

关于拉卡代数中一些求和公式的推广*

陈 金 全

(南京大学物理系)

一、引 言

拉卡系数 W , $9j$ 系数及 $12j$ 系数是原子核物理中经常要碰到的, 它们都可以用 Clebsch-Gordon 系数(以后简称为 C 系数)表示出来. 例如拉卡系数可以表示为

$$\sum C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_{12} m_{12}, j_3 m_3}^{J M} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_2 m_2, j_3 m_3}^{j_{23} m_{23}} = [j_{12} j_{23}]^{\frac{1}{2}} W(j_1 j_2 j_3; j_{12} j_{23}), \quad (1)$$

这里符号 $[j]$ 代表 $2j+1$, $[j_1 j_2 \cdots j_n] = (2j_1+1)(2j_2+1) \cdots (2j_n+1)$. 这一关系式是大家都很熟悉的, 但式(1)左方究竟对那些磁量子数求和, 却往往会有含混. 如文献[1]中就说上式左方是对所有的磁量子数求和; 又如文献[2]中在 $9j$ 系数的定义上也有类似的错误, 即认为

$$\sum_{\text{所有 } m} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3, j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{12} m_{12}, j_{34} m_{34}}^{J M} C_{j_1 m_1, j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_2 m_2, j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} C_{j_{13} m_{13}, j_{24} m_{24}}^{J M} = [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

实际上式(1)和(2)只有在左方求和时保持 J 的磁量子数 M 为不变的条件下才是正确的; 也就是说, 求和时 M 可以取任一确定的值, 但求和的结果是和 M 无关的. 现在假定式(1)或式(2)左方求和号内还含有另外一个因子 f , 它和其他某一个磁量子数(比如说 m_{12})有关, 那么在求和式

$$\sum_{\text{所有 } m} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_{12} m_{12}, j_3 m_3}^{J M} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_2 m_2, j_3 m_3}^{j_{23} m_{23}} f(m_{12}) \quad (3)$$

时, 我们就不能直接利用公式(1). 实际上式(3)并不等于 $[j_{12} j_{23}]^{\frac{1}{2}} W(j_1 j_2 j_3; j_{12} j_{23}) \times \sum_{m_{12}} f(m_{12})$. 要想利用公式(1), 首先必须将其中的4个 C 系数的上下指标进行交换, 把 j_{12} 换到相当于总角动量的地位. 就是说, 使得角动量间的耦合次序变成这样:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_{23} &= \mathbf{J}, & \mathbf{J} + \mathbf{j}_3 &= \mathbf{j}_{12}, \\ \mathbf{j}_{23} + \mathbf{j}_3 &= \mathbf{j}_2, & \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2 &= \mathbf{j}_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

然后利用式(1), 可以算出式(3)等于 $\frac{[J]}{[j_{12}]} [j_{12} j_{23}]^{\frac{1}{2}} W(j_1 j_2 j_3; j_{12} j_{23}) \sum_{m_{12}} f(m_{12})$. 这样做显然太麻烦, 本文的目的就是要把公式(1), (2)等推广到左方求和号中是固定任意一个磁量

* 1964 年 10 月 30 日收到.

子数的情形,这样可以使我们立刻求出象式(3)那样的和而不必去交换指标.下面我们以前9j系数为例,导出推广了的求和公式,最后对W系数和12j系数给出一些类似的公式.

二、求和公式

从9j系数的定义可得

$$C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3, j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{12} m_{12}, j_{34} m_{34}}^{JM} = \sum_{j_{13} j_{24}} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24}]^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix} C_{j_1 m_1, j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_2 m_2, j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} C_{j_{13} m_{13}, j_{24} m_{24}}^{JM} \quad (5)$$

我们可以通过几种途径把式(5)右方的任意二个C系数“搬到”左方去,其基本结果有以下三种:

$$(1) \quad \sum C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3, j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{12} m_{12}, j_{34} m_{34}}^{JM} C_{j_1 m_1, j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_2 m_2, j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} = \\ = C_{j_{13} m_{13}, j_{24} m_{24}}^{JM} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix}; \quad (6)$$

$$(2) \quad \sum C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3, j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{12} m_{12}, j_{34} m_{34}}^{JM} C_{j_1 m_1, j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_{13} m_{13}, j_{24} m_{24}}^{JM} = \\ = \frac{[J]}{[j_{24}]} C_{j_2 m_2, j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix}; \quad (7)$$

$$(3) \quad \sum C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3, j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{12} m_{12}, j_{34} m_{34}}^{JM} C_{j_2 m_2, j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} C_{j_{13} m_{13}, j_{24} m_{24}}^{JM} = \\ = \frac{[J]}{[j_{13}]} C_{j_1 m_1, j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

式(6—8)中左方求和,应是除了出现在右边的三个磁量子数外,对其他所有的磁量子数求和(真正独立的求和指标只有两个).在上面这些等式的两边,乘上对应的一个C系数,并对它的任意两个磁量子数求和,固定第三个磁量子数,就可得到七个求和公式;把它们归并成一个式子即为

$$\sum_{\text{固定 } m_k} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_3 m_3, j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{12} m_{12}, j_{34} m_{34}}^{JM} C_{j_1 m_1, j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_2 m_2, j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} C_{j_{13} m_{13}, j_{24} m_{24}}^{JM} = \\ = \frac{[J]}{[j_k]} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix}; \quad (9)$$

上式左方的求和号代表在固定 j_k 的磁量子数 m_k 不变的条件下对所有其余的磁量子数求和(真正独立的求和指标只有三个),求和的结果和 m_k 无关.式中 $j_k m_k$ 可以是 JM , $j_1 m_1$, $j_2 m_2$, $j_3 m_3$, $j_4 m_4$, $j_{13} m_{13}$ 和 $j_{24} m_{24}$ 中任意一个.如果我们从式(5)的反展开式出发,那么也可

得到类似于(6—8)的三个式子。两边乘上某一个 C 系数, 进一步求和后仍然得到式(9), 不过这时的 $j_\kappa m_\kappa$ 可以是 $JM, j_1 m_1, j_2 m_2, j_3 m_3, j_4 m_4, j_{12} m_{12}$ 和 $j_{34} m_{34}$ 中任意一个。把这两种情形合在一起, 于是式(9)普遍成立, j_κ 可以是 9 个角动量中任意一个。当 $j_\kappa m_\kappa$ 为 JM 时, 式(9)就过渡到一般常见的求和公式, 因此式(9)是常见的求和公式的推广。

还可以将式(6—8)也合并成一个普遍的式子, 以便于记忆和使用。我们用符号 $\{CCCCC\}$ 来表示式(9)左方的 6 个 C 系数。6 个 C 系数中除去某一个, 例如除去 $C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}}$ 后剩下的 5 个 C 系数可表示为 $\{CCCCC\} \{C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}}\}^{-1}$ 。因此对于这样 6 个 C 系数中的任意 5 个的求和公式为

$$\sum_{\substack{\text{除 } m_\kappa m_a m_b \\ \text{外对所有的 } m}} \{CCCCC\} \{C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j_\kappa m_\kappa}\}^{-1} = \frac{[J]}{[j_\kappa]} C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j_\kappa m_\kappa} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & J \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

上式中 $C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j_\kappa m_\kappa}$ 代表 6 个 C 系数中的任意一个。

对于 $12j$ 系数类似的有以下公式:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{固定 } m_\kappa} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_0 m_0, j_{12} m_{12}}^{j_{012} m_{012}} C_{j_3 m_3, j_4 m_4}^{j_{34} m_{34}} C_{j_{012} m_{012}, j_{34} m_{34}}^{j_{0123} m_{0123}} C_{j_1 m_1, j_3 m_3}^{j_{13} m_{13}} C_{j_0 m_0, j_{13} m_{13}}^{j_{013} m_{013}} C_{j_2 m_2, j_4 m_4}^{j_{24} m_{24}} C_{j_{013} m_{013}, j_{24} m_{24}}^{j_{01324} m_{01324}} = \\ = \frac{[J]}{[j_\kappa]} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24} j_{012} j_{013}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_{012} & j_{12} & j_2 & j_{24} \\ j_0 & j_1 & j_4 & J \\ j_{013} & j_{13} & j_3 & j_{34} \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (11)$$

上式左方表示在固定 j_κ 的磁量子数 m_κ 为不变的条件下对其他所有的磁量子数求和, 右方的 $\{ \}$ 为 Ord-Smith^[3] 所定义的 $12j$ 系数。我们仍以符号 $\{CCCCCCCC\}$ 代表式(11)左方的 8 个 C 系数, 对其中任意 7 个 C 系数的乘积的求和公式为

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{除 } m_\kappa m_a m_b \\ \text{外对所有的 } m}} \{CCCCCCCC\} \{C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j_\kappa m_\kappa}\}^{-1} = \\ = \frac{[J]}{[j_\kappa]} C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j_\kappa m_\kappa} [j_{12} j_{34} j_{13} j_{24} j_{012} j_{013}]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_{012} & j_{12} & j_2 & j_{24} \\ j_0 & j_1 & j_4 & J \\ j_{013} & j_{13} & j_3 & j_{34} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

对于拉卡系数同样可得到两个求和公式:

$$\begin{aligned} \sum_{\text{固定 } m_\kappa} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{j_{12} m_{12}} C_{j_{12} m_{12}, j_3 m_3}^{j_{123} m_{123}} C_{j_1 m_1, j_{23} m_{23}}^{j_{123} m_{123}} C_{j_2 m_2, j_3 m_3}^{j_{23} m_{23}} = \\ = \frac{[J]}{[j_\kappa]} [j_{12} j_{23}]^{\frac{1}{2}} W(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\text{除 } m_\kappa m_a m_b \\ \text{外对所有的 } m}} \{CCCC\} \{C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j_\kappa m_\kappa}\}^{-1} = \\ = \frac{[J]}{[j_\kappa]} C_{j_a m_a, j_b m_b}^{j_\kappa m_\kappa} [j_{12} j_{23}]^{\frac{1}{2}} W(j_1 j_2 J j_3; j_{12} j_{23}); \end{aligned} \quad (14)$$

这里用的符号和前面类似, 不再赘述。

式(9—14)就是所得到的推广了的求和公式。利用这些求和公式, 可以使计算大为简

化。例如式(2)的求和,利用式(13),立刻可以得出结果为 $\frac{[J]}{[j_{12}]} [j_{12}j_{23}]^{\frac{1}{2}} W(j_1j_2Jj_3; j_{12}j_{23}) \times$
 $\times \sum_{m_{12}} f(m_{12})$, 不必去把 j_{12} 换到总角动量的地位后再求和。

参 考 文 献

- [1] Preston, M. A., *Physics of the Nucleus*, Appendix A (London, 1962), p. 609.
- [2] Arima, A., Horie, H. and Tanabe, Y., *Prog. Theoret. Phys.*, **11** (1954), 143.
- [3] Ord-Smith, R. J., *Phys. Rev.*, **94** (1954), 1227.