0, J_{P_i} = J_{P_f} = j_0$ (对奇质子偶中子的核), 合并式 (11)、(15)、(18) 和 (20), 就得到

$$\begin{aligned} \gamma_{a0} &= \left(\frac{\hbar^2 R_0}{2M} \right)^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{b\beta}}{b+\beta} \right)^{9/2} \times \\ &\times \sum_{\substack{NN_1N_2 \\ \nu_n l_n \nu_p l_p}} (-)^{l_n + l_p} \langle N0, n_3 0 | N_1 0, N_2 0 \rangle \langle N_1 0, n_1 0 | \nu_n l_n, \nu_n l_n \rangle \langle N_2 0, n_2 0 | \nu_p l_p, \nu_p l_p \rangle \times \\ &\times F_N(l_n) F_Z(l_p) \phi_{N_S}(R_0). \end{aligned} \quad (29)$$

这里

$$\langle N0, n_0 | \nu l, \nu l \rangle = \langle N0, n_0 | \nu l, \nu l \rangle \left[\frac{\left(n + \frac{1}{2} \right)!}{n! \frac{1}{2}!} \right]^{1/2} \left(\frac{\beta - b}{\beta + b} \right)^n, \quad (30)$$

$\langle N0, n_0 | \nu l, \nu l \rangle$ 为 Talmi 系数 $\langle N0, n_0 : 0 | \nu l, \nu l : 0 \rangle$ 的缩写; 而因子 F 为

$$F_N(l_n) = \sum_{i_n=l_n \pm \frac{1}{2}} \frac{R_N(j_n)}{\sqrt{(2l_n + 1)}}, \quad (31a)$$

$$F_Z(l_p) = \sum_{i_p=l_p \pm \frac{1}{2}} \frac{R_Z(j_p)}{\sqrt{(2l_p + 1)}}. \quad (31b)$$

Talmi 系数 $\langle N0, n0 | N_1 0, N_2 0 \rangle$ 的计算比较麻烦, 利用下列递推公式¹⁾ 可以化简计算:

$$\begin{aligned} \langle N0, n0 | N_1 0, N_2 0 \rangle &= \frac{1}{2^{N+n}} \sqrt{\frac{n! N! (2N+1)!!}{(2n+1)!! N_1! N_2! (2N_1+1)!! (2N_2+1)!!}} I_n, \\ I_n &= F_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-)^{n-i}}{(n-i)!} \frac{[2(N+n-i)+1]!! (N+n-i)!}{(2N+1)!! N!} F_i, \\ F_i &= 2^i \sum_{k=0}^i \frac{1}{k!(n-k)!} \times \\ &\times \frac{N_1! N_2! (2N_1+1)!! (2N_2+1)!!}{(N_1-k)! [2(N_1-k)+1]!! (N_2-n+k)! [2(N_2-n+k)+1]!!}. \end{aligned} \quad (32)$$

附录 III 中列出了计算铅附近的 α 衰变约化宽度时常用的一些 Talmi 系数的数值. 式(29)适用于偶-偶核的基态-基态跃迁以及奇 A 核的有利跃迁. 对于不同的核模型波函数(单组态、BCS 及投影波函数), 只要从式(17a)–(17c) 或 (18a)–(18c) 中取适当的 $R(j)$ 来代入(29)就行.

三、计算结果

1. λ, Δ 值

我们取两套 G 值: 1) $G_N = 23/A, G_Z = 25/A$; 2) $G_N = 30/A, G_Z = 33/A$; 采用了 7 条单中子能级, 5 条单中子空穴能级, 3 条单质子能级. 所得的化学势 λ 和能隙 Δ

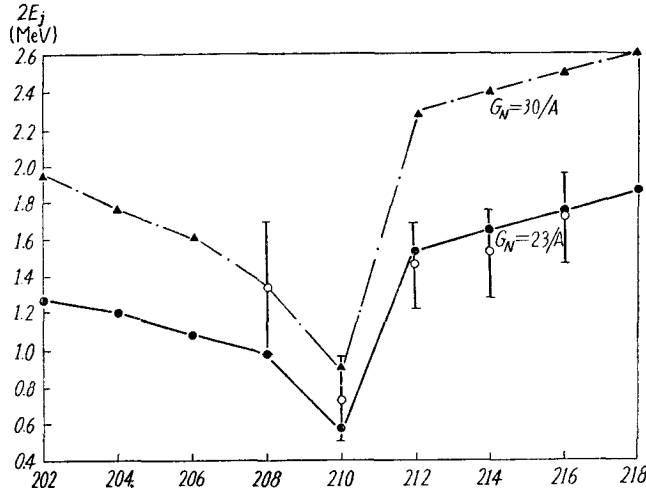


图 1 偶-偶核最低准粒子能量的两倍和实验上对偶能的比较
—○— 为实验值^[15].

1) 文献 [7] 的 § 3 中给出的递推公式有误, 按该公式计算 Talmi 系数, 会得出此系数大于 1 的错误结果.

值见附录 IV, 偶-偶核最低准粒子能量的两倍和实验上的对偶能 ($P_N(Z, N) = E(Z, N) + E(Z, N - 2) - 2E(Z, N - 1)$) 的比较见图 1. 从图 1 可以看到, 第一组 G 值与实验符合较好, 因此我们主要用第一组参数计算.

2. 参数 β , b 和 R_0 的选取及 γ_a^2 的计算结果

在计算绝对值时, 要额外引入三个参数 β , b 和 R_0 . 参数 β 可由 α 粒子的均方半径定出. 由于 γ_a^2 对 β 的依赖不太敏感, 因此我们就取 Harada^[7] 所给的值 $\beta = 0.44f^{-2}$. 至于参数 b 和 R_0 的选取, 则任意性较大.

我们一共取了六组参数:

- (i) $b = 0.11, R_0 = 10, \xi = bR_0^2 = 11;$
- (ii) $b = 0.106, R_0 = 10, \xi = 10.6;$
- (iii) $b = 0.13, R_0 = 9.03, \xi = 10.6;$
- (iv) $b = A^{-2/5} (\sim 0.12), R_0 = 1.57A^{1/3} (\sim 9)^2;$

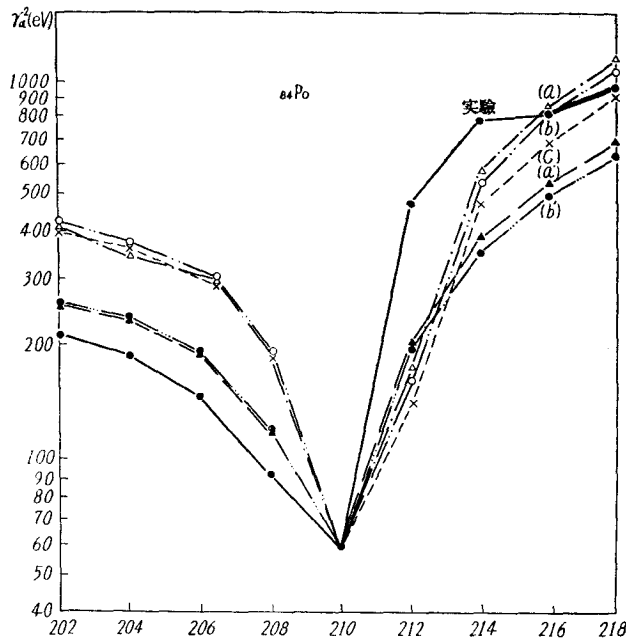


图 2.1 Po 同位素的 α 约化宽度的绝对值计算. 实验值取自文献 [20]⁸⁾; 理论值归一化到 Po^{210} 的实验值. $G_N = 23/A, G_Z = 25/A$.

- 实验值;
- (a) —△— $b = 0.11, R_0 = 10, \gamma_{\text{BCS}}^2(Po^{210}) = 0.76\text{eV};$
- (a') —▲— $b' = 0.11, R_0 = 10, \gamma_{\text{投影}}^2(Po^{210}) = 2.06\text{eV};$
- (b) —○— $b = 0.106, R_0 = 10, \gamma_{\text{BCS}}^2(Po^{210}) = 1.22\text{eV};$
- (b') —●— $b = 0.106, R_0 = 10, \gamma_{\text{投影}}^2(Po^{210}) = 3.27\text{eV};$
- (c) —×— $b = 0.13, R_0 = 9.03, \gamma_{\text{BCS}}^2(Po^{210}) = 2.00\text{eV}.$

1) 以后 R_0 全以 $f = 10^{-13}$ 厘米为单位, b 和 β 以 f^{-2} 为单位.
 2) $R_0 = 1.57A^{1/3}$ 是根据 Wilkinson^[16] 对重核 α 衰变的分析而得到的.
 3) Po^{204} 的实验数据取自 Беляев 等^[21] 最新测定的结果.

- (v) $b = 1.445A^{-2/5} (\sim 0.17)$, $R_0 = 1.57A^{1/3}$;
- (vi) $b = 0.1715$, $R_0 = 7.71^{1)}$.

前三组参数和 Harada^[7]所取的相近,这里没有考虑 R_0 随 A 的变化;若取 R_0 随 $A^{1/3}$ 变化,则 b 应该随 $A^{-2/5}$ 变化^[14],这就是我们所取的第四组参数. 但是当我们计算了谐振子单粒子波函数 $\psi_{nl}(R_0)$ 以后,并将它与 Blomquist 和 Wahlborn^[17]用 Saxon 势阱计算的单粒子波函数(称它为真实波函数)比较,发现这四组参数中 b 值太小,因此在第五组参数里我们用了 Zeh^[14]的结果 $b = 1.445A^{-2/5}$. 结果表明,这组参数给出的相对趋势最好(见图 2.2 曲线),但绝对值最小,比实验值小 4 个数量级. 绝对值太小的原因不是因为谐振子波函数不对,可能是 R_0 取得太大了,为了增大绝对值,使之和实验值符合,必须把 R_0 取在 $8f$ 以内,这与 Соловьев^[9]和 Верш^[18]从超铀元素的 α 衰变及 Igo^[19]从 α 非弹性散射得到的结果 $R_0 = 1.17A^{1/3}$ 是一致的,这就是我们所取的第六组参数.

用以上六组参数,我们对 Po 作了计算,结果见图 2. 这些曲线都是以某一点作归一化的.

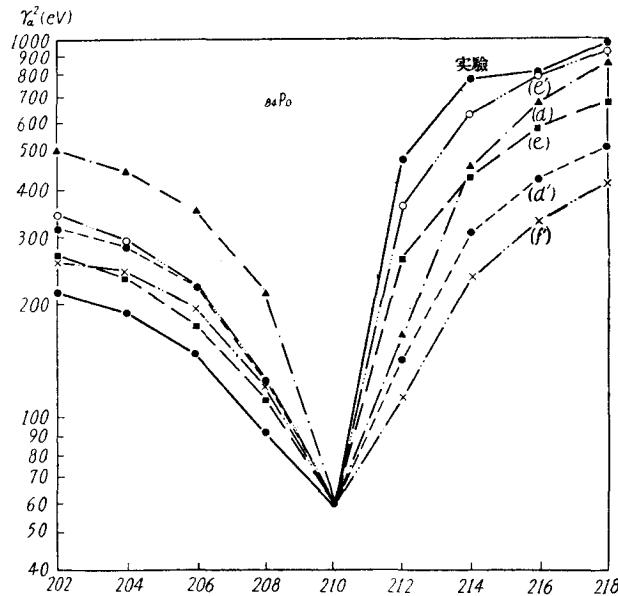


图 2.2

- 实验值
- (d) ·—▲— $b = A^{-2/5}$, $R_0 = 1.57A^{1/3}$, $\gamma_{B_{CS}}^2(Po^{210}) = 2.73eV$;
- (d') - - - ● - - - $b = A^{-2/5}$, $R_0 = 1.57A^{1/3}$, $\gamma_{投影}^2(Po^{210}) = 7.41eV$;
- (e) —■— $b = 1.445A^{-2/5}$, $R_0 = 1.57A^{1/3}$, $\gamma_{投影}^2(Po^{210}) = 0.00905eV$, $G_N = \frac{30}{A}$, $G_Z = \frac{33}{A}$;
- (e') ···○··· $b = 1.445A^{-2/5}$, $R_0 = 1.57A^{1/3}$, $\gamma_{投影}^2(Po^{210}) = 0.00441eV$;
- (f) - · · · × · · - $b = 0.1715$, $R_0 = 7.71$, $\gamma_{投影}^2(Po^{210}) = 15.4eV$.

为了便于比较,我们在图 3 也绘出了用单组态计算得的 α 约化宽度. 图 4 给出了 At 同位素的计算结果.

1) 为了计算简单,令 R_0 等于常数.

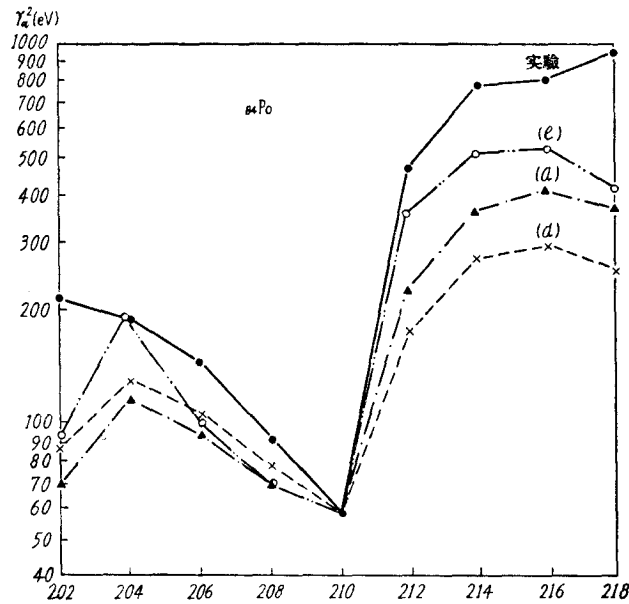


图 3 用单组态计算的 Po 同位素的 α 约化宽度. 理论值归一化到 Po^{210} 的实验值, 绝对值见表 2.

- 实验值;
- (a) —▲— $b = 0.11, R_0 = 10$;
- (d) —×— $b = A^{-2/5}, R_0 = 1.57A^{1/3}$;
- (e) —○— $b = 1.445A^{-2/5}, R_0 = 1.57A^{1/3}$.

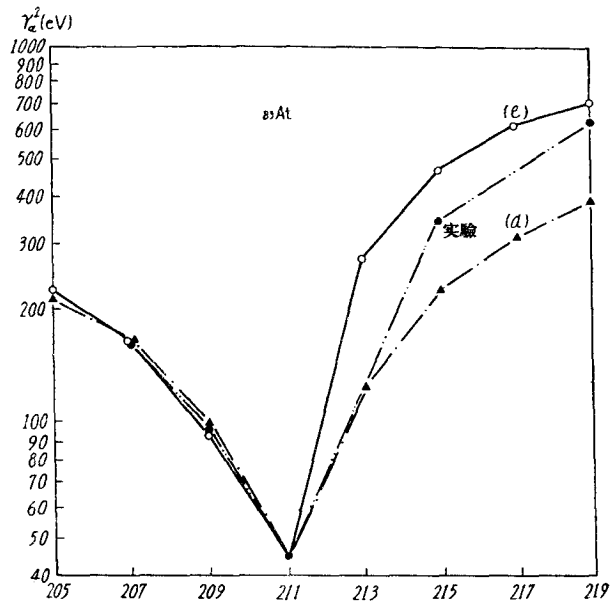


图 4 At 同位素的 α 约化宽度. 理论值归一化到 At^{211} 的实验值.

- $G_N = 23/A, G_Z = 25/A.$
- 实验值, 取自文献 [20], $\gamma_{\text{实验}}^2(\text{At}^{211}) = 47\text{eV}$;
 - (d) —▲— $b = A^{-2/5}, R_0 = 1.57A^{1/3}, \gamma_{\text{投影}}^2(\text{At}^{211}) = 6.33\text{eV}$;
 - (e) —○— $b = 1.445A^{-2/5}, R_0 = 1.57A^{1/3}, \gamma_{\text{投影}}^2(\text{At}^{211}) = 3.81 \times 10^{-8}\text{eV}.$

四、討 論

我们在文献[10]中对相对 α 约化宽度作了一个粗糙的估计, 认为

$$\gamma_{\alpha 0} \propto \sum_{i n l_p} R_N(j_n) R_Z(j_p). \quad (33)$$

从式(11)和(14)或者从式(29)和(31)可以看出, 这相当于假定

$$(-1)^{l_n+l_p} \frac{\Theta_{l_n l_p}(R_0)}{\sqrt{(2l_n+1)(2l_p+1)}} \quad (34)$$

和 v_n, l_n, v_p, l_p 无关, 并且都为同号. 其中

$$\Theta_{l_n l_p}(R_0) = \int \psi_{(j_n^2)_{L=0, S=0}}^*(12) \psi_{(j_p^2)_{L=0, S=0}}^*(1'2') \chi_{\alpha}(121'2') Y_{00} dq_{\alpha} d\Omega_{\alpha} |_{R=R_0}. \quad (35)$$

通过本文的计算, 发现 $\Theta_{l_n l_p}$ 随 l_n 和 l_p 的奇偶而变号, 因此量 $(-1)^{l_n+l_p} \Theta_{l_n l_p}$ 确实是全为同号的, 这表示对关联引起的组态混合十分有利于形成 α 粒子, 各组态的贡献都是起相增干涉的. 从物理意义上看, 这是显然的, 因为对关联的作用使二粒子偶合成 $L=0, S=0$ 的态, 相互靠得很近, 故有利于形成 α 粒子. 计算还发现 v_n, l_n (或 v_p, l_p) 愈大, $\Theta_{l_n l_p}(R_0)$ 也愈大, 因此式(18)等于常数的假设只是部分地正确. 这后一变化规律也是不难理解的, v 愈大, 单粒子波函数 $\psi_{v l}(r)$ 分布愈集中在外面, 故在 R_0 处的数值愈大, 因而形成 α 的几率也愈大. l 愈大, 偶合成 $L=0, S=0$ 的二粒子靠得愈近, 故也愈有利于形成 α 粒子.

下面我们分别对相对趋势和绝对值作一些讨论.

1. 相对趋势

(1) 投影波函数给出的相对趋势比 BCS 波函数的好. BCS 波函数低估了满壳外粒子数不多的核如 $\text{Po}^{210}, \text{Po}^{212}$ 的宽度, 这可以在图 2.1 中比较曲线 (a) (b) 和 (a'), (b') 而看出来. 又如取第 (V) 组参数时, 投影波函数给出的相对趋势与实验符合很好; 如果用 BCS 波函数, 则符合就很差. 比较图 2 和图 3, 还可看出考虑对关联后得到的相对趋势比单组态的好.

(2) 相对趋势对参数不太灵敏, 如曲线 (a) 的绝对值比曲线 (c) 小一倍半; 曲线 (e') 的绝对值比曲线 (d') 小 1600 多倍! 但在相对趋势上, 它们之间的差别不算太大. 如果我们更仔细地观察一下, 则还可以发现 Po^{210} 左边的曲线几乎和参数无关. 如果图 2 中 (a), (b'), (f') (R_0 为常数) 的左端曲线几乎完全一致, (d'), (e') ($R = 1.57 A^{1/3}$) 的左端也十分接近. 如果我们把 Po^{210} 右端的曲线重新归一化, 譬如归一化到 Po^{212} , 那么同样可以得到, $\text{Po}^{212}-\text{Po}^{218}$ 的相对趋势也几乎和参数无关. 因此整条曲线和参数有关系主要是由于比例 $\delta = \gamma_{\alpha}^2(\text{Po}^{212}) / \gamma_{\alpha}^2(\text{Po}^{210})$ 和参数有关; 换句话说, 比例 δ 决定整条曲线的相对趋势的好坏.

(3) $\xi = bR_0^2$ 增大时, 比例 δ 增大, 故曲线右端上升, 与实验符合变好. 例如曲线 (e') 比曲线 (a'), (b'), (d'), (f') 都要好, 曲线 (a') 比 (b') 略好. 其原因是, $E = 6\hbar\omega$ 的单粒子波函数比 $E = 5\hbar\omega$ 的分布更靠外(见文献[17]中的图), 故 R_0 取得较大. 如取 $9f$ 以上时, 前者在 R_0 处的值比后者大, 故比例也较大; 当 R_0 取得较小时, 两者在绝对值上都增加, 但后者增加得较快, 故 δ 减小了, 相对趋势变坏.

(4) ξ 固定, b 增大(同时减小 R_0), 这时 δ 减小, 相对趋势变坏. 例如曲线 (c) 比 (b) 差, (f') 比 (d') 差, 原因和 (3) 同.

(5) G 的第一组参数 ($G_N = 23/A$, $G_Z = 25/A$) 给出的相对趋势较好, 如图 2.2 中曲线 (e') 比 (e) 好, 这和由图 1 得出的结论是一致的.

(6) Po^{210} 和 At^{211} 的 α 约化宽度之间的比列在表 1. 从表 1 可以看到, 对奇 A 核考虑阻塞效应后, 可以使 $\gamma_a^2(\text{Po}^{210})/\gamma_a^2(\text{At}^{211})$ 的理论值与实验值一致, 并且这个比例和参数关系很小.

表 1 Po^{210} 和 At^{211} 的 α 约化宽度之比

参 数	理 论 值*			实 验 值
	(d)		(e)	
	非 阻 塞	阻 塞	阻 塞	
$\frac{\gamma_a^2(\text{Po}^{210})}{\gamma_a^2(\text{At}^{211})}$	1.06	1.17	1.16	1.23

* 理论值是用投影波函数计算的.

2. 绝对值

和相对趋势相反, 绝对值对参数十分敏感, 表 2 列出了在六组参数下 Po^{210} 和 Po^{212} 的绝对宽度, 从表 2 可以得到如下结论.

(1) 对关联使 α 约化宽度普遍增强(和单组态相比)一个多数量级, 当参数 ξ 增加时, 增强倍数也变大. 原因是 ξ 增大时, 能量高的组态(如 $E = 6, 7\hbar\omega$ 的)的贡献增加, 故组态混合的影响更大.

(2) 投影波函数给出的绝对值较好, 其值为 BCS 波函数的 2—3 倍. 这说明 BCS 波函数的粒子数不守恒的缺点对 α 衰变来说相当严重, 尤其是对满壳层外只有 2—4 个核子的核. 这和 β 和 γ 衰变的情况很不相同, 那里 BCS 波函数和投影波函数所给出的结果只相差 10%—25%^[23]. 这是由于 α 衰变是一个多体过程, 对波函数十分敏感, 而 β 和 γ 衰变本质上说是单体过程, 前者约和波函数的 8 次方成正比, 而后者只和波函数的平方成正比.

(3) 和壳模型组态混合的计算比较. Harada^[7] 用 True 和 Ford 等人^[24] 的组态混合波函数计算了 Po^{210} 和 Po^{212} 的 α 约化宽度, 他用的参数 $b = 0.11$, $R_0 = 10$ (即我们的参数 (a)), 得到 $\gamma_a^2(\text{Po}^{210}) = 1.98\text{eV}^2$, $\gamma_a^2(\text{Po}^{212}) = 4.3\text{eV}^2$. 我们用投影波函数计算的分别为 2.06eV 和 7.86eV. 前者和壳模型组态混合的计算一致, 后者比 Harada 值大, 这可能是因为他用的 Po^{212} 的波函数不够好. 此外, 我们用对关联计算的相对比 $\delta = \gamma_a^2(\text{Po}^{212})/\gamma_a^2(\text{Po}^{210})$ 也比较好.

(4) 绝对值对参数十分敏感, 尤其是对 ξ 最为敏感, 如参数 (i) 和 (ii) 相比, ξ 只改变了 3.8%, γ_a^2 就减小了 59%; 又如参数 (v) 和 (vi) 相比, ξ 改变了 45%, γ_a^2 竟小了三个数量级! 参数 (iv) 和 (v) 相比, 也有类似的情况. γ_a^2 随 ξ 增加而剧烈地减小是因为式

1) 文献[7]中表 II 所给出的 γ_a^2 值是错的, 他用的 $\hbar^2/MR_0^2 = 8.9 \times 10^7 \text{eV}$, 实际上应为 $5.29 \times 10^7 \text{eV}$, 故 γ_a^2 刚好差一个倍数.

表 2 不同参数下所计算的 Po^{210} 和 Po^{212} 的 α 绝对宽度 ($G_N = 23/A$, $G_Z = 25/A$; 所有的宽度都以 eV 为单位)

参 数	(i)		(ii)		(iii)		(iv)		(v)		(vi)	
	Po^{210}	Po^{212}	Po^{210}	Po^{212}	Po^{210}	Po^{212}	Po^{210}	Po^{212}	Po^{210}	Po^{212}	Po^{210}	Po^{212}
b	0.11		0.106		0.13		0.1187	0.1182	0.1715		0.1709	0.1715
R_0	10		10		9.03		9.27	9.30	9.27		9.30	7.71
$\xi = bR_0^2$	11		10.6		10.6		10.20	10.23	14.70		14.77	10.2
$\gamma_{单}^{2*}$	0.20	0.79			0.56		0.80	2.43	0.27×10^{-8}		1.68×10^{-2}	
γ_{BCS}^2	0.76	2.47	1.22	3.68	2.0	5.3	2.78	6.78				
$\gamma_{投影}^2$	2.06	7.86	3.27	11.60	5.5	18.1	7.41	21.10	4.4×10^{-8}		27.4×10^{-8}	30.0
$\gamma_{投影}^2 / \gamma_{单}^2$	10.1	10			9.9		9.2	8.7	16.3		16.1	
$\gamma_{投影}^2 / \gamma_{BCS}^2$	2.7	3.2	2.7	3.2	2.7		2.7	3.1				
$\gamma_{投影}^2 / \gamma_{实验}^2$	1/7.6	1/18.1	1/4.8	1/12.3	1/10.6		1/7.9	1/22.3	$10^{-4}/1.3$		$10^{-4}/1.7$	1/16
$\gamma_{实验}^2$	Harada ^[7] 值 Po^{210} : 15.7 Po^{212} : 143				Rasmussen ^[80] 值 Po^{210} : 58.2 Po^{212} : 471							

* $\gamma_{单}^2$ 代表单组态壳模型波函数所计算的 α 约化宽度。

† Harada 和 Rasmussen 给出的 $\gamma_{实验}^2$ 不同是由于他们计算穿透因子 P_L 时取的位阱及内半径 R_i 不同。Harada 取 $R_i = 10f$, Rasmussen 取 R_i 为内转折点 (对 Po^{210} 为 $9.20f$, 对 Po^{212} 为 $9.35f$)。当 R_0 小于内转折点时, 我们令 P_L 仍取内转折点时的值, 这一近似性在文献[22]中有过讨论。

(16) $\psi_{Ns}(R_0)$ 中包含有 $e^{-2\xi}$ 因子.

(5) ξ 固定, 增大 b (同时减小 R_0) 时, 绝对值增加, 不过这时它的变化没有象对 ξ 那样敏感. 如果把参数 (vi) 和 (iv) 相比, b 增加 44.5% (R_0 同时减小 20%), γ_a^2 增加约 1 倍; 参数 (iii) 和 (ii) 相比, 也有类似的情形.

在(2)中我们提到 γ_a^2 绝对值对波函数十分敏感, 考虑到谐振子波函数的近似性, 我们对第(v)组参数作了如下的校正: 令 $F'(l) = F(l)\psi_{Nl}^{\text{Blom}}(R_0)/\psi_{Nl}^{\text{Blom}}(R_0)$, ψ_{Nl}^{Blom} 为 Blomquist 等^[17] 所计算的, ψ_{Nl}^{Blom} 为谐振子波函数, 用 $F'(l)$ 代替式(16)中的 $F(l)$, 结果得到: $\gamma^2(\text{Po}^{210}) = 0.45 \times 10^{-2} \text{ eV}$, $\gamma^2(\text{Po}^{212}) = 2.87 \times 10^{-2} \text{ eV}$; 未校正前分别为 0.44×10^{-2} 和 $2.74 \times 10^{-2} \text{ eV}$, 因此差别很小. 对参数 (vi) 也类似, 差别不大; 但对前四组参数 (i—iv) 不然, 因为这几组参数中 b 值选得太小, 和真实波函数相差较远.

将绝对值和相对趋势比较可以发现, 绝对值对参数 b, R_0 的关系正好和相对趋势对它们的关系相矛盾, 要想使相对趋势与实验符合得好, 必须 ξ 大, b 小, R_0 大; 而绝对值的符合则要求 ξ 小 b 大, R_0 小. 如参数 (v) 给出的相对值最好, 但绝对值最差, 比实验小四个数量级, 参数 (vi) 给出的绝对值和实验值差不多大.

由此看来, 要想使理论上的绝对值和实验值差不多大, R_0 必须取到 $8f$ 以内, 这样相对趋势稍差, 不过这可能是因为我们忽略了 n - p 关联的缘故. 考虑 n - p 关联可以使 γ_a^2 进一步加大, 但 Po^{212} 以上的是粒子-粒子关联, 而 Po^{210} 以下的是粒子-(中子)空穴的关联, 直观上看应该前者较大; 分析核质量的结果^[15] 也得到 Po^{212} 以上的 n - p 关联能的确是比 Po^{210} 以下的大. 因此考虑 n - p 关联, 一方面可以使绝对值增大, 另一方面还可能使相对趋势变好.

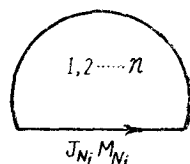
从以上的分析, 我们可以作一简短的结论:

- (1) 对关联能使 γ_a^2 增加一个数量级左右.
- (2) 考虑投影波函数可以使约化宽度的绝对值和相对趋势都变好.
- (3) 对关联基本上能说明 Pb 附近原子核表面的结团现象, 看来不需要引入一种额外的结团机构.

本文一部分计算是由朱福英和高钧成同志完成的; 工作中同陈廷扬和王凡同志进行过有益的讨论, 在此一并致谢.

附录 I 双粒子 f. p. 系数的二次量子化表示

证明式(8)的一个简便方法是利用 French^[26] 的图形法, 例如 n 个中子的全反对称化波函数 $|J_{N_i} M_{N_i}\rangle$ 用图形表示为



$$(A1)$$

这里圆弧代表反对称化; 而局部反对称的态 $|(J_{N_f}, I_N) J_{N_i} M_{N_i}\rangle$ 表示为

$$(A2)$$

于是我们要证明的式(8)即为

$$(A3)$$

利用所谓保序置换 (order preserving permutation) 算符, 可以将式 (A3) 最右端的全反对称态展成为局部反对称的态:

$$(A4)$$

保序置换 $P_{2+(n-2)}$ 是这样一种置换, 它将其右方图形中的两羣粒子 [(1,2) 和 (3, 4...n)] 进行交换, 在同一羣内的置换不算, 且每次置换后, 在每一羣内的粒子编号都要按上升次序排列, $\binom{n}{2}^{-1/2}$ 是归一化系数.

将式 (A4) 代入式 (A3) 右方, 右方变为

$$(A5)$$

将上式积分时, 因为左半边是 n 个中子全反对称化的态, 并且积分的值又不依赖于粒子的编号, 因此上式右半边的求和号中, 每一项的贡献全相等, 一共有 $\binom{n}{2}$ 项, 所以式 (A5) 等于

$$(A6)$$

此式就等于 (A3) 式的左端, 因此式 (A3) 或 (8) 成立.

附录 II 投影波函数矩阵元的计算

Bayman^[27] 给出了从 BCS 波函数中抽出具有固定粒子数的方法, 例如对偶数粒子系统, 基态的母函数为

$$\Psi(Z) = \prod_{jm>0} (u_j^i + \sqrt{Z} v_j^i a_{jm}^+ a_{j-m}^+) |0\rangle, \quad (\text{A7})$$

若初态有 p 对粒子, 则其投影波函数为式 (A7) 中 $Z^{\frac{p}{2}}$ 前的系数. 同样从 BCS 波函数的矩陣元可以求得投影波函数的矩陣元

$$R_{\text{投影}}(j) = \left\langle \Psi_{\text{投影}}^i(2p) \left| \sum_{m>0} a_{jm}^+ a_{j-m}^+ \right| \Psi_{\text{投影}}^f(2p-2) \right\rangle, \quad (\text{A8})$$

它等于矩陣元

$$\left\langle \Psi^i(Z) \left| \sum_{m>0} a_{jm}^+ a_{j-m}^+ \right| \Psi^f(Z) \right\rangle \quad (\text{A9})$$

中 $Z^{p-\frac{1}{2}}$ 前的系数

$$\Omega_j u_j^i v_j^i \left[\frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dZ^{p-1}} \prod_{j'} (u_{j'}^i u_{j'}^f + Z v_{j'}^i v_{j'}^f)^{\Omega_{j'} - \delta_{j'j}} \right]_{Z=0}$$

除以初态和末态的归一化系数

$$\left\{ \left[\frac{1}{p!} \frac{d^p}{dZ^p} \prod_j (u_j^{(i)^2} + Z v_j^{(i)^2})^{\Omega_j} \right]_{Z=0} \left[\frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dZ^{p-1}} \prod_j (u_j^{(f)^2} + Z v_j^{(f)^2})^{\Omega_j} \right]_{Z=0} \right\}^{1/2},$$

即为

$$R_{\text{投影}}(j) = \Omega_j \frac{v_j^i}{u_j^i} \frac{C^{(p-1)}(0, j)}{A_i^{(p)}(0) A_j^{(p-1)}(0)}. \quad (\text{A10})$$

奇数粒子系统的情形与此类似.

这里出现的一些微商的值可以用下法简单地求得.

令函数

$$f(Z) = \prod_i (1 + Z a_i)^{n_i} \quad (\text{A11})$$

及

$$g(Z) = \ln f(Z), \quad (\text{A12})$$

求出在 $Z=0$ 时 $g(Z)$ 的逐次微商值

$$\left. \frac{d^k g(Z)}{dZ^k} \right|_{Z=0} = (-)^{k-1} D_k, \quad D_k = (k-1)! \sum_i n_i a_i^k, \quad (\text{A13})$$

就可得到在 $Z=0$ 时 $f(Z)$ 的各次微商值:

$$f'(0) = D_1,$$

$$f''(0) = D_1^2 - D_2,$$

$$f'''(0) = D_1^3 - 3D_1 D_2 + D_3,$$

$$f^{(4)}(0) = D_1^4 - 6D_1^2 D_2 + 4D_1 D_3 + 3D_2^2 - D_4,$$

$$f^{(5)}(0) = D_1^5 - 10D_1^3 D_2 + 10D_1^2 D_3 + 15D_1 D_2^2 - 5D_1 D_4 - 10D_2 D_3 + D_5.$$

这里给出的计算投影波函数矩陣元的方法之优点, 在于免除了 Miranda 和 Preston^[23] 方法中考虑排列组合的困难.

附录 III 一些 Talmi 变换系数的数值表

表 1 Talmi 变换系数 $\langle N_1 0, n_1 0 | \nu l, \nu l \rangle$ 数值表

N_1, n_1	νl	$3s$	$2p$	$2d$	$1f$	$1g$	$0h$	$0i$	$0j$
7									
6		0.2447		0.3646		0.1799		0.03290	0.01707
5	$\tilde{N} - 1 + \tilde{N}$	0.09594	0.4071	-0.1431	0.2765	-0.3955	0.06300	-0.1677	-0.1007
4	$\tilde{N} - 1 + \tilde{N}$	0.1759	0.03169	-0.03049	-0.4088	0.2073	-0.2698	0.3934	-0.4564
3	$\tilde{N} - 1 + \tilde{N}$	0.09464	0.1270	-0.2476	0.04083	0.04285	0.5117	-0.5151	0.4564
2	$\tilde{N} - 1 + \tilde{N}$	0.1759	-0.1270	-0.03049	-0.04083	0.2073	-0.5117	0.3934	-0.2820
1		0.09594	-0.03169	-0.1431	0.4088	-0.3955	0.2698	-0.1677	0.1007
0		0.2447	-0.4071	0.3646	-0.2765	0.1799	-0.06300	0.0329	-0.01707

表 2 Talmi 变换系数 $\langle N_0, n_0 | N_1 0, N_2 0 \rangle$ 数值表

N_1, N_2	$7,6$	$7,5$	$7,4$	$7,3$	$7,2$	$7,1$	$6,6$	$6,5$	$6,4$	$6,3$	$6,2$	$5,5$	$5,4$	$5,3$
13	0.1411													
12	0.06523	0.1331					0.1545							
11	0.09055	0.08873	0.1140				0.06180	0.1575						
10	0.06531	0.07584	0.1200	0.08598			0.1044	0.07427	0.1468					
9	0.06718	0.09038	0.06445	0.1439	0.05437		0.05936	0.1010	0.1053	0.1216			0.1790	
8	0.06663	0.06172	0.1050	0.08000	0.1417	0.02629	0.09288	0.08824	0.07989	0.05481	0.08520	0.1196	0.08695	0.1642

附录 IV 化学势 λ 和能隙 Δ 的数值表表 3 $N > 126^*$, $G_N = 23/A$; 单中子能级取自 *Nuclear Data Sheets*, 5, No. 3 (1963).

n	2	4	6	8
$\lambda(\text{MeV})$	-0.588	-0.437	-0.286	-0.136
$\Delta(\text{MeV})$	0.503	0.691	0.821	0.921

* $N < 126$ 的 λ , Δ 值取 Kisslinger 和 Sorenson^[26] 的值.表 4 $Z > 83$, $G_Z = 0.118$, 单质子能级取自 *Nuclear Data Sheets*, 5, No. 3 (1963).

n	2	3	
		阻 塞	非 阻 塞
$\lambda(\text{MeV})$	-0.321	-0.465	-0.246
$\Delta(\text{MeV})$	0.366	0.469	0.438

参 考 文 献

- [1] Wilkinson, D. H., Proceedings of the Rutherford Jubilee International Conference (Heywood Co. Ltd., London, 1961), p. 339; Proceedings of the Kingston Conference on Nuclear Structure (1960), p. 20.
- [2] Phillips, G. C. and Tombrello, T. A., *Nuclear Phys.*, **19** (1960), 555.
- [3] Wildermuth, K. and Kaunellepoulos, K., *Nuclear Phys.*, **7** (1958), 150; **9** (1959), 449.
- [4] 王 凡、陈金全、施士元, 物理学报, **21** (1965), 140.
- [5] Smirnov, Yu. F. and Chlebovska, D., *Nuclear Phys.*, **26** (1961), 306.
- [6] Mang, H. J., *Phys. Rev.*, **119** (1960), 1069; *Z. Phys.*, **148** (1957), 582.
- [7] Harada, K., *Prog. Theoret. Phys.*, **26** (1961), 667.
- [8] Zeh, H. D. and Mang, H. J., *Nuclear Phys.*, **29** (1962), 529.
- [9] Соловьёв, В. Г., *ДАН СССР*, **144** (1962), 1281.
- [10] 辛 羣, 南京大学学报 **9** (1965), 64.
- [11] Thomas, R. G., *Prog. Theor. Phys.*, **12** (1954), 253.
- [12] Talmi, H., *Helv. Phys. Acta.*, **25** (1952), 185.
- [13] Smirnov, Yu. F. and Chlebovska, D., *Nuclear Phys.*, **27** (1961), 177.
- [14] Zeh, H. D., *Z. Phys.*, **175** (1963), 490.
- [15] König, L. A., Mattauch, J. H. E. and Wapstra, *Nuclear Phys.*, **31** (1962), 18.
- [16] Wilkinson, D. H., *Phys. Rev.*, **126** (1962), 648.
- [17] Blomquist, J. and Wahlborn, S., *Arkiv. Fysik*, **16** (1964), 46.
- [18] Береш, Т., *Изв. АН СССР*, **27** (1963), 891.
- [19] Igo, G., *Phys. Rev.*, **115** (1959), 1665.
- [20] Rasmussen, J. O., *Phys. Rev.*, **113** (1959), 1593; *ibid.*, **115** (1959), 1675.
- [21] Беляев, Б. Н., Калямин, А. В. и Мурич, А. Н., *ЖЭТФ*, **44** (1963), 10.
- [22] Rasmussen, J. O., *Nuclear Phys.*, **44** (1963), 93.
- [23] Miranda, A. F. De. and Preston, M. A., *Nuclear Phys.*, **44** (1963), 529.

- [24] True, W. and Ford, K., *Phys. Rev.*, **109** (1958), 1675.
Newby, N. and Konopinsky, J., *Phys. Rev.*, **115** (1959), 434.
[25] Kisslinger, L. S. and Sorenson, R. A. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **32**, No. 9 (1960).
[26] Macfarlane, M. H. and French, J. B., *Rev. Mod. Phys.*, **32** (1960), 567.
[27] Bayman, B. F., *Nuclear Phys.*, **15** (1960), 33.
[28] Eichler, J. and Mang, H. J., *Z. Physik*, **183** (1965), 321.

校后记 本工作完成后, 我们发现式(3, 5—7, 11, 29)中都少了一个因子 $\sqrt{8}$, 这是最近由 Eichler 等^[28]指出的。以前这方面的工作[6—8, 14]都有同样的错误, 原因是在对四个核子的坐标 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$ 积分变换到对相对坐标 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{R}$ [见式(4)]积分时, 把雅可比行列式 $\left(\frac{\alpha \mathbf{r}_i}{\alpha \mathbf{q}_k}\right)$ 当作为 1 了, 而实际上应等于 8。因此本文中所有关于约化宽度相对值的讨论仍然有效, 而所有 γ_a^2 的绝对值则应增大一个因子 8, 这样为了使 Po^{210} 理论上的 γ_a^2 的绝对值能和实验值一致, R_0 只要取为 7.94f 就够了(当 b 取为 $0.1715f^{-2}$ 时), 这时给出的相对趋势要比图 2.2 中曲线 (f') 为好, 大致上和 (d') 差不多。

THE EFFECT OF PAIR CORRELATION ON α DECAY IN THE NEIGHBOURHOOD OF Pb^{208} ——AN ABSOLUTE CALCULATION OF REDUCED WIDTH

KAO MEI-JUAN, CHEN JIN-QUAN, SZE SHIH-YUAN

(Nanking University)

ABSTRACT

By means of the BCS wave functions and projected wave functions the absolute values of α reduced width of even-even isotopes of ${}_{84}Po$ and odd-even isotopes of ${}_{85}At$ are calculated. The change of absolute values and the behaviour of the relative values due to the change of the parameters b, R_0 , and G have been investigated, where b is the parameter of harmonic oscillator well, R_0 the channel radius, and G the parameter of pair correlation. The analysis of the results of calculation shows that:

(1) Pair correlation favours the formation of α particle; it may increase the reduced width by an order of magnitude, and it may induce the relative behaviour to be more compatible with experiment.

(2) The nonconservation of particle number of BCS wave function is a serious defect for those nuclei for which the number of particles outside the closed shell is few. The projected wave function, for which the number of particles is conserved, may increase the absolute values by 1—2 times, and may improve the relative behaviour.

(3) On taking account of the blocking effect, the reduced width may decrease by 10%, this has the result that the hindered factors of odd A nuclei may agree with the experimental values.

(4) The absolute values are very sensitive to the selection of parameters, but the relative behaviour is not very sensitive. In order that the absolute values may approach the experimental values, R_0 should be within 8f.