

柱状导体衍射级数*

程 路

(南开大学)

提 要

本文对于任意形状的光滑柱状理想导体的衍射提出一种级数解法。方法的原理与层变媒质的 Bremmer 级数^[8]相似：先以内接多面棱柱代替上述光滑柱体；将此棱柱产生的衍射场展为一个级数。级数之首项为几何光学场；级数之第二项为棱柱的所有各棱产生的元衍射场之和，其中每个元衍射场皆取 Sommerfeld 问题的解，即将该棱之两侧面视为半无限大的平面。上述每一元衍射场皆投射在其相邻棱上，并在相邻棱上发生衍射；这一衍射场随之又投射在下一个相邻棱上而发生衍射；依此类推。按此方式依次被各棱所衍射的场称为“主掠射元场”。级数之第三项即为这些主掠射元场之和。被某一棱 A 衍射而后又在相邻的棱 B 上衍射的某一元场，同样会回射到 A 上；然后以上述“主掠射”方式传递下去，这样的场称为“一次反射元场”。级数的第四项即为这些一次反射元场之和。依此类推。一般说来，级数之第 m 项 ($m > 3$) 为 $m - 3$ 次反射元场之和。元场在任何一棱上的衍射皆取 Sommerfeld 解。当内接多面棱柱之面数趋向无穷，且每面之宽度趋向零时，多面棱柱即趋于光滑柱体，且级数每一项的求和变为一个积分。这时该级数总和之极限即为原问题之解。

对级数之前三项单独进行了推导。对于一般的第 m 项 ($m > 3$)，导出了一个递推公式。最后，对该级数之收敛条件进行了探讨。

一、引 言

关于柱状导体衍射问题，除了导体圆柱等少数情况可作严格数学处理^[1]外（但也是相当复杂的），对于一般形状则用近似解法。由于柱体棱角部分的衍射作用，可用 Уфимцев^[2] 的边界波方法处理，所以本文只讨论不带棱的光滑柱体，且限制柱体为凸状。在凸状光滑物体衍射的近似解法中，Keller^[3] 的几何衍射理论和 Фок^[4] 的当地场 (local field) 法比较重要¹⁾。但是，几何衍射理论的近似程度是有限的，一般相当于 W.K.B. 近似（参看文献[5]）。再者，对于光滑物体而言，此法只考虑了掠射在物体上的光线所发生的衍射效果，对于直射在物体表面上的光线，则除了取其按几何光学规律反射的光线^[6]之外，未作进一步考虑。这显然是不严格的，因为当表面为非平面时，即使对于非掠射光线，亦应考虑其衍射作用。Фок^[4] 方法是专门处理物体表面几何明暗交界处附近的衍射场的。对于表面上的几何亮区，Фок^[7] 也是仅取其几何反射场。由此可见，Keller 方法和 Фок 方法均有其局限性。

本文提出一种级数解法，并且对于此级数之一般项，导出了一个递推公式。此方法之

* 1964 年 6 月 1 日收到；1964 年 9 月 25 日收到修改稿。

1) 此二方法本身并不限于解决柱体衍射。

原理同 Bremmer^[8] 对于层变媒质所导出的级数相类似。

此法可视为不变镶嵌原理 (the principle of invariant imbedding)^[9] 的又一具体应用——用在二维情况;即将整个柱体的衍射,解析为柱体表面各处当地作用之总效果。因此,可以认为,此方法较本质地揭示了衍射行为的基元根源。它不但考虑了掠射光线的衍射作用,而且也考虑了直射在柱面几何亮区上的光线的衍射作用。另外,随着所取级数项数之增加,此法的近似程度可以任意提高,这是比 Keller 方法优越之处。

二、问题的描述及预备公式

设有一无限长柱状光滑凸导体,其母线平行于 z 轴,图 1 为在 $z = 0$ 平面上之截面。 Q 为一个平行于 z 轴的无限长直线光源,它发出柱面电磁波。为确定起见,设此柱面波之磁矢量平行于 z 轴¹⁾。 P 为欲求衍射场强之处。整个问题是二维的,故可在 $z = 0$ 的截面上求解。

因为本文是从直棱衍射公式出发的,所以在此先写出直棱衍射公式^[2,10](将入射场和几何反射场除外):

$$H_z = H_{0z}[\nu(r, \varphi - \varphi_0) + \nu(r, \varphi + \varphi_0)], \quad (2.1)$$

若令 $\psi = \varphi \pm \varphi_0$, 则上式中之函数 ν 为

$$\nu(r, \psi) = \frac{2}{n} \frac{\sin \frac{\pi}{n} \left| \cos \frac{\psi}{n} \right|}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} e^{-i k r \cos \psi} \cdot \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{2 k r} \left| \cos \frac{\psi}{2} \right|}^{\infty} e^{i q^2} dq, \quad (2.2)$$

式中各符号如图 2 所示。

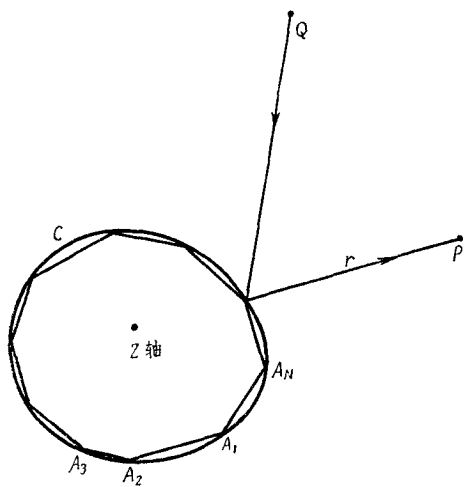


图 1

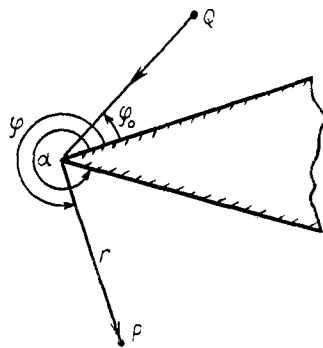


图 2

由 Pauli^[11] 展开式可知,当参数 $w \gg 1$ 时,

$$S_0(w) \approx -i w^{-1/2},$$

1) 对于电矢量平行于 z 轴的情况,亦可作类似处理。

在 A_k 上的“反射”), 就形成稜 A_k 的一支一次反射元场. 同理, 由 A_{k+1} 射在 A_k 上的主掠射场, 亦产生一个回射在 A_{k+1} 上并继续往 A_{k+2} 方面传递下去的、 A_k 的另一支一次反射元场.

4. 二次及高次反射元场

将上面所述过程加以推广. 对于稜 A_k 而言, 所有自 A_{k-1} (A_{k+1}) 方面传来的一次反射元场之和为一次反射场; 它在 A_k 上再发生一次反射即为 A_k 的二次反射元场. 依此类推, 所有自 A_{k-1} (A_{k+1}) 方面传来的第 m 次反射元场合成第 m 次反射场, 它在稜 A_k 上再发生一次反射就形成 A_k 的第 $m+1$ 次反射元场.

然后来叙述级数原理.

1. 观测点 P 处的总场, 除了按照几何光学规律所得的原入射场和柱面反射场之外, 还有一个总衍射场. 它等于下列各衍射场之和 (设 P 点按几何光学规律所直射到的诸稜为 $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+p}$, 其中又能被 Q 点按几何光学规律直射到的各稜为 $A_{n+1}, \dots, A_{n+q}$):

(i) 入射场在 $A_{n+1}, \dots, A_{n+q}$ (图 3) 上各产生一个一级衍射元场, 将这些元场求和 (称为 P 点的一级衍射场);

(ii) 对于某稜, 自其两侧各射来一个主掠射场, 它们在该稜上发生衍射, 将射在 $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+p}$ 上的这些衍射场, 在 P 点求和 (称为 P 点的二级衍射场);

(iii) 一般地, 对于某稜, 自其两侧各射来一个第 m ($m=1, 2, \dots$) 次反射场, 它们在该稜上发生衍射, 将稜 $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+p}$ 上的这些衍射场在 P 点求和 (此和称为 P 点的第 $m+2$ 级衍射场).

2. 令多边形 $A_1, \dots, A_N$ 之边数趋于无穷, 各边之长趋于零, 且整个多边形趋于一条光滑曲线 C (图 1), 则依上述方法求出的 P 点的场值所趋的极限, 即为以曲线 C 为截面的柱体衍射的严格解.

以下证明, 当满足级数收敛条件 (6.8) 式时, 上述原理正确.

柱体衍射问题之解的充分条件是总场 (即入射场、几何反射场与衍射场之和) 满足下列条件:

- (i) 满足麦克斯韦方程;
- (ii) 在柱面上满足理想导体边界条件, 在我们的条件下即 $\mathbf{H}$ 之切向分量 $H_{||}$ 为零;
- (iii) 总场值在空间连续;
- (iv) 满足无限远处条件, 即当离柱体的距离 $R \rightarrow \infty$ 时, 衍射场趋于零, 因而总场趋向原入射场及几何反射场之和;

(v) 在稜附近场值有限, 且当到某一稜之距离 $r \rightarrow 0$ 时, (2.2) 式之 v 满足 $r \frac{dv}{dr} \rightarrow 0$.

我们分条加以证明:

1. 因为柱体各稜产生的每一个基元衍射场, 都是由 Sommerfeld^[10] 公式 (它是严格解) 求得的, 因而都满足麦氏方程; 另一方面, 入射场及柱体各面的几何反射场, 亦皆满足麦氏方程, 且麦氏方程是线性的, 所以总场满足麦氏方程;

2. 为了证明边界条件满足, 我们对入射、反射场与衍射场分别讨论. 对于 Q 能直射到的某一柱面 (例如如图 4 的 BC), 入射在其上的场与相应的几何反射场, 合起来在该面上满

足边界条件,即 $H_{||} = 0$. 这两部分场只占据着图 4 阴影线的空间区域,因而在柱体其他各面上场值为零;即这部分入射场与几何反射场,在全部柱面上满足边界条件 $H_{||} = 0$.

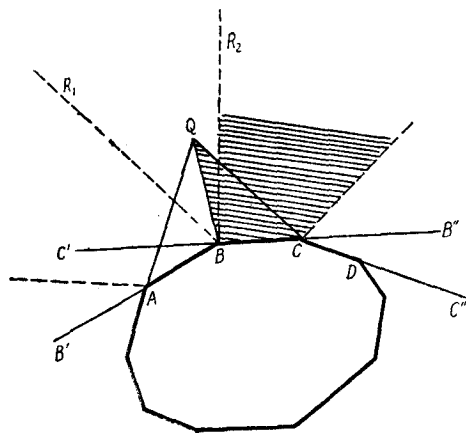


图 4

对 Q 所能直射到的所有各面,进行同样的讨论,便可得出结论:入射场与全部几何反射场之和,在所有柱面上满足边界条件 $H_{||}^{(1)} = 0$. 另一方面,对于 Q 所能直射到的某稜 B ,由 Sommerfeld 公式得出的入射场在其上所产生的衍射场,在无限大半平面 BB' 和 BB'' 上满足边界条件;在二面角 $B'BB''$ 内部场值为零. 因而,可以说,这个一级衍射元场,在所有柱面上皆满足边界条件 $H_{||}^{(2)} = 0$. 同理,掠射场或某次反射场在某稜上发生的衍射场,也满足边界条件 $H_{||}^{(3)} = 0$.

综上所述,可以得出结论,总场是满足边界条件的:

$$H_{||} = H_{||}^{(1)} + H_{||}^{(2)} + H_{||}^{(3)} = 0.$$

3. 连续性之证明. 我们从 Q 所能直射到的稜 B 开始. 由 Sommerfeld 解的性质可知,在与 B 有关的两条反射线 BR_1 和 BR_2 上(若只有一侧面被 Q 直射到,则在一条反射线上),衍射场恰好抵消入射、反射场所形成的不连续,只是现在由于面 BA 和 BC 非为半无限大之故, B 之衍射场在 BA 之延长线 AB' 及 BC 之延长线 CB'' 上不连续. 由此可知,就入射场、几何反射场和一级衍射场而论,它们之和在柱外空间到处连续,只是在各边之延长线上除外. 但是,在某条延长线(例如 CB'')上之不连续,正是由于让 B 处发射的一级衍射元场,以几何光学规律射过 C 处,而未曾考虑稜 C 衍射之结果;同理,令此场在稜 C 上发生衍射,则此更高一级的衍射场恰能补偿 CB'' 上之不连续,但它在 DC'' 与 BC' 上又不连续. 依此类推下去,发生不连续的衍射场之级次就越来越高. 在(6.8)式满足的条件下,不连续部分之值趋向零.

由此,综上所述得出结论:总场在柱外全部空间是连续的.

4. 对于每一个基元衍射场,表达式(2.2)表明(参看文献[11]),当 $r \rightarrow \infty$ 时, $v \rightarrow 0$; 当 $r \rightarrow 0$ 时, $r \frac{dv}{dr} \rightarrow 0$. 由此很易证明,当(6.8)式满足因而级数收敛时,级数之和即总衍射场 V 满足:当 $R \rightarrow \infty$ 时 $V \rightarrow 0$; 当 $r \rightarrow 0$ 时, $r \frac{dV}{dr} \rightarrow 0$.

于是证讫.

四、几何反射场和一级衍射场

几何反射场很易用 $\Phi_{OK}^{[7]}$ 的公式得出:

$$\mathbf{H}_g = \mathbf{H}_i \sqrt{\frac{D(0)}{D(r)}} e^{ik(\phi_0+r)}, \quad (4.1)$$

其中 ϕ_0 为入射场在反射点的位相; r 为反射点到 P 点的距离; $D(0)$ 表示发自 Q 的某一

几何元光束射在曲面上时的截面; $D(r)$ 表示此光束反射后射在 P 点时的截面; $\mathbf{H}_i$ 表示按菲涅耳公式算出的反射矢振幅. 对于理想导体

$$\mathbf{H}_i e^{ik\phi_0} = -\mathbf{H}_0,$$

其中 $\mathbf{H}_0$ 为入射场在入射点之值; 而 $D(r)$ 的表达式为^[7]

$$D(r) = \cos\theta + 2r \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\rho} \right] + \frac{2r^2}{R_1 R_2} \cos\theta, \quad (4.2)$$

式中 θ 为入射角; ρ 为入射平面与物体表面之截线在反射点处之曲率半径; R_1, R_2 分别为表面在反射点处之二主曲率半径. 对于柱面, $R_1 = \rho, R_2 = \infty$, 因而(4.2)式化为

$$D(r) = \cos\theta + \frac{2r}{\rho}. \quad (4.3)$$

代入(4.1)式, 得

$$\mathbf{H}_s = -\mathbf{H}_0 \sqrt{\frac{\cos\theta}{\cos\theta + \frac{2r}{\rho}}} e^{ikr}. \quad (4.4)$$

以下求一级衍射场. 一级衍射场是 Q 和 P 所能共同直射到的诸稜 A_j 的一级衍射元场之和. 应用(2.2)式, 且令 $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{1}{n}$, 得出 A_j 产生的一级衍射元场为

$$v_{1\pi}^j(r_j, \psi_j) = \frac{2}{n_j} \frac{\sin \frac{\pi}{n_j} \left| \cos \frac{\psi_j}{2} \right|}{\cos \frac{\pi}{n_j} - \cos \frac{\psi_j}{n_j}} e^{-ikr_j \cos \psi_j} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{2kr_j} \left| \cos \frac{\psi_j}{2} \right|}^{\infty} e^{iq^2} dq. \quad (4.5)$$

当多边形各边之长 $\Delta l_j \rightarrow 0$, 而整个多边形趋于曲线 C 时,

$$\frac{1}{n_j} \approx 1 - \frac{\Delta l_j}{\pi \rho_j}, \quad \sin \frac{\pi}{n_j} \approx \frac{\Delta l_j}{\rho_j}, \quad \cos \frac{\pi}{n_j} - \cos \frac{\psi_j}{n_j} \approx 1 - \cos \psi_j,$$

其中 ρ_j 为曲线 C 在 A_j 点的曲率半径. 将以上各式代入(4.5)式并只取主项, 得

$$v_{1\pi}^j(r_j, \psi_j) = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Delta l_j}{\rho_j} \frac{\left| \cos \frac{\psi_j}{2} \right|}{1 - \cos \psi_j} e^{-ikr_j \cos \psi_j} \int_{\sqrt{2kr_j} \left| \cos \frac{\psi_j}{2} \right|}^{\infty} e^{iq^2} dq. \quad (4.6)$$

将 Δl_j 视为微分 dl , 并将(4.6)式对 P, Q 共同直射到的柱面区域积分, 便得一级衍射场

$$v_1(p) = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{[P, Q]} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\left| \cos \frac{\psi}{2} \right|}{1 - \cos \psi} e^{-ikr \cos \psi} \int_{\sqrt{2kr} \left| \cos \frac{\psi}{2} \right|}^{\infty} e^{iq^2} dq \right\} dl. \quad (4.7)$$

再利用(2.1)式, 便可求出 H_s 值. 当 $kr \gg 1$ 时, 利用(2.3)式可将(4.7)式之被积函数化为

$$\frac{i}{2} \frac{1}{\rho} \frac{e^{-ikr \cos \psi}}{1 - \cos \psi} \cdot \frac{e^{2ikr \cos^2 \frac{\psi}{2}}}{\sqrt{2kr\pi}}. \quad (4.8)$$

五、二级衍射场和高级衍射场

为求二级和高级衍射场, 首先导出主掠射元场的表达式. 我们先求入射场在稜 A_j 上发生的一级衍射元场, 射在 A_{j+1} 上时的场强值 $H^{(j, j+1)}$. 为方便起见, 以边 $A_j A_{j+1}$ 为计算

φ_0 与 φ 的起始边, 于是 $\varphi_j = 0$, $\varphi_{0j} = \varphi_{0j}$, 因而 $\psi_j^+ = \varphi_{0j}$, $\psi_j^- = -\varphi_{0j}$, 所以 $v^+ + v^- = 2v$. 又因 $r_j = \Delta l_j \rightarrow 0$, 所以

$$\int_{\sqrt{2kr_j} \left| \cos \frac{\psi_j}{2} \right|}^{\infty} e^{iq^2} dq \approx \int_0^{\infty} e^{iq^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (5.1)$$

将这些值代入(4.5)式, 并考虑到 $e^{-ik\Delta l_j \cos \varphi_{0j}} \approx 1$, 得

$$H^{(j,j+1)} = 2H_0^j \frac{\Delta l_j}{\rho_j} \frac{\left| \cos \frac{\varphi_{0j}}{2} \right|}{1 - \cos \varphi_{0j}}, \quad (5.2)$$

其中 H_0^j 为入射场在 A_j 处之值.

再求 $H^{(j,j+1)}$ 在 A_{j+1} 上产生的衍射场, 掠射在 A_{j+2} 上时的值 $H_{\text{衍}}^{(j,j+2)}$. 这时

$$\varphi_{0(j+1)} = 0, \quad \varphi_{j+1} = \alpha \approx \pi + \frac{\Delta l_{j+1}}{\rho_{j+1}},$$

所以

$$\psi_{j+1}^+ = \psi_{j+1}^- \approx \pi + \frac{\Delta l_{j+1}}{\rho_{j+1}}.$$

从而可得

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{n_{j+1}} - \cos \frac{\psi_{j+1}}{n_{j+1}} &\approx -\frac{d}{d\psi} \cos \frac{\psi}{n_{j+1}} \Big|_{\psi=\pi} (\psi_{j+1} - \pi) = \\ &= \frac{\Delta l_{j+1}}{\rho_{j+1}} \sin \frac{\pi}{n_{j+1}} \approx \frac{\Delta l_{j+1}}{\rho_{j+1}} \sin \left(\pi - \frac{\Delta l_{j+1}}{\rho_{j+1}} \right) \approx \left(\frac{\Delta l_{j+1}}{\rho_{j+1}} \right)^2. \end{aligned}$$

又因这时

$$e^{-ikr_{j+1} \cos \psi_{j+1}} \approx e^{-ik\Delta l_{j+1}(-1)} \approx 1 + ik\Delta l_{j+1},$$

所以当取至 Δl_{j+1} 的一次方项时, 得

$$\frac{1}{n_{j+1}} \frac{\sin \frac{\pi}{n_{j+1}} \left| \cos \frac{\psi_{j+1}}{2} \right|}{\cos \frac{\pi}{n_{j+1}} - \cos \frac{\psi_{j+1}}{n_{j+1}}} e^{-ikr_{j+1} \cos \psi_{j+1}} \approx \frac{1}{2} \left[1 + \left(ik - \frac{1}{\pi \rho_{j+1}} \right) \Delta l_{j+1} \right],$$

因此

$$v_{j+1}^+ + v_{j+1}^- = 2v_{j+1}^+ = 1 + \left(ik - \frac{1}{\pi \rho_{j+1}} \right) \Delta l_{j+1}.$$

将此值代入(5.2)式, 得

$$H_{\text{衍}}^{(j,j+2)} = H^{(j,j+1)} \left[1 + \left(ik - \frac{1}{\pi \rho_{j+1}} \right) \Delta l_{j+1} \right].$$

依此类推, 可以得出此主掠射场传到 A_{j+p} 时的场强为

$$\begin{aligned} H_{\text{衍}}^{(j,j+p)} &= H^{(j,j+1)} \prod_{s=1}^p \left[1 + \left(ik - \frac{1}{\pi \rho_{j+s}} \right) \Delta l_{j+s} \right] = \\ &= H^{(j,j+1)} \exp \left\{ \sum_{s=1}^p \ln \left[1 + \left(ik - \frac{1}{\pi \rho_{j+s}} \right) \Delta l_{j+s} \right] \right\} \approx \\ &\approx H^{(j,j+1)} \exp \left\{ \sum_{s=1}^p \left[\left(ik - \frac{1}{\pi \rho_{j+s}} \right) \Delta l_{j+s} \right] \right\}. \end{aligned}$$

当 $\Delta l_{j+i} \rightarrow 0$ 时, 上式变为积分形式:

$$\begin{aligned} H_{\text{掠}}^{(j,i+p)} &= H^{(j,i+1)} \exp \left\{ \int_{(x)}^{(y)} ik dl - \int_{(x)}^{(y)} \frac{dl}{\pi \rho} \right\} = \\ &= H^{(j,i+1)} \exp \left\{ ikS(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(x)}^{(y)} \frac{dl}{\rho} \right\}, \end{aligned}$$

其中 $(x), (y)$ 表示曲线 C 上分别与 A_j, A_{j+p} 对应之点; $S(x, y)$ 为曲线 C 上自 (x) 到 (y) 这段的弧长. 将(5.2)式 $H^{(j,i+1)}$ 之值代入上式, 得

$$H_{\text{掠}}^{(j,i+p)} = H_0^i \frac{dl_i}{\rho_i} \frac{2 \left| \cos \frac{\varphi_{0j}}{2} \right|}{1 - \cos \varphi_{0j}} \exp \left[ikS(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(x)}^{(y)} \frac{dl}{\rho} \right].$$

因为自 (x) (即 A_j) 到 (y) (即 A_{j+p}) 的主掠射场, 可以在曲线 C 上沿两个方向传递, 如图 5 中之(1), (2)所示. 并且沿每一侧传递到 (y) 之后, 又可继续绕 C 一周再传至 (y) , 且无限地绕传下去. 所以, $H_{\text{掠}}^{(j,i+p)}$ 有两部分[以下用 (x) 表 A_j , 以 (y) 表 A_{j+p}]:

$$\begin{aligned} H_{\text{掠}}^{(n)}(x, y) &= H_0(x) \frac{dl(x)}{\rho(x)} \frac{2 \left| \cos \frac{\varphi_0^{(n)}(x)}{2} \right|}{1 - \cos \varphi_0^{(n)}(x)} \times \\ &\times \left\{ \exp \left[ikS^{(n)}(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(x)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\xi)}{\rho(\xi)} \right] \right\} \times \\ &\times \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \exp m \left(ikS - \frac{1}{\pi} \oint \frac{dl}{\rho} \right) \right], \quad (5.3) \end{aligned}$$

其中上标 $n = 1, 2$ 分别表示图 5 中(1)与(2)这两条路线. S 为曲线 C 之全部弧长, $\oint$ 表示沿 C 积分一周, 显然

$$\oint \frac{dl}{\rho} = 2\pi.$$

若令

$$M = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \exp m(ikS - 2), \quad (5.4)$$

(它对于一定的曲线 C 为一常量), 则(5.3)式成为

$$H_{\text{掠}}^{(n)}(x, y) = H_0(x) \frac{dl(x)}{\rho(x)} \frac{2 \left| \cos \frac{\varphi_0^{(n)}(x)}{2} \right|}{1 - \cos \varphi_0^{(n)}(x)} M \exp \left[ikS^{(n)}(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(x)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\xi)}{\rho(\xi)} \right]. \quad (5.5)$$

将(5.5)式对 Q 所能直射到的所有各稜积分, 便得自两方射在 (y) 处的主掠射场分别为

$$\begin{aligned} H_{\text{掠}}^{(n)}(y) &= M \int_{|Q|} \frac{H_0(x)}{\rho(x)} \frac{2 \left| \cos \frac{\varphi_0^{(n)}(x)}{2} \right|}{1 - \cos \varphi_0^{(n)}(x)} \exp \left[ikS^{(n)}(x, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(x)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\xi)}{\rho(\xi)} \right] dl(x) \\ &\quad (n = 1, 2). \quad (5.6) \end{aligned}$$

此二掠射场射在 (y) 处而产生的衍射场, 在 P 点之场值可令 $\varphi_0^{(n)}(y) = 0$, $\varphi^{(n)}(y) =$

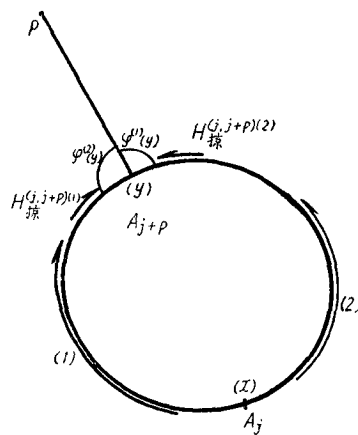


图 5

$\varphi^{(n)}(y)$ (见图 5), 而得到

$$H_2(y) = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^2 H_{\frac{1}{2}n}^{(n)}(y) \frac{dl(y)}{\rho(y)} \frac{\left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}{1 - \cos \varphi^{(n)}(y)} e^{-ikr(y) \cos \varphi^{(n)}(y)} \cdot \int_{\sqrt{2kr(y)} \left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}^{\infty} e^{iq^2} dq. \quad (5.7)$$

将此表达式对 P 点所直射到的区域 $[P]$ 积分, 即得二级衍射场

$$H_2(P) = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^2 \int_{[P]} \frac{H_{\frac{1}{2}n}^{(n)}(y)}{\rho(y)} \frac{\left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}{1 - \cos \varphi^{(n)}(y)} e^{-ikr(y) \cos \varphi^{(n)}(y)} \cdot dl(y) \int_{\sqrt{2kr(y)} \left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}^{\infty} e^{iq^2} dq. \quad (5.8)$$

当求三级以上的衍射场时, 首先对主掠射场“反射”一次进行处理. 因为在反射时, $\varphi = \varphi_0 = 0$, 故

$$\frac{\left| \cos \frac{\psi}{2} \right|}{1 - \cos \psi} = -\frac{1}{2};$$

且可以应用(5.1)式, 所以

$$v^+ + v^- \approx (-1) \frac{\Delta l}{\rho} e^{-ik\Delta l} \approx -\frac{\Delta l}{\rho}.$$

由此可以推得, 自 (n) 方面 ($n = 1, 2$) 传来的主掠射场, 在 (z) 处发生一次反射后, 又以主掠射方式沿 (n) 方向 (见图 6) 传到 (y) 点时其场为

$$H_{1\frac{1}{2}n}^{(n)}(z, y) = (-1) \frac{dl(z)}{\rho(z)} MH_{\frac{1}{2}n}^{(n)}(z) \times \exp \left[ikS^{(n)}(z, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(z)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right]. \quad (5.9)$$

将上式对 (z) 沿曲线 C 积分一周, 即得由 (n) 方面射在 (y) 处的一次反射场:

$$H_{1\frac{1}{2}n}^{(n)}(y) = (-M) \oint \frac{dl(z)}{\rho(z)} H_{\frac{1}{2}n}^{(n)}(z) \times \exp \left[ikS^{(n)}(z, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(z)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right]. \quad (5.10)$$

因而三级衍射场如以下积分所示:

$$H_3(p) = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^2 \int_{[P]} \frac{H_{1\frac{1}{2}n}^{(n)}(y)}{\rho(y)} \frac{\left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}{1 - \cos \varphi^{(n)}(y)} e^{-ikr(y) \cos \varphi^{(n)}(y)} \cdot dl(y) \int_{\sqrt{2kr(y)} \left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}^{\infty} e^{iq^2} dq. \quad (5.11)$$

将此步骤类推下去, 可以得一组递推方程. 若由 (n) 方面射在 (z) 处的第 m 次反射场为 $H_{m\frac{1}{2}n}^{(n)}(z)$, 则 $H_{m\frac{1}{2}n}^{(n)}(z)$ 在 (z) 处再反射一次后, 以主掠射方式沿 (n) 方面传到 (y) 处的场

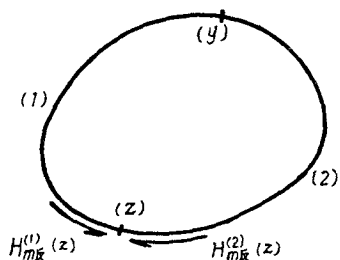


图 6

[即第 $(m+1)$ 次反射元场]为

$$H_{(m+1)\text{反}}^{(n)}(z, y) = (-M) \frac{dl(z)}{\rho(z)} H_{m\text{反}}^{(n)}(z) \exp \left[ikS^{(n)}(z, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(z)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right].$$

因而由 (n) 方面射到 (y) 处的第 $(m+1)$ 次反射场为

$$H_{(m+1)\text{反}}^{(n)}(y) = (-M) \oint \frac{dl(z)}{\rho(z)} H_{m\text{反}}^{(n)}(z) \exp \left[ikS^{(n)}(z, y) - \frac{1}{\pi} \int_{(z)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right]. \quad (5.12)$$

令此场在 (y) 处发生衍射, 并对 p 点直射到的区域积分, 得出 p 点的第 $(m+3)$ 级衍射场如下:

$$H_{m+3}(p) = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^2 \int_{[p]} \frac{H_{(m+1)\text{反}}^{(n)}(y)}{\rho(y)} \frac{\left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}{1 - \cos \varphi^{(n)}(y)} e^{-ikr(y) \cos \varphi^{(n)}(y)} \times \\ \times dl(y) \int_{\sqrt{2kr(y)} \left| \cos \frac{\varphi^{(n)}(y)}{2} \right|}^{\infty} e^{i q^2} dq \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (5.13)$$

六、关于级数收敛性的讨论

我们考察(5.12)式, 并将它改写为

$$H_{(m+1)\text{反}}^{(n)}(y) = (-M) \oint \frac{H_{m\text{反}}^{(n)}(z)}{\rho(z)} \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_{(z)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right) \cdot e^{ikS^{(n)}(z, y)} dl(z), \quad (6.1)$$

它可利用文献[13]中的方法来处理. 由于 $S^{(n)}(z, y)$ 是由 (z) 到 (y) 的弧长, 而 $dl(z)$ 正是弧长的微分, 所以

$$\left| \frac{\partial S^{(n)}(z, y)}{\partial l(z)} \right| \equiv 1 \neq 0.$$

因而可类比于文献[13]中的公式将(6.1)写成[令 $S^{(n)}(z, y) = l^{(n)}(z) - l^{(n)}(y)$]

$$H_{(m+1)\text{反}}^{(n)}(y) = (-M) \oint \Phi^{(n)}(z) e^{ikl^{(n)}(z)} dl^{(n)}(z), \quad (6.2)$$

其中

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{H_{m\text{反}}^{(n)}(z)}{\rho(z)} e^{-ikl^{(n)}(y)} \exp \left(-\frac{1}{\pi} \int_{(z)}^{(y)} \frac{dl^{(n)}(\zeta)}{\rho(\zeta)} \right). \quad (6.3)$$

由于闭合积分(6.2)之积分起迄点可以任意选取, 我们取为由 (y) 积分到 $[(y) + S]$, 于是(6.2)式成为

$$H_{(m+1)\text{反}}^{(n)}(y) = (-M) \int_{(y)}^{(y)+S} \Phi^{(n)}(z) e^{ikl^{(n)}(z)} dl^{(n)}(z). \quad (6.4)$$

设曲线 C 的曲率半径之最小值为 $\rho_{\min}$, 则以 $\rho_{\min}$ 代替(6.3)式中的 $\rho(z)$, 再代入(6.4)式, 就可将(6.4)式写为^[13]

$$\bar{H}_{(m+1)\text{反}}^{(n)}(y) = (-M) \left\{ \frac{1}{ik\rho_{\min}} [\bar{\Phi}((y) + S) - \bar{\Phi}(y)] - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{ik\rho_{\min}} \right)^2 \int_{(y)}^{(y)+S} \bar{\Phi}'(z) e^{ikl^{(n)}(z)} dl^{(n)}(z) \right\}, \quad (6.5)$$

并可继续展为 $\frac{1}{ik\rho_{\min}}$ 的升幂级数 [(6.5) 式中一横表示将 $\rho(z)$ 代之以 $\rho_{\min}$], 因而可将

(6.5)式写为

$$\bar{H}_{(m+1)\mathbb{R}}^{(n)}(y) = (-M) \frac{1}{ik\rho_{\min}} (e^{ikS-2} - 1) H_{m\mathbb{R}}^{(n)}(y) e^{-ikl^{(n)}(y)} + O\left(\frac{1}{ik\rho_{\min}}\right)^2. \quad (6.6)$$

当 $H_{m\mathbb{R}}^{(n)}$ 及 ρ 均为足够规则的函数时, 只要 $k\rho_{\min} > 1$, 级数(6.6)就是绝对收敛的. 因 $\rho_{\min} \leq \rho$, 所以(6.2)式之绝对值, 必定不会大于将(6.6)式之各项化为绝对值后的级数和. 利用(6.6)式之形式, 一直推出 $H_{(m+t)\mathbb{R}}^{(n)}(y)$ 之表达式, 它是一个以 $\left[\frac{(-M)(e^{ikS-2} - 1)}{ik\rho_{\min}}\right]^t$ 为首项的升幂级数:

$$H_{(m+t)\mathbb{R}}^{(n)}(y) = \left[\frac{(-M)(e^{ikS-2} - 1)}{ik\rho_{\min}}\right]^t e^{-itkl^{(n)}(y)} H_{m\mathbb{R}}^{(n)}(y) + O\left[\frac{(-M)(e^{ikS-2} - 1)}{ik\rho_{\min}}\right]^{t+1}. \quad (6.7)$$

由此显然可以推知, 当

$$\left| \frac{M(1 - e^{ikS-2})}{ik\rho_{\min}} \right| < 1$$

或

$$k\rho_{\min} > |M(1 - e^{ikS-2})| \quad (6.8)$$

时, 级数

$$\sum_{m=1}^{\infty} H_{m\mathbb{R}}^{(n)}(y)$$

是绝对收敛的, 因而(5.13)式中, $H_{(m+1)\mathbb{R}}^{(n)}(y)$ 对 m 求和时亦绝对收敛. 由此推知, 积分(5.13)对 m 求和也绝对收敛. 即当(6.8)式满足时, 衍射级数是绝对收敛的.

因为 $|e^{ikS-2}| \ll 1$, 所以由(5.4)式可知 $M \approx 1$, 因而从(6.8)式看出, 当

$$k\rho_{\min} \gg 1 \quad (6.9)$$

时, 级数收敛很快.

参 考 文 献

- [1] Franz, W., Theorie der Beugung Elektromagnetischer Wellen (Springer-Verlag, 1957), II Abschnitt.
- [2] Уфимцев, П. Я., Метод краевых волн в физической теории дифракции (Москва, 1962), Гл. 1.
- [3] Keller, J. B., *J. Opt. Soc. Amer.*, **52** (1962), 116.
- [4] Фок, В. А., *Изв. АН СССР, сер. физ.*, **10** (1946), 171.
- [5] Seckler, B. D. and Keller, J. B., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **31** (1958), 192.
- [6] Keller, J. B., *J. Opt. Soc. Amer.*, **40** (1950), 48.
- [7] Фок, В. А., *УФН*, **36** (1948), 308.
- [8] Bremmer, H., Theory of Electromagnetic Waves, a Symposium (Interscience Publishers, 1951), p. 169.
- [9] Bellman, R. and Kalaba, R., *Proc. Nat. Acad. Science USA.*, **42** (1956), 629.
- [10] Sommerfeld, A., *Math. Ann.*, **47** (1895), 317.
- [11] Pauli, W., *Phys. Rev.*, **54** (1938), 924.
- [12] Keller, J. B., *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959), 159.
- [13] Toraldo Di Francia, Electromagnetic Waves (Interscience Publishers, 1953), p. 36.

THE SERIES OF DIFFRACTION BY CONDUCTING CYLINDER

CHENG LU

(*Nankai University*)

ABSTRACT

This paper suggests an approximation method for solving the problems of diffraction due to perfectly conducting cylinder, the section of which is a smooth curve C of arbitrary form. The principle of the method is similar to that of H. Bremmer^[8]: The field of diffraction due to a cylinder with a polygonal section (which is an inscribed polygon of the curve C) is expanded into a series. The first term of the series is the geometrical field. The second term of the series is the sum of the elementary diffraction fields due to the wedges of the polygonal cylinder. These fields are taken as those of Sommerfeld's problem, i.e., both sides of each wedge are infinitely extended. Each of these elementary fields falls on the neighbour wedge and is diffracted by the latter, and this diffracted field in turn falls on the next neighbour wedge and is again diffracted by the latter, etc. The field diffracted by the wedges one after another in such a way is called the main tangential elementary field. The third term of the series is the sum of these main tangential elementary fields. The field diffracted by wedge A , being diffracted again by the neighbour wedge B , reflects back on wedge A again, and then propagates in this direction progressively in a manner mentioned above. Such a field is called once-reflected elementary field. The fourth term of the series is the sum of these once-reflected elementary fields, etc. In general, the m -th term of the series is the sum of the $(m-3)$ times-reflected elementary fields. Every elementary diffracted field due to any wedge is taken as the solution of Sommerfeld's problem for this wedge in the manner mentioned above. As the sides of the inscribed polygon approach to zero, the inscribed polygon approaches to the curve C , and each term of the series becomes an integral, the limit of the summation of the series approaching to the rigorous solution of the initial problem.

The first three terms of the series are deduced individually. For the general m -th term a recurrent formula is given. Finally the condition of convergence of the series is discussed.